GL H 512
CHA

125722
LBSNAA

ी राष्ट्रीय प्रशासन अकादमी
ıcademy of Administration
मसूरी
MUSSOORIE

पुस्तकालय
LIBRARY

अवाप्ति संख्या
Accession No. ~~20043~~ 125722

वर्ग संख्या GLH
Class No. 512

पुस्तक संख्या
Book No. ~~चटोपा~~ CHA

बीजगणित प्रवेशिका

[हिन्दी संस्करण]

(कलकत्ता यूनिवर्सिटी की आज्ञानुसार अनुवादित)

—:o:—

लेखक

श्री सुरेन्द्रमोहन चट्टोपाध्याय, डी० एस-सी०

तथा

श्री ज्योतिर्मय घोष, एम० ए०, पी०-एच० डी०

पी० सी० द्वादशश्रेणी ऐण्ड कम्पनी,

अलीगढ़ सिटी

द्वारा प्रकाशित तथा अनुवादित।

१९४०

Printed by
M. RAM NARAIN
at the
HIRA LAL PRINTING WORKS,
ALIGARH.

All rights reserved by the Publishers.

Published by
P. C. DWADASH SHRENI & Co.,
EDUCATIONAL PUBLISHERS,
ALIGARH (U. P.)

PREFACE

THE present book 'Bijganit Praveshika' is an exact translation of the Bengali book written by the eminent mathematicians under authority of the Calcutta University and published by the University Press, Calcutta, in strict accordance with the prescribed syllabus. As in the original book to facilitate reading and writing and study at the later stage after matriculation, it has been thought proper to use English symbols as a, b, c, x, y, z, etc., and English figures as 1, 2, 3, etc.

Regarding the Hindi-Urdu translations one thing we may state that the book has been translated into very fluent Hindi and Urdu quite suiting the students of Bengal province and in no way the quality of the original work has been affected. Regarding Hindi and Urdu mathematical terms care has been taken to use only such words as unanimously admitted by

the Kashi Nagari Pracharini Sabha and other authorised institutions concerned. Those words which could safely be used exactly as in the Bengali version, have been used as they are and have not been changed.

The present book is usually to be finished within 4 years' time. Though it has not actually been divided into four different sections, yet it could be followed as such :—

First year	Chapters	1 to 8
Second year	,,	9 to 16
Third year	,,	17 to 23
Fourth year	,,	24 to 32

The Publishers.

विषय-सूची

बीजगणित प्रवेशिका

पहला अध्याय

——:o:——

विषय-प्रवेश

1. बीजगणित।

अङ्कगणित (Arithmetic) पढ़ने से संख्या (Numbers) के सम्बन्ध में बहुतसी जानने योग्य बातें मालूम होती हैं। संख्या के सम्बन्ध में व्यापक रूप से विचार करने के लिए एक और शास्त्र है जिसे बीजगणित (Algebra) कहते हैं। यह *विश्वव्यापक अङ्कगणित (Universal Arithmetic) कहलाता था। बीजगणित और अङ्कगणित में प्रभेद यह है कि अङ्कगणित की संख्यायें 1, 2, 3, 4 आदि अङ्कों के द्वारा लिखी जाती हैं, किन्तु बीजगणित में संख्याओं को प्रकट करने के लिए 1, 2, 3, 4 आदि अङ्क तथा a, b, c, d अथवा क, ख, ग, घ आदि वर्णमाला के अक्षरों (Letters) दोनों ही का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार के प्रयोग के कारण अङ्कगणित द्वारा प्राप्त किया हुआ ज्ञान बीजगणित में और भी व्यापक भाव से प्रयोग में लाया जाता है। बीजगणित में एक सुविधा यह है कि अङ्कगणित के बहुत से नियम और पद्धतियाँ बहुत संक्षेप में लिखी जाती हैं और बहुत आसानी से तथा कम समय में अनेक दुरूह प्रश्नों का समाधान किया जासकता है। गणित की संख्या और नियम आदि व्यापक भाव से काम में लाये जाते हैं, इस कारण बीजगणित की सहायता से संख्या के सम्बन्ध में ऐसे बहुतसे तथ्य मालूम किये जाते हैं जिनका जानना अङ्कगणित के द्वारा साधारणतः सम्भव नहीं होता।

---

* न्यूटन (Newton) के समय में बीजगणित (Algebra) को विश्व-व्यापक अङ्कगणित (Universal Arithmetic) कहा जाता था।

अङ्कगणित की संख्याए हिन्दी में १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ और ० (अँगरेज़ी में 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 0) इन दस अङ्कों के द्वारा लिखी जाती हैं; परन्तु बीजगणित में संक्षेप में संख्याओं को प्रकट करने के लिए क, ख, ग, घ आदि वर्णमाला के अक्षर काम में लाये जाते हैं। लिखने की सुविधा के लिए इस पुस्तक में क, ख, ग, घ आदि हिन्दी वर्णमाला के स्थान में $a, b, c, d, \ldots\ldots, x, y, z$, आदि अँगरेज़ी वर्णमाला के अक्षर संख्या के संकेत या प्रतीक (Symbols of Numbers) के रूप में काम में लाये जावेंगे।

अङ्कगणित में प्रत्येक अङ्क का एक निर्दिष्ट **मान** (Value) है, परन्तु बीजगणित में व्यवहार में लाये गये सांकेतिक अक्षरों का कोई निर्दिष्ट मान नहीं है। इनमें से हर एक का कोई भी मान स्वीकार कर लिया जासकता है और प्रत्येक अक्षर किसी भी संख्या के स्थान में काम में लाया जा सकता है, परन्तु यह स्मरण रखना चाहिए कि जब कभी किसी अक्षर का एक निर्दिष्ट मान स्वीकार कर लिया जायगा तो एक ही प्रश्न या उसके 'हल' में उस अक्षर का सदा वही मान ग्रहण करना पड़ेगा।

टीका—बीजगणित में व्यवहार में लाये गये सांकेतिक अक्षरों को बीजगणितीय या बैजिक संख्या और अङ्कगणित में व्यवहार में लाये गये अङ्कों को अङ्कगणितीय या अङ्कीय संख्या कहा जा सकता है।

2. बीजगणित में अङ्कगणित के नियम आदि का उपयोग।

उदाहरण 1. अङ्कगणित में संख्या के सम्बन्ध में जो जो नियम आदि प्रचलित हों बीजगणित में वे सभी नियम और भी व्यापक रूप से उपयोग में लाये जाते हैं;

जैसे, $3+4=7$ और $4+3=7$, अर्थात् 3 और 4 इन दो अङ्कों को जिस किसी भी क्रम से जोड़ो इनका योग 7 होगा।

यह नियम किसी भी दो संख्याओं के सम्बन्ध में काम में लाया जा सकता है। यदि 3 के स्थान पर x और 4 के स्थान पर y लिखा जाय, तो ऊपर लिखे हुए नियमानुसार देखने में आवेगा कि $x+y=y+x$; अर्थात् जिन दो संख्याओं में से पहली के साथ दूसरी का योग करने पर

जो योगफल आवेगा वही योगफल दूसरी को पहली से जोड़ने पर आवेगा। यहाँ देखने में आता है कि $3+4=4+3$ की अपेक्षा $x+y=y+x$ का उपयोग और भी व्यापक है। कारण यह है कि इस अन्तवाले नियम में x और y का कोई भी मान स्वीकार किया जासकता है। x और y के भिन्न भिन्न मान निर्दिष्ट करके देखा जाय तो मालूम होगा कि $2+3=3+2$, $4+5=5+4$ आदि सभी $x+y=y+x$ इस केवल एक ही वाक्य (Statement) के अन्तर्गत हैं। इसलिए $x+y=y+x$ साधारणतः एक व्यापक नियम है। यह किसी भी दो संख्याओं के सम्बन्ध में उपयोग में लाया जासकता है।

उदाहरण 2. अङ्कगणित के बहुत से नियम बीजगणित के संकेत की सहायता से संक्षेप में प्रकट किये जासकते हैं।

मान लो कि एक रेलगाड़ी ने 4 घंटे में 80 मील का रास्ता तै कर लिया। अङ्कगणित के नियम के अनुसार उसकी गति प्रति घंटा $80 \div 4 =$ 20 मील, अर्थात्

$$\text{गति} = \frac{\text{तै किया हुआ रास्ता}}{\text{बीता हुआ समय}}\text{।}$$

इसका अर्थ यह है कि कोई भी दूरी तै करने में जितना समय (घंटा) लगे उस दूरी के परिमाण को समय (घंटा) के परिमाण से भाग दे देने पर प्रति घंटा की गति निश्चित हो जाती है।

सांकेतिक अक्षर की सहायता से ऊपर लिखे हुए नियम को संक्षेप में प्रकट किया जाता है। यदि तै की हुई दूरी के स्थान में S और बीते हुए समय (घंटा) के स्थान में T और प्रति घण्टा की गति के स्थान में V का प्रयोग किया जाय, तो ऊपर लिखा हुआ नियम $V=\frac{S}{T}$ लिखा जासकता है। यह संक्षेप में लिखा हुआ नियम आसानी से याद रक्खा जासकता है और इस प्रकार साधारण रूप से प्रकट किये गये नियम को सूत्र (Formula) कहा जाता है। इसके द्वारा V, S, T—इन तीन संख्याओं में एक सम्बन्ध स्थापित हो गया। इन तीनों में से यदि कोई भी दो मालूम रहें, तो तीसरी ज्ञात की जासकती है।

3. ऐतिहासिक सिद्धान्त।

भारतवासियों के लिए यह एक विशेष गौरव की बात है कि आजकल बीजगणित के नाम से जो संख्या-सम्बन्धी विज्ञान प्रचलित है वह उन्हीं के पूर्वजों के मस्तिष्क की उपज है। प्राचीन-काल में हिन्दू ज्योतिषी अनेक प्रकार के काल्पनिक प्रश्नों का समाधान किया करते थे। उन्हीं में से कुछ प्रश्न आजकल बीजगणित के अन्तर्गत होगये हैं। इन सब स्वनामधन्य हिन्दू ज्योतिषियों में सर्वप्रथम आर्यभट्ट ने (525 ईस्वी में) पटना में जन्म ग्रहण किया। बाद को उज्जैन के ब्रह्मगुप्त (650 ईस्वी) ने विशेष ख्याति प्राप्त की। मैसूर के सुप्रसिद्ध विद्वान् महावीर आचार्य बीजगणित-शास्त्र के विशेष रूप से पारदर्शी थे। इनके बाद और भी दो विद्वान्—श्रीधर आचार्य और पद्मनाभ, गणित-शास्त्र में असाधारण पांडित्य प्रदर्शित कर गये हैं।

इस विज्ञान के क्षेत्र में युरोपवालों के प्रवेश करने के बहुत पहले भास्कराचार्य (1150 ईस्वी) ने इस शास्त्र में विशेष रूप से अपनी सफलता का परिचय दिया था। हिन्दू ज्योतिषियों में इस विषय में क्षमता प्रदर्शित करनेवाले यही सबसे अन्तिम आचार्य हैं। उनका बनाया हुआ अङ्कगणित उनकी कन्या लीलावती के नाम के आधार पर **लीलावती** नाम से प्रसिद्ध है। बीजगणित (Algebra) भी उसी नाम से प्रसिद्ध है। आश्चर्य का विषय यह है कि यह सभी महापुरुष ज्योतिष-शास्त्र के ज्ञाता थे और ज्योतिष-शास्त्र की सहायता के ही लिए बीजगणित का अध्ययन और उसका विकास किया था। इन सबकी सभी पुस्तकें संस्कृत भाषा में श्लोकों में लिखी गई हैं।

इसी बीच में अरबवालों (Arabians) ने भी बीजगणित की बहुत कुछ उन्नति करली। **मुहम्मद इब्न मूसा** (Mohd. ibn Musa Alkhowarizmi) ने **अलजबरुल मुकाबिला** (Al-jabrwal Muquabala) नामक एक बीजगणित बनाया। पीसा (Pisa) निवासी ल्युनार्डो बोनाकी (Leonardo Bonacci) ने 1200 ईस्वी में उसका इटली देश में प्रचार किया जो Algebra "Almucabela", "Mucabel" नाम से परिचित हुआ।

इन पंडित Bonacci के प्रयत्न से—विशेषतः हिन्दुओं के द्वारा प्रवर्तित संख्या लिखने की पद्धति युरोप में सबसे पहले प्रचलित की गई और राबर्ट रिकार्डो (Robert Recorde) नामक एक चिकित्सक ने पहले-पहल 1557 ईस्वी में इङ्गलैण्ड में इसका प्रचार किया। वर्तमान बीजगणित में

उपयोग में लाये जानेवाले संकेत आदि बहुत कुछ आधुनिक हैं। फ्रांस के सुप्रसिद्ध गणितज्ञ डिस्कारटिस् (Descartes) (1631 ईस्वी) ने अज्ञात राशि के स्थान पर x, y, z और निश्चित या ज्ञात-राशि के स्थान पर a, b, c आदि अक्षरों के उपयोग में लाने की प्रथा का सबसे पहले प्रचार किया।

दूसरा अध्याय

परिभाषाएँ (Definitions)

4. राशि और परिमाण (Magnitude and Quantity).

जिसका परिमाण किया जासके अर्थात् एक ही जाति की वस्तु के साथ तुलना करके जिसका परिमाण निर्धारित किया जाय उसे **राशि** (Quantity या Magnitude) कहते हैं; जैसे, वज़न, दूरी, समय आदि का बोध जिन शब्दों के द्वारा होता है वे सब एक एक राशि हैं। बात यह है कि इनमें से हर एक का एक एक परिमाण होता है।

बीजगणित में 'राशि' शब्द का प्रयोग किसी खण्ड या अखण्ड संख्या के अर्थ में भी हुआ करता है। धन, लम्बाई, भारीपन आदि परिमेय राशियों को **'बद्ध तथा अन्वित राशि'** (Concrete Quantity) और साधारण संख्याओं को **शुद्ध राशि** (Abstract Quantity) कहते हैं।

5. माप (Measure) और इकाई (Unit).

जब कभी किसी राशि का परिमाण जानना हो तब उसी जाति की एक दूसरी निर्दिष्ट राशि को लेकर यह निश्चय किया जाता है कि यह उसमें कै बार सम्मिलित है। जिस निर्दिष्ट राशि के साथ तुलना करके उक्त राशि का परिमाण निश्चित किया जाता है उसे **ऐकिक राशि** (Unit Quantity) या संक्षेप में **इकाई** (Unit) कहा जाता है। किसी राशि में उसकी इकाई जितने बार सम्मिलित हो उसे उस राशि का **माप** (Measure) कहते हैं।

उदाहरणार्थ मान लो कि एक कपड़े की लम्बाई मालूम करनी है। यदि हम एक गज़ को लम्बाई की निश्चित राशि मान लें और कपड़े की लम्बाई के दो टुकड़े एक गज़ कपड़े के बराबर हों तो मानना पड़ेगा कि इस कपड़े की लम्बाई का परिमाण दो गज़ है। यहाँ एक गज़ (लम्बाई की) इकाई और 2 (दो) संख्या 'दो गज़' राशि का माप कहा जायगा। इस प्रकार एक फ़ुट को लम्बाई की निर्दिष्ट राशि मानने पर कपड़े की लम्बाई 6 (छः) फ़ुट होगी। इस हालत में एक फ़ुट को लम्बाई की 'इकाई' और 6 'संख्या' को 6 फ़ुट राशि का माप कहा जायगा और जब हम 3 इंच को इकाई मान लें, तो कपड़े की लम्बाई की माप 24 होगी।

6. बीजगणित के चिह्न या संकेत (Algebraic Symbols).

संख्या का बोध कराने के लिये a, b, c, x, y, z आदि वर्णमाला के जितने भी अक्षर काम में लाये जाते हैं और $\sim, +, -, \times, \div, =$ आदि जिन जिन चिह्नों की सहायता से इनका आपस में एक दूसरे का सम्बन्ध प्रकट होता है, अथवा गणित की कोई क्रिया सिद्ध करनी होती है उन सब को बीजगणित के चिह्न या संकेत (Algebraic Symbols) कहते हैं। गणित के $+$, $-$ आदि क्रियावाचक चिह्नों से भिन्नता का निर्देश करने के लिये a, b, c आदि अक्षरों और अङ्कों के संकेत (Symbols of Quantity) कहा जाता है।

7. योग चिह्न $(+)$.

जब दो संख्याओं के बीच में '$+$' वर्तमान रहता है तो उससे ज्ञात होता है कि दूसरी संख्या को पहली के साथ जोड़ना होगा; जैसे,

$x+y$ के द्वारा ज्ञात होता है कि y का जिस संख्या के स्थान पर उपयोग किया गया है उसे जिस संख्या के स्थान पर x का प्रयोग किया गया है उसके साथ जोड़ना होगा। योगफल को x और y का योग कहा जाता है। $x+y$ को 'x सहित y' इस प्रकार पढ़ना चाहिए। यदि x के द्वारा 2, और y के द्वारा 3 का बोध हो तो $x+y=2+3=5$ समझना चाहिए।

टीका—$2+3=5$ की अपेक्षा $x+y=5$ अधिक व्यापक है। कारण यहाँ x और y के स्थान पर ऐसी कोई भी दो संख्याएँ काम में लाई जा

सकती हैं जिनका योग 5 होता है; जैसे, $x+y=1+4=2+3=5$ आदि।

उदाहरण। यदि राम के पास x गोलियाँ हों और हरि के पास y गोलियाँ हों, तो उन दोनों की गोलियों को एकत्रित करने पर $x+y$ गोलियाँ होंगी। यहाँ x और y किसी भी दो संख्याओं के स्थान पर काम में लाये जासकते हैं; जैसे, $x=5$, $y=7$, $x+y=12$, $x=9$, $y=21$, $x+y=30$. इस प्रकार x और y का कोई भी मान (Value) स्वीकार किया जा सकता है।

टीका—x का मान (Value) यदि 5 स्वीकार कर लिया जाय तो यह आवश्यक नहीं है कि उसे हम प्रत्येक स्थान पर 5 ही मानते रहें। केवल जिस स्थान पर हम उसे 5 मान लेंगे उसी स्थान पर उसका मान 5 होगा। परन्तु अन्य स्थानों पर उसका कोई भी मान स्वीकार किया जासकता है।

8. घटाने का चिह्न (−).

दो संख्याओं के बीच में जब '−' रहे तो यह समझना चाहिए कि दूसरी संख्या को पहली संख्या में से घटाना है; जैसे, $x-y$ को x ऋण y पढ़ना चाहिए। इससे यह सूचित होता है कि x अक्षर के द्वारा सूचित संख्या में से y द्वारा सूचित संख्या को घटाना होगा। यदि $x=7$ और $y=5$ हो, तो $x-y=7-5=2$ होगा, किन्तु यह बाद को लिखा गया $x-y=2$ वाक्य अधिक व्यापक अर्थ में प्रयोग किया गया है। कारण x और y के स्थान पर ऐसी भी दो संख्याएँ काम में लाई जासकती हैं जिनका शेष 2 होता हो; जैसे, $x-y=8-6=12-10$ आदि।

टीका—अङ्कगणित में केवल एक बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाई जाती है, परन्तु बीजगणित में यदि y, x से न भी बड़ी हो तो भी x में से y को घटाया जाता है और शेष सर्वदा $x-y$ लिखा जाता है। इस सम्बन्ध में तीसरे अध्याय में विस्तारपूर्वक विचार किया जायगा।

9. गुणन चिह्न (×).

दो संख्याओं के बीच में यदि '×' हो तो यह प्रकट होता है कि पहली संख्या को दूसरी संख्या से गुणा करना होगा; जैसे, $x \times y$ से यह सूचित होता है कि x के द्वारा सूचित संख्या को y द्वारा सूचित संख्या से गुणा

करना होगा। गुणा करने से जो फल प्राप्त होता है उसको x और y का **गुणनफल** (Product) कहते हैं।

'×' चिह्न का नाम **गुणन या गुणन चिह्न** (Sign of Multiplication) है। $x \times y$ को 'x गुणित y' पढ़ना चाहिए। यदि $x=3$ और $y=8$ हो, तो $x \times y = 3 \times 8 = 24$, परन्तु $x \times y$ वाक्य अधिक व्यापक अर्थ में प्रयोग किया जाता है। कारण x और y के स्थान में ऐसी दो संख्याएँ काम में लाई जासकती हैं जिनका गुणनफल 24 होता हो; जैसे, $x \times y = 2 \times 12 = 4 \times 6$ आदि। बीजगणित में × चिह्न का प्रयोग न करके इसके स्थान पर साधारणतः एक विन्दु (·) का प्रयोग किया जाता है। बहुधा '×' या '·' इनमें से किसी भी एक का प्रयोग किया जाता है; जैसे, $x \times y$, $x \cdot y$ और xy इन तीनों प्रकार से x और y का गुणनफल प्रदर्शित किया जाता है।

टीका 1—गुणन के चिह्न के सम्बन्ध में अङ्कगणित और बीजगणित में बड़ा अन्तर है। अङ्कगणित में दो अङ्कों 2 और 5 को पास पास लिखने से 25 होता है और इसके द्वारा 2 दहाई और 5 इकाई से मिलकर बनी हुई संख्या का बोध होता है, परन्तु बीजगणित में यदि दो अङ्क x और y पास पास रहें तो x गुणित y अर्थात् x और y के गुणनफल का बोध होगा। जिस संख्या का पहला अङ्क x और दूसरा अङ्क y हो उसका अर्थ x दहाई से युक्त y होता है। यह $10x+y$ लिखा जाता है। अङ्कगणित के समान केवल xy लिखकर वह नहीं सूचित किया जासकता। x और y के 0 से 9 तक भिन्न भिन्न मान स्वीकार करके $10x+y$ से 1 से लेकर 99 तक की कोई भी संख्या प्रकट की जासकती है।

टीका 2—जब किसी अक्षर को किसी अङ्क के द्वारा गुणा किया जाता है तो अङ्क को पहले लिखकर अक्षर को बाद में लिखते हैं; जैसे, $x \times 2$ को $2x$ लिखते हैं, $x2$ नहीं लिखते। स्मरण रखना चाहिए कि $2 \times x$, $2 \cdot x$ एवम् $2x$ द्वारा एक ही राशि प्रकट होती है।

10. भाग चिह्न (÷).

दो संख्याओं के बीच में '÷' यदि हो, तो समझना चाहिए कि पहली संख्या को दूसरी से भाग देना होगा; जैसे, $x \div y$, इससे सूचित होता है 'x भागे y'। इसका अर्थ यह है कि x के द्वारा सूचित संख्या को y द्वारा

सूचित संख्या से भाग देना होगा। यदि x का मान 12 और y का मान 3 हो, तो $x \div y$ का मान $12 \div 3$ अर्थात् 4 होगा; किन्तु $x \div y$ द्वारा और भी व्यापक भाव से ज्ञात होता है कि x और y का मान ऐसी कोई भी दो संख्याएँ स्वीकार की जासकती हैं जिनका भागफल 4 हो; जैसे, $x=16$, और $y=4$; $x=32$, $y=8$ आदि।

टीका 1—भाज्य और भाजक को क्रमशः एक रेखा के ऊपर और नीचे लिखने से भाग की क्रिया प्रकट होती है; जैसे, $\frac{x}{y}$ या x/y; '/' चिह्न को (Solidus) कहते हैं।

टीका 2—$+$, $-$, $\times$, $\div$ चिह्नों को गणित सम्बन्धी क्रिया सूचक चिह्न (Signs of Operation) कहते हैं।

11. समानता का चिह्न ('=' Sign of Equality).

दो संख्याओं के बीच में जब '=' होता है तो उससे सूचित होता है कि इन दोनों संख्याओं का मान (Value) परस्पर समान है; जैसे, $x=y$, इसमें 'x के समान y' पढ़ना होता है। इसका अर्थ यह है कि x के द्वारा सूचित संख्या y द्वारा सूचित संख्या के समान है। यदि $x=3$ है, तो $y=3$ होगा। इस प्रकार $x=y+z$ से ज्ञात होता है कि x द्वारा सूचित संख्या y और z द्वारा सूचित संख्याओं के योग के समान है।

दो राशि अभिन्न या हर प्रकार से समान (identically equal)—यह बोध कराने के लिये '$\equiv$' यह चिह्न उपयोग में लाया जाता है; जैसे, $x+1 \equiv \frac{1}{2}(2x+2)$ से सूचित होता है कि x का चाहे कोई भी मान हो वह $x+1$ और $\frac{1}{2}(2x+2)$ का मान सदा समान होगा। '$\equiv$' को अभेद चिह्न (Sign of Identity) कहते हैं।

12. अन्यान्य चिह्न।

ऊपर लिखे हुए चिह्नों के अतिरिक्त अङ्कगणित और बीजगणित में '$>$', '$<$', '$\ngtr$', '$\nless$', '$\neq$', '$\sim$' और '$\pm$' आदि और भी कई चिह्न उपयोग में लाये जाते हैं; जैसे, '$x>y$' से सूचित होता है कि x से सूचित संख्या y से सूचित संख्या की अपेक्षा बड़ी है। '$x<y$' से सूचित होता है कि x से सूचित संख्या y से सूचित संख्या की अपेक्षा बड़ी नहीं है। '$x \ngtr y$' से सूचित होता है कि x से सूचित संख्या y से सूचित संख्या की

अपेक्षा बड़ी नहीं है (समान अथवा छोटी है)। इसी प्रकार '$x \not< y$' से सूचित होता है कि y की अपेक्षा x छोटा नहीं है (या तो बड़ा है या समान है)। '$x \neq y$' से ज्ञात होता है कि x और y एक दूसरे के समान नहीं हैं।

दो राशियों के बीच '$\sim$' वर्तमान रहने पर बड़ी राशि में से छोटी राशि के अन्तर का बोध होता है; जैसे, $3 \sim 8$ से 8 में से 3 के अन्तर अर्थात् 5 का बोध होता है। इसी प्रकार '$x \sim y$' से x और y का अन्तर सूचित होता है।

'$\pm$' चिह्न के द्वारा योग और अन्तर सूचित होता है और इस चिह्न '$\mp$' द्वारा अन्तर और योग सूचित होता है; जैसे, $8 \pm 3 = 8 + 3$ या $8 - 3$ अर्थात् 11 या 5 और $8 \mp 3 = 5$ या 11.

इनके अतिरिक्त 'चूँकि' शब्द के स्थान पर '$\because$' और 'इसलिए' के स्थान पर '$\therefore$' चिह्न काम में लाया जाता है।

13. उदाहरण।

(1) यदि A के पास 3 रुपये और B के पास 4 रुपये हों, तो उन दोनों के पास मिलाकर $3+4$ रुपये हैं। इस प्रकार यदि A के पास x रुपये हों और B के पास y रुपये हों, तो उन दोनों के पास मिलाकर $x+y$ रु० होंगे।

(2) एक थैली में 50 रुपये हैं उनमें से यदि 10 रु० निकाल लिये जायँ तो उसमें $50-10$ रु० या 40 रु० बच रहेंगे। इस प्रकार यदि किसी थैली में x रु० हों और उसमें से y रु० निकाल लिए जायँ तो थैली में $x-y$ रु० रह जायँगे।

(3) यदि 10 आदमियों में से हर एक को 5 नारंगियाँ दी जायँ, तो कुल मिलाकर 5×10 या 50 नारंगियों की ज़रूरत पड़ेगी। इस प्रकार यदि आदमियों की संख्या y हो और प्रत्येक को x नारंगियाँ दी जायँ तो कुल मिलाकर $x \times y$ या xy नारंगियाँ चाहिये।

(4) यदि 100 सेब 20 लड़कों में बराबर बराबर बाँटे जायँ तो उनमें से हर एक लड़के को $\frac{100}{20}$ या 5, 5 सेब मिलेंगे। इस प्रकार यदि y लड़कों में x सेब बराबर बराबर बाँटे जायँ, तो प्रत्येक बालक को $\frac{x}{y}$ सेब मिलेंगे।

(5) यदि $x=y$ है और x का मान 5 है, तो y का मान भी 5 होगा।

(6) $x=2$ होने पर $5x=5\times2=10$ होगा।

(7) $a=3$ और $b=4$ होने पर $6ab$ का मान $=6\times a\times b$ $=6\times3\times4=72$.

(8) जब $x>y$ और $y=3$ हो, तो x द्वारा किसी ऐसी संख्या का बोध होता है जो 3 से बड़ी हो।

(9) यदि $a<b$ और $b=7$ हो, तो a से किसी ऐसी संख्या का बोध होता है जो 7 से छोटी हो।

(10) यदि $p\neq q$ और $p=5$ हो, तो q द्वारा 5 के अतिरिक्त और किसी भी संख्या का बोध हो सकता है।

(11) $x+1$, $x+2$,......के द्वारा x के निकटतम बाद की पूर्ण संख्याएँ (Integers) और $x-1$, $x-2$...... द्वारा x के निकटतम पूर्ववर्ती पूर्ण संख्याएँ सूचित होती हैं।

प्रश्नावली 1.

यदि $x=2$ और $y=3$ हो, तो निम्नलिखित राशियों का मान बताओ:—

1. $x+y$; $y-x$; xy; $\frac{x}{y}$.

2. $x+2y$; $2x+y$; $3x+2y$; $3x-2y$.

3. $\frac{2x}{y}$; $\frac{x+y}{x}$; $\frac{y-x}{y}$; $\frac{5x-y}{xy}$.

4. x का मान यदि 3 हो, तो $5+x$ और $5x$ का अन्तर क्या होगा?

5. यदि $a=5$ और $b=3$ हो, तो $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{a-b}{a+b}$ और $\frac{a+b}{ab}$ का मान कितना होगा?

6. यदि एक राशि p से दूसरी राशि q घटानी हो, तो उसे किस प्रकार लिखोगे? यदि $p=25$ और $q=13$ हो, तो p और q का अन्तर क्या होगा?

7. यदि $a+b=c$ और $a=6$, $b=9$ हो, तो c का मान बताओ।

8. यदि $x=6$ और $y=5$ हो, तो x और y द्वारा सूचित 65 संख्या को किस प्रकार लिखोगे ? xy का मान क्या होगा ?

9. 60 नारंगियों को x बालकों में बराबर बराबर बाँटने पर प्रत्येक बालक को कितनी नारंगियाँ मिलेंगी ?

10. एक अलमारी में 20 पुस्तकें हैं; उसमें से यदि y पुस्तकें निकाल ली जायँ तो अलमारी में कितनी पुस्तकें रह जायँगी ?

14. गुणनफल (Product).

दो या दो से अधिक संख्याओं को परस्पर गुणा करने से जो संख्या प्राप्त होती है वह इन संख्याओं का **गुणनफल** (Product) कहलाती है और उक्त संख्याएँ गुणनफल की उत्पादक या **गुणनखण्ड** (Factor) कहलाती हैं; जैसे,

$a \times x$ अर्थात् ax को a और x इन दो संख्याओं का गुणनफल कहते हैं। a और x को उक्त गुणनफल ax का उत्पादक या गुणनखण्ड कहेंगे। इस प्रकार 3, a और b इन तीन संख्याओं में से प्रत्येक उनके गुणनफल $3ab$ के गुणनखण्ड हैं।

15. गुणक (Co-efficient).

बीजगणित सम्बन्धी किसी राशि के पहले यदि कोई राशि गुणनखण्ड के रूप में वर्तमान होती है तो बादवाली राशि को पहलीवाली राशि का गुणक (Co-efficient) कहते हैं; जैसे, $2a$ का अर्थ यह है कि a को 2 से गुणा किया गया है। इस स्थान पर 2, a का गुणक कहलायेगा। इसी प्रकार $3xyz$ राशि में xyz का गुणक 3, yz का गुणक $3x$ और z का गुणक $3xy$, इत्यादि।

इससे ज्ञात होता है कि 'गुणक' शब्द का प्रयोग यहाँ व्यापक अर्थ में किया जाता है और किसी भी गुणनफल का कोई भी गुणक, शेष गुणयों के गुणनफल का 'गुणक' कहा जा सकता है।

जो गुणक केवल एक संख्या हो उसे **संख्यात्मक गुणक** या **अंक गुणक** (Numerical Co-efficient) कहते हैं और जो गुणक संख्यात्मक

नहीं होता उसे आक्षरिक गुणक (Literal Co-efficient) कहते हैं; जैसे, $3xy$ में xy का अंक गुणक 3 है, किन्तु ax में x का आक्षरिक गुणक a है।

टीका—जब किसी बीजगणित सम्बन्धी राशि से पहले कोई 'संख्यात्मक गुणक' नहीं रहता, तब यह अनुमान करना चाहिए कि 1 ही उस राशि का संख्यात्मक गुणक है; जैसे, a का गुणक 1 मान लेना होगा, किन्तु यह सर्वदा अनुमेय रहेगा।

16. संलग्न गुणनफल (Continued Product).

जब किसी एक संख्या x को किसी दूसरी संख्या y के द्वारा गुणा किया जाता है और प्राप्त हुए गुणनफल xy को और किसी तीसरी संख्या z के द्वारा गुणा किया जाता है तब अन्त में आनेवाले गुणनफल को x, y और z इन तीनों राशियों का **संलग्न गुणनफल** (Continued Product) कहते हैं और इसको '$x\times y\times z$' के रूप में लिखते हैं। x, y और z में से प्रत्येक को उक्त संलग्न गुणनफल का **गुणनखण्ड** (Factor) कहते हैं; जैसे,

यदि $x=2$, $y=3$ और $z=4$ हो तो $xyz=2\times3\times4=24$ और $5xyz=5\times2\times3\times4=120$; इसी प्रकार तीन व अधिक राशियों का संलग्न गुणनफल भी निकाला जासकता है; जैसे, $abcd\ldots\ldots\ldots=a\times b\times c\times d\times\ldots\ldots$; $a, b, c, d,\ldots\ldots\ldots$ अक्षरों में से प्रत्येक $a, b, c, d,\ldots\ldots\ldots$ गुणनफल के गुणनखण्ड हैं।

इन गुणनखण्डों को किसी भी क्रम (Order) से लिख सकते हैं, परन्तु साधारणतः ये वर्णमाला के क्रम के अनुसार ही लिखे जाते हैं।

17. घात (Power), घातांक (Index, Exponent).

जब किसी गुणनफल के गुणनखण्ड परस्पर समान होते हैं अर्थात् किसी राशि को उक्त राशि के द्वारा ही एक से अधिक बार गुणा किया जाता है तब जो गुणनफल होता है उसे उक्त राशि का **घात** (Power) कहते हैं; जैसे, $a\times a$, $a\times a\times a$, $a\times a\times a\times a$, ... इनमें से प्रत्येक a का एक घात है।

$a\times a$ गुणनफल को a का वर्ग (Square) या **द्विघात** कहते हैं, और $a\times a=a^2$ लिखते हैं।

$a \times a \times a$ गुणनफल को a का **घन** (Cube) अथवा **'त्रिघात'** कहते हैं और $a \times a \times a = a^3$ लिखते हैं।

इसी प्रकार $a \times a \times a \times a = a^4$ को a का **'चतुर्घात'** कहते हैं।

किसी राशि के घात में कितने गुणनखण्ड लिये गये हैं यह प्रकट करने के लिए उक्त राशि के ऊपर दाहिनी ओर जो सूक्ष्म अंक या चिह्न उपयोग में लाया जाता है वह इस घात का 'सूचक' अथवा घातांक (Index, Exponent) है; जैसे, 2, 3, 4, आदि क्रम से a^2, a^3, a^4 आदि राशियों के 'घात सूचक अथवा घातांक' हैं।

$x \times x \times x \times x$ आदि n संख्यक गुणनखण्ड को लेकर जो गुणनफल प्राप्त होता है उसे x^n लिखते हैं और उसे x का nघात कहते हैं।

टीका 1—किसी राशि को उसके किसी भी घात का **मूल** (Base) कहते हैं। कोई राशि स्वयं अपना प्रथम घात है; जैसे, a का प्रथम घात a^1 है; परन्तु लिखने में इसे केवल a ही लिखते हैं। 1 अंक की कल्पना कर ली जाती है।

टीका 2—किस गुणनफल (Product) के गुणनखण्डों में से कौनसा कितनी बार लिया गया है यह ऊपर के नियम के अनुसार बहुत संक्षेप में लिखा जासकता है; जैसे, $a \times a \times b \times b \times b$ गुणनफल को संक्षेप में a^2b^3 के रूप में लिख सकते हैं। इसी प्रकार $x \times x \times y \times y \times y \times z$ को x^2y^3z के रूप में लिखते हैं। यहाँ z के सूचक (घातांक) 1 की कल्पना करनी होगी।

टीका 3—प्रारम्भिक विद्यार्थी को **गुणक** (Co-efficient) और घातांक (Index) का भेद विशेष रूप से स्मरण रखना चाहिए।

$2x$ और x^2 एक ही राशि नहीं हैं। $2x$ के द्वारा $2 \times x$ का बोध होता है, परन्तु x^2 से $x \times x$ समझना होगा। इसी प्रकार $2a^4$ और $4a^2$ एक ही राशि नहीं है। कारण $2a^4 = 2 \times a \times a \times a \times a$ किन्तु $4a^2 = 4 \times a \times a$. यदि $a = 3$ हो, तो $2a^4 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 162$, किन्तु $4a^2 = 4 \times 3 \times 3 = 36$.

18. परिमाण (Dimension), मान (Degree).

जितने अक्षरों को गुणा करने से एक गुणनफल प्राप्त होता है उनमें से प्रत्येक अक्षर को उक्त गुणनफल का एक एक **परिमाण** (Dimension) कहते हैं; और उक्त गुणनफल में जितने अक्षर होते हैं उनकी सम्मिलित संख्या को उक्त गुणनफल का **घात या मान** (Degree) कह सकते हैं। इसलिए देखने में आता है कि किसी गुणनफल में जितने भी घात (Powers) होते हैं उन सबके घात-सूचकों के समूह को उक्त गुणनफल का घात या मान कहते हैं; जैसे, $a^2b^3xy^4$ गुणनफल में $a\times a\times b\times b\times b\times x\times y\times y\times y\times y$, अर्थात् दस अक्षर गुणा किये गये हैं। इनमें से प्रत्येक अक्षर का एक एक परिमाण है और उन सब का सूचक-समूह 'दस' उक्त गुणनफल का मान है। कारण $2+3+1+4=10$. अतएव इसका 10 मान है और यह एक दशम मान की राशि है। इसी प्रकार $3ab^3c^4x^2y$ का 11 मान है और यह एक एकादश मान की राशि है।

टीका 1—किसी गुणनफल का परिमाण और मान निर्धारित करते समय उसका संख्यात्मक (Numerical) गुणक नहीं ग्रहण किया जाता; जैसे, $2x^3$ का परिमाण 3 है और यह एक तृतीय मान की राशि है। $5a^3b^4$ का परिमाण 7 है और यह एक सप्तम परिमाण की राशि है। परिमाण और मान का निर्णय करते समय 2 और 5 को नहीं ग्रहण किया गया।

टीका 2—किसी विशेष अक्षर के सम्बन्ध में भी किसी गुणनफल का परिमाण अथवा मान निर्धारित किया जाता है; जैसे, $a^2b^3x^4y^5$ गुणनफल का परिमाण a के अनुसार 2, b के अनुसार 3 और x के अनुसार 4 और y के अनुसार 5 है।

टीका 3—एक गुणय यदि शून्य (0) हो, तो अन्यान्य गुणय चाहे जो हो गुणनफल शून्य ही होगा; जैसे, $x=0$ होने पर a और y का मान चाहे कुछ ही क्यों न हो $a^2x^3y^4=0$ होगा।

उदाहरण। $6a^2b^3x^2y$ का परिमाण बताओ, यदि $a=2$, $b=3$, $x=4$, $y=5$ हो। इनका मान (Value) कितना होगा?

यहाँ इष्ट परिमाण $=2+3+2+1=8$; इसलिए यह एक अष्टम मान की राशि है, और

$$\text{मान} = 6a^2b^3x^2y = 6\times a^2\times b^3\times x^2\times y$$
$$= 6\times 2^2\times 3^3\times 4^2\times 5$$
$$= 6\times 4\times 27\times 16\times 5$$
$$= 51840.$$

19. मूल (Root).

यदि एक राशि का घात कोई दूसरी राशि हो, तो बाद में आनेवाली राशि पहलेवाली राशि का **मूल** (Root) कहलाता है; जैसे, मान लो कि a राशि b राशि का एक घात है, तो b राशि a राशि का एक मूल है; जैसे,

2, 4 का वर्गमूल है। कारण 4, 2 का द्वितीय घात है। a राशि a^2 का वर्गमूल है। कारण a^2, a का एक घात है। 2, 8 का घनमूल है। कारण 8, 2 का तृतीय घात है। x राशि x^3 का घनमूल है। कारण x^3 का x तृतीय घात है। a राशि a^n का nवाँ मूल है। कारण a^n, a का nवाँ घात है।

वर्गमूल साधारणतः '$\sqrt{}$' चिह्न द्वारा प्रकट किया जाता है। इसे **'मूल चिह्न'** (Radical Sign) कहते हैं। 4 का वर्गमूल $\sqrt{4}$ लिखा जाता है और 'वर्गमूल 4' पढ़ा जाता है।

घनमूल, चतुर्थमूल, पंचममूल आदि क्रम से $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ लिखे जाते हैं; जैसे, a का घनमूल $\sqrt[3]{a}$, x का nवाँ मूल $\sqrt[n]{x}$.

1 ही 1 का हरएक घात है। इसलिए 1 ही 1 का हरएक मूल भी है; जैसे, $\sqrt[3]{1}=1$, $\sqrt[4]{1}=1$ आदि। 0 का कोई भी मूल 0 ही होगा।

टीका 1—'$\sqrt{}$' चिह्न को साधारणतः 'मूल चिह्न' कहते हैं। यह चिह्न (Radic) शब्द के प्रथम अक्षर 'r' का अपभ्रंश कहलाता है।

टीका 2—कभी एक मात्रा के द्वारा (रेखा) मूल चिह्न को फैलाकर किसी सम्पूर्ण राशि का मूल सूचित किया जाता है। जैसे $\sqrt{xy}$ द्वारा ज्ञात होता है कि x और y के गुणनफल का वर्गमूल लेना होगा। किन्तु $\sqrt{x}y$ द्वारा ज्ञात होता है कि x के वर्गमूल को y के द्वारा गुणा करना होगा। इसी प्रकार $\sqrt{a}+b$ और $\sqrt{a+b}$ एक ही राशि नहीं हैं। $\sqrt{a}+b$ के द्वारा a के वर्गमूल के साथ b के जोड़ने की क्रिया ज्ञात होती है किन्तु $\sqrt{a+b}$ द्वारा a और b के योगफल का वर्गमूल निकालने का अर्थ सूचित होता है।

उदाहरण 1. यदि $a=9$ और $b=16$ हो, तो $\sqrt{ab}$ और $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ का मान (Value) बतलाओ।

यहाँ $ab=9\times 16=144$. $\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{144}=12$;

और $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$.

उदाहरण 2. यदि $x=4$ और $y=25$ हो, तो नीचे लिखी हुई दोनों राशियों का मान कितना होगा?

(*i*) $2\sqrt{xy}-\sqrt{y}$;   (*ii*) $y\sqrt{x}-x\sqrt{y}$.

$$(i)\quad 2\sqrt{xy}-\sqrt{y}=2\sqrt{4\times 25}-\sqrt{25}=2\sqrt{100}-\sqrt{25}$$
$$=2\times 10-5=15.$$

$$(ii)\quad y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=25\sqrt{4}-4\sqrt{25}=25\times 2-4\times 5$$
$$=50-20=30.$$

उदाहरण 3. यदि $a=4$ और $b=5$ हो, तो $\sqrt{a^3b^4}$ का मान बताओ।

$$a^3b^4=4\times 4\times 4\times 5\times 5\times 5\times 5$$
$$=64\times 25\times 25$$
$$=8\times 25\times 8\times 25$$
$$=8^2\times 25^2$$

$$\therefore \sqrt{a^3b^4}=\sqrt{8^2\times 25^2}=8\times 25=200.$$

प्रश्नावली 2.

यदि $a=2, b=3,$ और $x=4$ और $y=6$ हो, तो नीचे लिखी हुई राशियों का मान बताओ :—

1. $a^2; 3b^2; 2y^3; x^2+y^2.$
2. $2a^2x; 4abxy; 2x+3a; 2y+b^2; a^2+2b^2.$
3. $ax^2; by^2; ax+by; ay-bx; a^2y^2-b^2x^2.$
4. $a^3+x^3; 4a^3; x^3y; xy^3, b^3x.$
5. $a^4x; b^3y; ab+x; ab-ax; xy+ay.$

यदि $x=4$ और $y=9$ हो, तो नीचे लिखी हुई राशियों का मान बताओ :—

6. $\sqrt{x}; \sqrt{y}; \sqrt{x}+\sqrt{y}; \sqrt{y}-\sqrt{x}; 2\sqrt{x}.$
7. $3\sqrt{x}; x\sqrt{y}; 5\sqrt{x}+2\sqrt{y}; 3\sqrt{y}-2\sqrt{x}.$
8. $\sqrt{xy}, x+\sqrt{y}; x-\sqrt{y}; \sqrt{x^2+y}.$

यदि $a=3, b=5, c=1$ और $x=2$ हो, तो नीचे लिखी हुई राशियों का मान बताओ :—

9. $a+b+c, ax+b+c.$
10. $a^2x+b^2c, a^2x+a^2b^2c, abc.$
11. $\frac{2a}{x}, \frac{5c}{b}, \frac{a}{3c}+x, \frac{2b}{x}-3c.$
12. $\sqrt{2cx}+a, 2a+b-c; ab-\sqrt{8x}.$
13. $2^a, 5^x, a^x, x^a.$
14. $\frac{x}{c^2}, \frac{a}{cx}, \frac{bx}{5c}.$
15. a, b, c और x का ऊपर लिखा हुआ मान होने पर सिद्ध करो कि $7x>bc; 9a<4bx.$
16. $7x^3y^4z^2$ राशि का मान बताओ।
17. इन राशियों का मान बताओ। इनमें से कौन कौनसी राशियाँ एक ही मान (Degree) की हैं ?
    $a^2bc, 2a^2b^2c^2, 3abc^2, 4abc^4.$

20. **बीजगणित सम्बन्धी राशिमाला** (Algebraic Expressions).

$+$, $-$, $\times$ और $\div$ आदि क्रियासूचक चिह्नों द्वारा संयुक्त अंकों और संकेतों के किसी भी अर्थ का बोध करानेवाले समावेश को **बीजगणित सम्बन्धी राशिमाला** (Algebraic Expression) कहते हैं। इस प्रकार के समावेश को कभी कभी **'बीजीय राशि'** (Algebraic Quantity) कहते हैं। इसको संक्षेप में **राशि** (Quantity) भी कहते हैं।

किसी बीजगणितीय राशिमाला के जो सब अंश केवल योग या अन्तर के चिह्नों से युक्त होते हैं (गुणन अथवा भाग के चिह्नों के द्वारा नहीं) उनमें से प्रत्येक को उक्त राशिमाला का पद (Term) कहते हैं।

$\times$ और $\div$ चिह्न द्वारा युक्त राशियों का केवल एक पद लिया जाता है। जैसे,

$a+b$ एक राशिमाला है। a और b इसके दो पद हैं। इसी प्रकार $ax-by$ राशिमाला के ax और by यह दो पद हैं। $a\times b+c\div d-2ax$ एक राशिमाला है। इसमें केवल तीन पद हैं। $a\times b$ एक पद, $c\div d$ दूसरा पद और $2ax$ तीसरा पद है।

टीका—किसी पद के पहले यदि कोई चिह्न नहीं होता, तो उससे पहले योग के चिह्न '$+$' की कल्पना करली जाती है।

21. **धन और ऋण पद** (Positive and Negative Terms).

जिन समस्त पदों के पहले '$+$' चिह्न रहता है उन सबको **धन-पद** (Positive Terms) और जिनके पहले '$-$' चिह्न होता है उनको **ऋण-पद** (Negative Term) कहते हैं। राशिमाला के प्रथम पद के पहले साधारणतः कोई भी चिह्न वर्तमान नहीं रहता। उसके पहले सदा एक योग चिह्न की कल्पना करली जाती है। जैसे,

'$x-y$' इस राशिमाला के दो पद हैं। $(+)x$ धन-पद है और $(-)y$ ऋण-पद है। इसी प्रकार $ab-3c-4d\div e$ राशिमाला के तीन पद हैं। इनमें से $+ab$ धन-पद और $-3c$ तथा $-4d\div e$ यह दो ऋण-पद हैं।

22 सजातीय व विजातीय पद (Like and Unlike Terms).

जितने भी पद होते हैं वे दो भागों में विभक्त हो सकते हैं—सजातीय और विजातीय । जब दो पदों में कोई भिन्नता नहीं होती, अथवा केवल उनके संख्यावाचक गुणक ही दो भिन्न भिन्न होते हैं, तो वे 'सजातीय पद' कहलाते हैं अन्यथा 'विजातीय पद' कहलाते हैं । जैसे, $2x$ और $3x$ ये दोनों 'सजातीय पद' हैं । इसी प्रकार $5ab$ और $9ab$ दोनों सजातीय पद हैं । किन्तु $2x$ और $3y$ 'सजातीय पद' नहीं हैं । इसी प्रकार ax और by दो विजातीय पद हैं । इससे सरलतापूर्वक यह ज्ञात हो जाता है कि दो सजातीय पदों का योग और अन्तर फल भी एक सजातीय पद होता है । जैसे, $2x+3x=5x$, $9ab-5ab=4ab$, आदि ।

टीका 1—एक ही अक्षर के भिन्न भिन्न घात (Power), जैसे, x तथा x^2, ये सजातीय पद नहीं हैं । इसी प्रकार $3a$ और a^3 दोनों पद भी सजातीय नहीं हैं ।

टीका 2—विजातीय पद योग या अन्तर चिह्न के द्वारा संयुक्त होकर एक पद नहीं हो सकते । जैसे, $2x$ के साथ $3y$ का योग करने पर $2x+3y$ (एक राशिमाला) होगा—एक पद नहीं होगा ।

23 सरल और मिश्र व्यंजक (राशिमाला) (Simple and Compound Expressions).

जिस राशि में केवल एक पद (Term) रहता है अर्थात् एक से अधिक अंश + या − चिह्न द्वारा संयुक्त नहीं रहता उसे सरल व्यंजक (राशिमाला) या सरल राशि कहते हैं । इसे एक पद राशिमाला (Monomial Expression) अथवा संक्षेप में एक-पद (Monomial) भी कहते हैं । जैसे, $2x$, $3ab$, $4a^2bx$, $6a^3b^2x^4y^2$ इनमें से प्रत्येक एक-पद हैं ।

जिस किसी राशि में एक से अधिक पद '+' अथवा '−' चिह्न द्वारा संयुक्त हों वह मिश्र व्यंजक (Compound Expression) कहलाता है; जैसे, $ax+by$, $2a-3b+4c$ आदि । किसी मिश्र राशि में यदि केवल दो पद होते हैं तो वह द्विपद (Binomial) राशि अथवा संक्षेप में द्विपद (Binomial) कहलाती है; जैसे, $a+b$, $ax-by$ आदि। किसी मिश्र राशि में

तीन पद होने पर वह त्रिपद (Trinomial) कहलाती है; जैसे, $a+b+c$, $x+2y-3z$ आदि। किसी मिश्र राशि में यदि तीन से अधिक पद हों तो वह बहुपद (Multinomial) अथवा (Polynomial) कहलाती है। यथा $a+bc-dx+xyz$ एक बहुपद राशि है।

24. राशिमाला का परिमाण (Dimension or Degree of an Expression).

किसी मिश्र राशि के पद यदि भिन्न-भिन्न परिमाण के हों, तो जिस पद का परिमाण सबसे अधिक होता है उसी का परिमाण उस मिश्र राशि का परिमाण कहलाता है। यदि समस्त पदों का परिमाण एक ही हो, तो वह मिश्र राशि समघाती (Homogeneous) कहलाती है; जैसे, $a+bx+cxy+dxyz$ मिश्र राशि में परिमाण की संख्या चार है। बात यह है कि इसका '$dxyz$' पद सबसे उच्च '4' परिमाण से युक्त है। इसी प्रकार $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ एक समघाती मिश्र राशि है। कारण इसके प्रत्येक पद का परिमाण 3 है। इसी प्रकार राशिमाला के मान का प्रश्न उदय होने पर उस राशिमाला में जितने पद हों उन सबमें जिस पद का मान सबसे अधिक होगा राशिमाला का भी वही मान समझना चाहिये; जैसे, $ba^2+3a^2b+7a^5-2ab$ एक पंचम मान की राशिमाला है।

टीका—मिश्र राशि के किसी निर्दिष्ट अक्षर अथवा अक्षर-समूह की माला के अनुसार भी उक्त राशि का परिमाण निर्धारित किया जाता है और राशि के पदों को उक्त अक्षर या अक्षर-समूह के घात के आरोह-क्रम (Ascending Order) या अवरोह-क्रम (Descending Order) से सजाकर लिखा जासकता है; जैसे, x के मान के अनुसार ax^2+bx+c राशि का मान 2 है और यह x के घात के अवरोह-क्रम से सजाया गया है।

25 किसी अक्षर के घात के आरोह-क्रम या अवरोह-क्रम से सजाई गई मिश्र राशि (Expression arranged according to Ascending or Descending Power of a letter).

यदि किसी मिश्र राशि की पदावली एक ही अक्षर के भिन्न भिन्न घातों से युक्त हो और वह पदावली इस प्रकार सजाई गई हो कि सबसे अधिक घातों से युक्त पद सबसे पहले बाईं ओर हो, उससे नीचेवाले घात से युक्त

पद उसके दाहिनी ओर हो और इसी क्रम से सबसे नीचेवाले घात से युक्त पद अथवा उक्त अक्षर से वर्जित अचल (Constant) पद सबसे अन्त में लिखा हुआ हो, तो उक्त राशि को उक्त अक्षर के अवरोह-क्रम (Descending Order) से सजाया गया है समझना होगा।

परन्तु यदि पदावली विपरीत क्रम से लिखी हुई हो, तो राशि को आरोह-क्रम से लिखी हुई समझना होगा; जैसे, $a^2x^4+4a^3x^3y+6a^4x^2y^2+4a^5xy^3+a^6y^4$ राशि को x के घात के अवरोह-क्रम से किन्तु a अथवा y के घात के आरोह क्रम से लिखा गया है। इन पदों को विपरीत क्रम से लिखने पर $a^6y^4+4a^5xy^3+6a^4x^2y^2+4a^3x^3y+a^2x^4$ होगा और यह x के घात के आरोह-क्रम और a अथवा y के घात के अवरोह-क्रम से लिखा गया है।

26. कोष्ठक (Brackets).

अङ्कगणित के समान बीजगणित में भी '( )', '{ }', '[ ]' यह तीन चिह्न क्रम से छोटा, मझला, बड़ा कोष्ठ (Brackets) कहलाते हैं। जब किसी राशिमाला के एक से अधिक पदों को एक ही राशि में गिनना हो, तो उन पदों को किसी कोष्ठ में रख देना होता है। इस प्रकार कोष्ठ के अन्तर्गत वर्तमान पदों को राशि का केवल एक ही पद समझना चाहिए; जैसे, $(a+b)c$ के द्वारा सूचित होता है कि c द्वारा सूचित राशि से '$a+b$' केवल एक राशि अर्थात् a और b के योग को गुणा करना होगा। यहाँ $(a+b)$ को एक-पद राशि समझना चाहिए किन्तु यदि कोई कोष्ठ न हो तो $a+bc$ राशि एक द्विपद राशि होगी और इसके द्वारा यह ज्ञात होगा कि b और c के गुणनफल को a के साथ जोड़ना चाहिए।

इसी प्रकार $a+(b+c)x$ एक द्विपद राशि है। a और $(b+c)x$ इसके दो पद हैं। यदि कोष्ठ न होता तो $a+b+cx$ एक त्रिपद राशि होती और a, b और cx इसके तीन पद होते।

कभी कभी कोष्ठ के स्थान पर एक बड़ी रेखा काम में लाई जाती है अर्थात् जिन पदों को केवल एक राशि के रूप में मानना होता है उन सबके ऊपर एक बड़ी सी रेखा खींच दी जाती है। यह 'रेखा-कोष्ठक' (Vinculum) कहलाती है; जैसे, $x-\overline{y-z}$ और $x-(y-z)$ इन दोनों ही के द्वारा एक ही राशि का बोध होता है। यहाँ $\overline{y-z}$ को केवल एक ही पद समझना होगा।

टीका 1—कोष्ठक कभी कभी एकत्रीकरण चिह्न (Symbol of Aggregation) कहलाता है।

टीका 2—$\sqrt{x}+y$, $\sqrt{(x+y)}$ और $\sqrt{x+y}$ का परस्पर भेद स्मरण रखो। पहले के द्वारा सूचित होता है कि x के वर्गमूल के साथ y को जोड़ना होगा परन्तु दूसरी तथा तीसरी के द्वारा x और y के योग के वर्गमूल का बोध होता है।

उदाहरण 1. यदि $a=1, b=2, c=3, d=1, x=4$ और $y=5$ हो, तो $a+b\{x+(c+y)d\}$ राशि का मान बताओ।

यहाँ $c+y$ को एक राशि समझना चाहिए। इसका मान $3+5$ अर्थात् 8 है;

और $x+(c+y)\,d$ को भी एक राशि मानना होगा।

और $x+(c+y)d=4+(3+5)\times 1$

$=4+8=12;$

$\therefore\ a+b\{x+(c+y)d\}=a+b\times 12$

$=1+2\times 12=25.$

ध्यान रखना चाहिए कि यदि कोष्ठ न होता, तो $a+bx+c+dy$ एक 'बहुपद राशि' होती।

उदाहरण 2. यदि $x=9$ और $y=16$ हो, तो $\sqrt{x}+y$ और $\sqrt{(x+y)}$ का मान बताओ।

यहाँ $\sqrt{x}+y=\sqrt{9}+16=3+16=19;$

और $\sqrt{(x+y)}=\sqrt{(9+16)}=\sqrt{25}=5.$

27. फल (Functions).

किसी भी अक्षर से युक्त राशि या व्यंजक को उस अक्षर का फल कहा जासकता है; जैसे, x, $3x+2$, $3x^2+2x+1$ तीन राशियाँ x ही के फल हैं। इस प्रकार x^2+xy+y^2 राशि x और y का फल है। $x^3+y^3+z^3-3xyz$ राशि x, y और z का फल है।

किसी भी फल के अक्षरों को उसका चल (Variables) कहते हैं। ऊपर के फलों में x, y और z आदि प्रत्येक के एक-एक चल हैं।

टीका—x के किसी फल को सक्षेप में $f(x)$ अथवा $\phi(x)$ लिखते हैं ।

28 क्रियावाचक चिह्नों का क्रम (Order of Operation).

बहुपद राशिमाला (Polynomial) का मान (Value) निर्धारित करते समय क्रियावाचक चिह्नों का क्रम गणित के नियमों के अनुसार ही हुआ करता है, अर्थात् जब केवल '+' और '−' चिह्न अथवा '×', '÷' चिह्न वर्तमान रहते हैं तो क्रम से बाईं ओर से क्रिया करनी होती है । यदि +, −, × और ÷ ये चारों ही चिह्न वर्तमान होते हैं, तो पहले गुणा और भाग की क्रिया करके तब बाईं ओर से क्रमशः योग और अन्तर की क्रिया करनी होती है ।

बहुपद (Polynomial) के प्रत्येक पद का मान निर्धारित करके इस नियम के अनुसार सम्पूर्ण बहुपद का मान निकालना चाहिए ।

टीका—जहाँ '×' के चिह्न की कल्पना अपेक्षित हो अथवा भाग के चिह्न के स्थान पर भाग सूचक '—' या '/' (जैसे $\frac{a}{b}$ या a/b) यह चिह्न होते हैं वहाँ गुणा या भाग की क्रिया सबसे पहले की जाती है । $a \div b \times c$ और $a \div bc$ तथा $a \div b \div c$ और $a \div \frac{b}{c}$ इन सबके भेद को विशेष सावधानी के साथ देखना चाहिए ।

$a \div b \times c = \frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$; किन्तु $a \div bc = \frac{a}{bc}$,

इसी प्रकार $a \div b \div c = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}$,

किन्तु $a \div \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$.

उदाहरण 1. यदि $a = 2$, $b = 15$ और $c = 8$ हो, तो $9a + 2b - 4c$ का मान क्या होगा ?

$$\begin{aligned} 9a + 2b - 4c &= 9 \times a + 2 \times b - 4 \times c \\ &= 9 \times 2 + 2 \times 15 - 4 \times 8 \\ &= 18 + 30 - 32 \\ &= 48 - 32 = 16. \end{aligned}$$

उदाहरण 2. यदि $a=5$, $b=2$ और $c=6$ हो, तो $a(b+c)^2 - a\times b+c^2$ का मान बताओ ।

यहाँ $a(b+c)^2=5\times(2+6)^2$

$=5\times8^2=5\times64=320$

$a\times b=5\times2=10$ और $c^2=6^2=36$;

$\therefore$ निर्णेय मान $=320-10+36$

$=310+36=346.$

उदाहरण 3. $a=4$, $b=3$ और $c=2$ होने पर निम्नलिखित राशियों का मान कितना होगा ?

(i) $a+b\div(b+c)$; (ii) $(a+b)\div(b+c)$; (iii) $(a+b)\div b+c$.

(i) दी हुई राशिमाला $=a+\dfrac{b}{b+c}=4+\dfrac{3}{3+2}=4+\dfrac{3}{5}=4\dfrac{3}{5}.$

(ii) दी हुई राशिमाला $=\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{4+3}{3+2}=\dfrac{7}{5}=1\dfrac{2}{5}$

(iii) दी हुई राशिमाला $=\dfrac{a+b}{b}+c=\dfrac{4+3}{3}+2=\dfrac{7}{3}+2=4\dfrac{1}{3}.$

उदाहरण 4. यदि $a=3$, $b=6$, $p=1$, $q=2$, $x=5$ और $y=8$ हो, तो नीचे लिखी हुई दोनों राशिमालाओं का मान बताओ ।

(i) $a-b\div q+y\div q+p.$

(ii) $3a+pxy-2b\div a-bp+aq-3px.$

(i) $a-b\div q+y\div q+p$

$=3-6\div2+8\div2+1$

$=3-3+4+1=5.$

(ii) दिया हुआ व्यंजक $=3\times3+1\times5\times8-2\times6\div3-6\times1$

$+3\times2-3\times1\times5$

$=9+40-4-6+6-15$

$=49-4-15=30.$

प्रश्नावली 3.

$x=3$, $y=5$, $a=2$ और $b=6$ होने पर निम्नलिखित राशियों का मान कितना होगा ?

1. $a+x\times y$.   2. $(a+x)y$.   3. $x+b\div a$.

4. $(x+b)\div a$.   5. $b\div a+x$.   6. $b\div(a+x)$.

निम्नलिखित राशियों का अर्थ शब्दों में बताओ और यदि $w=1$, $x=2$, $y=3$, $z=4$ हो, तो इनका मान भी बताओः—

7. $(x+y)(z+w)$.   8. $2x+3y-z$.

9. $xyw+yzw+zxw$.   10. $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xyz}{w}$.

11. $x^2+y^2+z^2+w^2$.

यदि $a=2$, $b=1$, $c=3$, $x=4$, $y=6$ और $z=0$ हो, तो निम्नलिखित राशियों का मान निकालोः—

12. $(a+x)^2+(b+y)^2$.   13. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}-\frac{2y}{x^2}$.

14. $\frac{(a+x)^2}{(y-z)^2}-\frac{(b+y)}{(a+x^2)}$.   15. $(x+y)/x-(y-x)/y$.

यदि $a=0$, $b=5$, $c=6$, $x=4$ और $y=2$ हो, तो निम्नलिखित राशियों का मान निकालोः—

16. $x^3-12x^2+48x-64$.

17. $4x^3-\{b^2-2(c^2-7y^2)\}$.

18. $x^2-[y+b\{c\div y(c-\overline{x-a})\}]$

19. $(x^2-y^2)(c^2-b^2)-\{c-(c^2-\overline{a+y})\}$.

यदि $a=9$, $b=5$, $x=3$ और $y=2$ हो, तो दिखाओ कि—

20. $3a+2b=9x+5y$.

21. $5a-2b+7x=8b+10y-4$.

22. $2ab-8xy=8bx-9a+3$.

यदि $a=3$, $b=8$, $x=5$ और $y=9$ हो, तो बताओ निम्नलिखित दोनों राशियों का मान कितना होगा ?

23. $\sqrt{(x-a)(y-b)b}$.

24. $\sqrt[3]{15x^2a^2b^2}$.

बताओ निम्नलिखित दोनों राशिमालाएँ किस किस परिमाण की हैं ?

25. $3x^3y^2+5xy^3+7x^2y^3-9x^4+7x^2y$.

26. $2a^2b^2-3a^4b^3+10ab-2ab^2+6a^2b^3$.

——:o:——

तीसरा अध्याय

नियंत्रित संख्याएँ (Directed Numbers) और ऋणसूचक राशियाँ (Negative Quantities)

अङ्कगणित में किसी राशि का बोध कराने के लिए संख्या का उपयोग किया जाता है। किसी बालक की अवस्था कितने वर्ष की है, यह प्रश्न उदय होने पर उत्तर में केवल '10' एक संख्या कह देना ही यथेष्ट है। यहाँ उत्तर पूर्ण अर्थ का सूचक है। इसी प्रकार किसी वस्तु की तोल कै सेर है, यह सूचित करने के लिए '15' एक संख्या का ही सहारा लेना होगा अर्थात् उसकी तोल 15 सेर है। यह उत्तर पूर्ण अर्थ का बोधक है।

इसके विपरीत जब यह प्रश्न उदय हो कि आज प्रातःकाल से लेकर ताप के परिमाण में कितना परिवर्तन हुआ है, तो केवल '5' डिग्री या दर्जा कह देने से उत्तर पूर्ण अर्थ का बोधक न होगा जब तक कि यह न कहा जाय कि 5° बढ़ा है या घटा है। इसी प्रकार बम्बई की दूरी निश्चित करते समय केवल 'बम्बई कलकत्ता से 1223 मील है' कह देना ही यथेष्ट उत्तर न होगा वरन् 'कलकत्ता से बम्बई 1223 मील पश्चिम है' यह कहना होगा। अब समझ में सुगमतापूर्वक आजायगा कि ऊपर आई हुई सभी संख्याएँ एक-एक प्रकार की राशि का बोध कराती हैं। फिर भी '10' और '15' इन दो

संख्याओं में और '5' और '1223' इन दो संख्याओं में कुछ स्वाभाविक विभिन्नता है । पहली दोनों संख्याएँ 10 और 15 निर्दिष्ट राशियो की बोधक हैं परन्तु बादवाली दोनों संख्याओं के साथ क्रमशः 'बड़ा है' या 'घटा है' और 'पश्चिम' इन दोनों बातों को जोड़े बिना केवल 5 और 1223 संख्याओं के द्वारा कोई बात पूर्णतः स्पष्ट नहीं होती । इन दोनों प्रकार की संख्याओं में विभिन्नता सूचित करने के लिए पहली दोनों संख्याओं को साधारण (Common) संख्या और बादवाली दोनों संख्याओं को नियन्त्रित (Directed) संख्या कहते हैं ।

इसीलिये किसी विशेष अर्थ में प्रयोग की गई संख्याएँ नियंत्रित (Directed) संख्याएँ कहलाती हैं; जैसे, हम कह सकते हैं कि अमुक घर के फ़र्श से पासवाली गली २० फ़ीट नीची है अथवा गली से घर का फ़र्श २० फ़ीट ऊँचा है । यहाँ 'ऊँचा' और 'नीचा' शब्दों को प्रयोग करके 20′ निर्धारित संख्या का अर्थ एक विशेष रूप में लिया गया है ।

30. नियंत्रित संख्याओं के उदाहरण (Illustrations of Directed Numbers).

(1) हम कहा करते हैं कि ताप हिमांक (Freezing point) से 8° कम या 10° अधिक है ।

(2) विश्वविद्यालय की परीक्षा प्रतिदिन पहले वक़्त 10 बजे आरम्भ होती है और दूसरे वक़्त 5 बजे समाप्त होती है । यहाँ समय के घण्टों की गिनती दोपहर को 12 बजे से आरम्भ होती है और 12 बजे से पूर्व के समय का निर्देश 'पहले वक़्त के द्वारा और 12 बजे के बाद के समय का निर्देश 'दूसरे वक़्त' के द्वारा किया जाता है ।

(3) 1757 ईस्वी में 'प्लासी का युद्ध' हुआ था किन्तु बुद्धदेव ने 557 ई० पू० में जन्म लिया था । ये दोनों तारीख़ नियंत्रित (Directed) संख्याएँ हैं । ईसा के जन्म की तिथि से पहले की घटनाओं का समय 'ई० पू०' और बाद की घटनाओं का समय 'ईस्वी' के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । इन शब्दों को जोड़े बिना केवल 1757 या 557 संख्याएँ लिख देना सर्वथा निरर्थक है ।

(4) किसी मनुष्य ने 500 रु० उपार्जन करके उनमें से 300 रु० व्यय कर डाला। इसलिए उसका संचित कोष केवल 200 रु० का है। परन्तु यदि उसने 300 रु० उपार्जित करके 500 रु० व्यय कर डाले हों, तो उसके पास बचत में तो कुछ रहेगा नहीं ऊपर से 200 रु० का ऋण हो जायगा। बीजगणित में इस 200 रु० ऋण को भी कोष में ही दिखलाया जाता है। दोनों ही अवस्थाओं में उसकी आर्थिक स्थिति इस 200 रु० की निर्दिष्ट राशि के द्वारा प्रकट की जाती है। इसलिए संचय या ऋण इन दो शब्दों में से किसी एक के प्रयोग के बिना उस व्यक्ति की आर्थिक स्थिति भलीभाँति नहीं प्रकट की जासकती।

31. भिन्न भिन्न प्रकृति की राशियाँ (Quantities of different Nature).

ऊपर दिये हुए उदाहरणों से यह सरलतापूर्वक ज्ञात होगया होगा कि राशियों के सजातीय होने पर भी उनमें प्रकृति-गति विभिन्नता होसकती है। मान लो कि एक व्यक्ति A विन्दु से चलकर पूर्व की ओर B विन्दु तक ३ मील गया। अब यदि वह फिर पश्चिम की ओर ३ मील का रास्ता तै करे, तो उसकी यात्रा का विन्दु फिर A पर ही पड़ेगा अर्थात् उसकी स्थिति में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

इसलिए पूर्व की ओर के 3 मील और पश्चिम की ओर के ३ मील इनका संख्या सम्बन्धी मान एक ही है परन्तु फिर भी यह मानना ही पड़ेगा कि यह दोनों विपरीत प्रकृति से युक्त हैं। अतः विपरीत दिशा में परिमित दूरी को विभिन्न प्रकृति की कहा जाता है। दोनों ही दूरीसूचक सजातीय राशियाँ हैं परन्तु इनके सम्बन्ध में जब हम दिशा के हिसाब से विचार करें तो उन्हें विपरीत प्रकृति की कहना पड़ेगा।

इसी प्रकार संचय और व्यय, लाभ और हानि आदि अर्थों का बोध करानेवाली संख्याएँ एक जाति की होने पर भी संचय के सम्बन्ध में विपरीत अवस्था की बोधक होने के कारण विपरीत प्रकृति से युक्त मानी जाती हैं। बीजगणित में विभिन्न प्रकृतियों की नियंत्रित (Directed) राशियों की प्रकृति-गति विभिन्नता को प्रकट करने के लिए '+' और '−' चिह्नों का उपयोग किया जाता है और ये उक्त संख्या के चिह्न कहलाते हैं। इनमें से एक 'धन-राशि' और दूसरी 'ऋण-राशि' कही जायगी। ऊपर जो पूर्व

की ओर का 3 मील का रास्ता है वह यदि +3 मील (धन-राशि) कहलावेगा, तो पश्चिम की ओर के 3 मील को −3 मील (ऋण-राशि) कहना होगा। यह व्यक्ति यदि A बिन्दु से पश्चिम की ओर 3 मील जाय, तो वह A बिन्दु से 3 मील पश्चिम में ही अवश्य रह जायगा किन्तु बीजगणित की प्रणाली में यह कहना होगा कि वह व्यक्ति A बिन्दु से −3 मील पूर्व में है।

जब विपरीत प्रकृति की दो राशियों की भिन्नता का निर्देश करना होता है तब एक के पहले '+' चिह्न और दूसरे के पहले '−' चिह्न लगाना पड़ता है। उदाहरण के लिए जब ताप का परिमाण हिमांक से 10° ऊँचा रहता है, तो +10° और जब 17° कम रहता है तो −17° लिखना पड़ता है।

टीका—स्मरण रखो कि ऊपर कही गई संख्याओं में से किसी एक को हम + चिह्न के द्वारा चिह्नित कर सकते हैं। हिमांक के नीचे के ताप के किसी परिमाण को भी '+' चिह्न के द्वारा सूचित करना सम्भव है। परन्तु इस अवस्था में हिमांक के ऊपर के ताप के किसी परिमाण को '−' चिह्न द्वारा सूचित करना होगा। केवल यही बात स्मरण रखनी चाहिए कि विपरीत प्रकृति की दो राशियों में से एक को जब हम '+' चिह्न द्वारा सूचित करेंगे तो दूसरी को '−' चिह्न द्वारा सूचित करना होगा। अतः चिह्न के सम्बन्ध में एक बार जो कुछ मान स्थिर कर लिया जायगा वही सर्वत्र माना जायगा।

32. '+' और '−' चिह्नों की नई प्रकृति (New aspects of the sign '+' plus and '−' minus).

यहाँ + और − चिह्नों की एक नई प्रकृति प्राप्त होती है। अंकगणित में + चिह्न से युक्त संख्या को जोड़ना और − चिह्न से युक्त संख्या को घटाना होता है। इसलिए ऊपर जो कुछ कहा गया है उससे ज्ञात होता है कि + और − ये दोनों ही चिह्न भिन्न भिन्न अर्थों में उपयोग में लाये जाते हैं। इससे यह बात मन में आना स्वाभाविक है कि एक ही चिह्न का दो अर्थों में उपयोग करना असुविधाजनक है परन्तु वस्तुतः इससे कोई असुविधा नहीं होती क्योंकि ये दोनों चिह्न कहाँ किस अर्थ में प्रयोग किये गये हैं यह बात सरलतापूर्वक समझ में आ सकती है।

इस विषय में बीजगणित तथा अंकगणित में एक विशेष अन्तर दृष्टिगोचर होता है। अंकगणित में एक बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाई जासकती है किन्तु किसी छोटी संख्या में से बड़ी संख्या नहीं घटाई जासकती। इसके विपरीत बीजगणित में ऋण-राशियों की स्थिति स्वाधीनतापूर्वक स्थिर की जासकती है इसलिए इसमें घटाने की क्रिया अंकगणित की अपेक्षा अधिक व्यापकता तथा पूर्णता प्राप्त कर सकती है। अंकगणित में स्वतंत्र भाव से रक्खी गई ऋण-राशि का कोई अर्थ ही नहीं हुआ करता। अतएव वह कभी व्यवहार में नहीं लाई जाती किन्तु बीजगणित में ऋण-राशि का स्वतंत्र अस्तित्व स्वीकार किया जाता है इस कारण घटाने की क्रिया भी व्यापक भाव से व्यवहार में लाई जाती है।

उदाहरण 1—जब $x=5$ और $y=3$ हो, तो $x-y=5-3$ अथवा 2 होगा। परन्तु, यदि $x=2$ और $y=3$ हो, तो अंकगणित में $x-y$ अर्थात् $2-3$ का कोई अर्थ न होगा किन्तु ऋण-राशि का अस्तित्व स्वीकार कर लेने पर x की अपेक्षा y के बड़े होने पर भी $x-y$ से एक अर्थ निकलता है और वर्तमान स्थिति में $x-y=2-3=-1$. इसलिए x की अपेक्षा y चाहे बड़ा हो या छोटा वह सदा ही x में से घटाया जासकता है।

33. धन और ऋण संख्याएँ (Positive and Negative Numbers)❋।

'+' चिह्न से युक्त किसी नियंत्रित संख्या को धन-संख्या और '−' चिह्न से युक्त नियंत्रित संख्या को ऋण-संख्या कहते हैं।

व्यवहार के समय धन-संख्या के पहले + के चिह्न की कल्पना करली जाती है किन्तु ऋण-संख्या के पहले − चिह्न का प्रयोग सदा ही करना पड़ता है। + और − इन दोनों चिह्नों को क्रमशः धन और ऋण का चिह्न कहते हैं।

❋ हिन्दुओं ने ही सब से पहले ऋण संख्या (Absolutely Negative Numbers) और अपूर्ण (Irrational) संख्या का आविष्कार किया था। Cajori's History of Mathematics, P. 101.

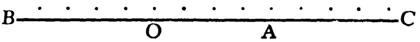
टीका 1— + और − ये दोनों चिह्न क्रियावाचक चिह्न के अतिरिक्त विपरीत प्रकृति से युक्त राशि के भिन्नतासूचक चिह्न के रूप में भी प्रयोग किये जाते हैं और इस अन्त में कहे गये अर्थ में प्रयोग किये जाने पर ये भेद-चिह्न (Sign of Affection) कहलाते हैं।

टीका 2—भेद-चिह्न से वर्जित किसी राशि की संख्या उसका परम (Absolute) मान कहलाती है; जैसे, +5 और −5 दोनों ही का परम मान 5 है।

34 नियंत्रित संख्या का लैखिक चित्र (Graphical Representation of Directed Numbers).

उदाहरण 1—किसी सरल रेखा के ऊपर दूरी नाप करके नियंत्रित संख्याएँ लैखिक चित्र में प्रकट की जासकती हैं।

कल्पना करो कि किसी बालक ने 3 बार गोली खेली और पहली बार वह 4 जीता, दूसरी बार 9 हारा परन्तु तीसरी बार फिर से 13 जीत लिया, बताओ उसने सचमुच कितनी गोलियाँ जीतीं।



किसी सरल रेखा के ऊपर O को यदि हम 'मूल विन्दु' मान लें, तो जीती हुई गोली O के दाहिनी ओर और हारी हुई गोली O के बाईं ओर विन्दुओं के द्वारा सूचित कर सकते हैं।

इसी प्रकार पहली बार की जीत O के दाहिनी ओर A विन्दु द्वारा और दूसरी बार की हार O के बाईं ओर B विन्दु द्वारा और तीसरी बार की जीत B के दाहिनी ओर C विन्दु द्वारा प्रकट की जासकती है। यहाँ हार और जीत की गोलियाँ उक्त रेखा के ऊपर चिह्नित विन्दुओं के द्वारा सूचित की गई हैं।

चित्र में स्पष्ट है कि C, O के दाहिनी ओर आठवें विन्दु पर वर्तमान है। इससे ज्ञात हुआ कि तीसरी बार खेलने पर लड़के ने केवल 8 गोलियाँ जीतीं।

A C D B

उदाहरण 2. कल्पना करो कि AB एक सड़क है। यदि कोई व्यक्ति C विन्दु से चलकर B की ओर जाय और D पर पहुँचकर फिर C विन्दु पर लौट आवे तो यह सरलतापूर्वक अनुमान किया जासकता है कि उक्त व्यक्ति उसी स्थान पर लौटकर गया है जहाँ से उसने यात्रा आरम्भ की थी। और D तक जाने और वहाँ से फिर लौटकर C तक आने के कारण उसके स्थान में कोई परिवर्तन नहीं हुआ। इसलिए C और D के बीच की दूरी बाईं से दाहिनी ओर CD और दाहिनी से बाईं ओर DC दोनों ही समान हैं, परन्तु उनकी प्रकृति विपरीत है। अतः बाईं ओर से दाहिनी ओर की दूरी यदि + चिह्न के द्वारा सूचित की जाय, तो दाहिनी से बाईं ओर की दूरी − चिह्न द्वारा सूचित की जायगी। विपरीत क्रम में भी (conversely) इसी प्रकार होगा। अतएव C को 0 (शून्य विन्दु) मान लेने पर +5 मील दूरी का अर्थ यह होगा कि C विन्दु से दाहिनी ओर 5 मील और −5 मील कहने का यह अर्थ होगा कि C विन्दु से बाईं ओर 5 मील।

टीका—ऋण-संख्या के सम्बन्ध में और भी एक प्रकार की धारणा की जा सकती है। अंकगणित में संख्याएँ क्रमशः घटाकर 4, 3, 2, 1 आदि 0 तक लिखी जाती हैं। 0 ही अंकगणित की सब से छोटी संख्या है, परन्तु बीजगणित में 0 पर समाप्त न करके 0 के बाद भी और छोटी संख्या की कल्पना की जाती है। 0 से 1 कम जो संख्या होती है वह −1, और जो 2 कम होती है वह −2, और जो 3 कम होती है वह −3 लिखी जाती है। इसीलिए जो संख्याएँ 0 से छोटी होती हैं वे ऋण-संख्याएँ कहलाती हैं।

35 नियंत्रित संख्याओं का व्यवहार (Operation with Directed Numbers).

गणित में ऋण-संख्या का प्रवर्तन होने के कारण उसके व्यवहार के सम्बन्ध में भी कुछ नियम निर्धारित करना आवश्यक है। कारण साधारणतः धन-संख्या के द्वारा गुणा और भाग का नियम अंकगणित में प्रचलित है, परन्तु किसी ऋण-संख्या के द्वारा गुणा या भाग का—जैसे, $2\times(-3)$ और $4\div(-2)$ का क्या अर्थ हो सकता है इस सम्बन्ध में कुछ ज्ञात नहीं है। ऐसी दशा में इस सम्बन्ध में भी कुछ नियम निर्धारित

करने आवश्यक हैं। प्रचलित नियमों के साथ शृंखला की रक्षा करते हुए गुणा और भाग की क्रियाओं की इस प्रकार की व्याख्या करनी होगी जिससे यह सब नियम ऋण के सम्बन्ध में भी व्यवहार में लाये जासकें।

36 ऋण-संख्या का योग (Addition of Negative Numbers).

किसी स्केल में $+1$, $+2$, $+3$ आदि धन-संख्याएँ किसी शून्य विन्दु से ऊपर की ओर और -1, -2, -3 आदि ऋण-संख्याएँ नीचे की ओर चिह्नित करो।

$+5$
$+4$
$+3$
$+2$
$+1$
0 0
-1
-2
-3
-4
-5

(1) 3 को 2 के साथ जोड़ने के लिए $+2$ चिह्नित विन्दु से आरम्भ करके ऊपर की ओर 3 घर चढ़कर $+5$ चिह्नित विन्दु तक आना पड़ता है। इसलिए $2+3=5$.

(2) 3 को (-2) के साथ जोड़ने के लिए -2 चिह्नित विन्दु से आरम्भ करके 3 घर ऊपर चढ़ने पर $+1$ चिह्नित विन्दु पर पहुँच जाता है। इसलिए $(-2)+3=+1$.

फिर x और y यदि दो धन-संख्याएँ हों, तो $x+y=y+x$, इसलिए ऋण-संख्याओं के जोड़ने की पद्धति भी इसी प्रकार स्वीकार करनी होगी; जैसे, $3+(-2)=(-2)+3=+1$ होता है। इसीलिए 3 के साथ -2 जोड़ने के लिए $+3$ चिह्नित विन्दु से आरम्भ करके नीचे की ओर 2 घर उतरकर $+1$ चिह्नित विन्दु पर जाना पड़ता है।

$\therefore\ 3+(-2)=+1$; इसी प्रकार $5+(-3)=+2$ आदि। इस प्रकार देखने में आता है कि जब किसी धन-संख्या का योग करना होता है तब स्केल के ऊपर की ओर चढ़ने की आवश्यकता पड़ती है, किन्तु ऋण-संख्या को जोड़ने के लिए नीचे की ओर उतरना पड़ता है।

यहाँ $3-2=1$, $\therefore$ $3+(-2)$ का अर्थ $3-2$. इसी प्रकार $5+(-3)=5-3$ आदि।

इसलिए ऋण-संख्या के योग के अर्थ में उसके परम मान से पहले एक 'ऋण-चिह्न' लिखना होगा; जैसे, $a+(-b)=a-b$.

उदाहरण (*i*) यदि किसी व्यापारी को पहले 35 रु० का लाभ हो और उसके बाद 50 रु० का लाभ हो, तो उसे कुल $(+35)+(+50)=+85$ अर्थात् 85 रु० का लाभ हुआ। कोष्ठ के भीतर के + चिह्न से नियंत्रित संख्या का बोध होता है, किन्तु कोष्ठ के बाहर का + चिह्न केवल एक क्रियावाचक चिह्न है।

(*ii*) यदि पहले 35 रु० लाभ होने के पश्चात् 50 रु० की हानि हो, तो उसे कुल $(+35)+(-50)=-15$ अर्थात् 15 रु० की हानि होगी।

(*iii*) यदि पहले 35 रु० की हानि हो और उसके बाद 50 रु० की हानि हो, तो कुल $(-35)+(-50)=(-85)$ अर्थात् 85 रु० की हानि होगी।

37. **ऋण-संख्या का घटाना** (Subtraction of Negative Numbers).

गणित में ऋण-संख्या की उत्पत्ति होने के बाद घटाने की साधारण प्रक्रिया जोड़ने की क्रिया के रूप में परिणत होगई है; जैसे, 5 में से 3 घटाते समय एक ऐसी संख्या का निर्णय करना पड़ता है जिसे 3 में जोड़ देने पर योगफल 5 हो जाय।

$$5-3=5+(-3)=(-3)+5=2.$$

फिर 3 में से (-2) घटाते समय एक ऐसी संख्या निर्दिष्ट करनी होगी जिसके साथ (-2) को जोड़ने से योगफल 3 हो। ऊपर दिये हुए चित्र को ध्यानपूर्वक देखने से स्पष्ट हो जायगा कि (-2) और 3 से चिह्नित दोनों विन्दुओं के बीच की दूरी 5 है।

$$\therefore\quad 3-(-2)=3+2=5.$$

इसलिए किसी ऋण-संख्या को घटाते समय केवल उससे पहलेवाले ऋण-चिह्न का परिवर्तन करके उसे जोड़ना होता है अर्थात् ऋण के दो चिह्नों को एकत्र करके एक योग के चिह्न में परिणत कर देना होता है; जैसे, $a-(-b)=a+b$.

उदाहरण 1. 3° और -2° ताप का अन्तर 5° है अर्थात् 3° ताप, -2° ताप से 5° अधिक है।

उदाहरण 2. (*i*) किसी बालक ने दो बार खेलकर कुल 45 गोलियाँ प्राप्त कीं। यदि उसने पहली बार 32 गोलियाँ प्राप्त की हों, तो दूसरी बार उसने केवल 13 गोलियाँ प्राप्त कीं, अर्थात्

$$+45-(+32)=(+13); \text{ अथवा } 45-32=13.$$

(*ii*) यदि पहले उसने 32 गोलियाँ हारी हों, तो बादवाले खेल में उसने 77 गोलियाँ जीती हैं। कारण

$$+45-(-32)=(+77,) \text{ अर्थात् } 45-(-32)=45+32=77.$$

(*iii*) यदि उसने कुल 45 गोलियाँ हारी हों, तो पहली बार 32 गोलियाँ और दूसरी बार केवल 13 गोलियाँ हारी हैं। कारण

$(-45)-(-32)=(-13)$, अथवा $(-45)-(-32)=-45+32 =-13.$

प्रश्नावली 4.

1. यदि 15 रु० की जमा -15 संख्या द्वारा प्रकट की जाय, तो 20 रु० का व्यय किस प्रकार प्रकट किया जायगा ?
2. 5 रु० को इकाई मानकर "-20 रु० का लाभ" किस प्रकार दिखलाया जायगा ?
3. यदि किसी विन्दु के उत्तर की 4′ की दूरी 12 द्वारा प्रकट की जाय, तो उस विन्दु के दक्षिण की 9′ की दूरी किस प्रकार प्रकट की जायगी ?
4. किसी व्यक्ति ने 125 पौं० एकत्र कर रखे हैं और उसने 200 पौं० ऋण ले लिया, तो उसकी जमा किस प्रकार दिखाई जायगी ?
5. एक मनुष्य के पास 10 रु० हैं और दूसरे मनुष्य के पास -50 रु०, तो दोनों की आर्थिक अवस्था की तुलना करो।
6. किसी बालक की साप्ताहिक परीक्षा के नम्बरों का औसत 75 है। यदि उसके दो सप्ताह के नम्बर क्रमशः $+20$ और -17 अधिक हों, तो उसके वास्तविक नम्बर बताओ।
7. किसी मनुष्य के पास -95 रु० हैं, परन्तु पहले उसके पास 135 रु० थे। बताओ अब उसके कोष में कैसा परिवर्तन हुआ है।

8. समुद्र-तल से किसी विन्दु की ऊँचाई 200 फ़ीट है, तो बताओ कि उस विन्दु से 500 फ़ीट नीचे स्थान की ऊँचाई क्या होगी।

9. ताप का परिमाण -12° से -6° में परिवर्तित हो गया। क्या तुम बता सकते हो कि उसमें कैसा परिवर्तन हुआ है? बताओ a° से b° अथवा -5° से -3° में परिवर्तित होने पर ताप कितने परिमाण में घटा या बढ़ा।

10. विषवत् रेखा के 38° उत्तर और 33° दक्षिण में वर्तमान स्थानों के अक्षांश में कितना अन्तर होगा?

11. एक जहाज़ $14^\circ\ 5'\ 45''$ E. देशान्तर (Longitude) में स्थित नेपल्स (Naples) से $63^\circ\ 35'\ 17''$ W. देशान्तर में स्थित हेलीफैक्स (Halifax) नगर को गया। बताओ उस जहाज़ ने देशान्तर की कितनी डिग्रियाँ (Degrees) कितने मिनट और सेकण्ड व्यतीत किये?

12. एक एंजिन किसी स्टेशन से 200 फ़ीट उत्तर के एक स्थान से चलकर 300 फ़ीट उत्तर गया और फिर 600 फ़ीट दक्षिण आया। बताओ अब वह एंजिन स्टेशन से उत्तर की ओर कितनी दूरी पर है।

13. एक वायुयान जो 1432 फ़ी० की ऊँचाई पर था 516 फ़ीट नीचे उतर आया। बाद में उसका बैलेस्ट (Ballast) फेंक देने पर वह फिर 628 फ़ी० ऊँचाई पर चढ़ गया और उसके बाद 875 फ़ी० नीचे उतरा। बताओ वह वायुयान अब कितनी ऊँचाई पर है।

14. $4, 3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}$ 0 इन संख्याओं को लेखा चित्र द्वारा प्रकट करो।

38. ऋण-संख्या द्वारा गुणा (Multiplication by Negative Numbers).

प्रत्येक बार लाभ का परिमाण 3 होने पर 2 बार में कुल लाभ का परिमाण ६ होता है और प्रत्येक बार हानि का परिमाण 3 होने पर 5 बार में कुल हानि 15 होगी।

अर्थात् $(+3)\times(+2)=(+6)$; अथवा $3\times 2=6$.

और $(-3)\times(+5)=(-15)$; अथवा $(-3)\times 5=-15$.

चूँकि गुणा योग की केवल एक संक्षिप्त प्रक्रिया है, इसलिए $3\times2=3+3=6$. इसी प्रकार, $(-3)\times5=(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=-15$.

फिर x और y यदि दो धन-राशियाँ हों, तो $x\times y=y\times x$; इसलिए ऋण-राशि के सम्बन्ध में भी इसी नियम का प्रयोग करना आवश्यक है।

$$\therefore\ (-3)\times5=5\times(-3)=-15;$$

इसलिए साधारण भाव से $a\times(-b)=-ab$.

फिर $(-3)\times5=-15$ और $(-5)\times3=-15$ की एक ऋण-राशि (-3) को एक दूसरी ऋण-राशि (-5) से गुणा करने पर गुणनफल का चिह्न $(-3)\times5$ इस गुणनफल के विपरीत होगा, अर्थात्

$$(-3)\times(-5)=-(-15)=+15;$$

अतएव साधारण भाव से $(-a)\times(-b)=(+ab)$.

उदाहरण 1. किसी व्यक्ति की प्रति दिन की बचत 3 रु० है। 4 दिन के बाद उसके पास कुल बचत $3\times4=12$ रु० होगी, अर्थात् $3\times4=12$, परन्तु 4 दिन पहले (आज से -4 दिन) उसकी बचत आज की बचत से 12 रु० कम थी।

$$\therefore\ (+3)\times(-4)=(-12), \text{ अथवा } 3\times(-4)=-12.$$

उदाहरण 2. यदि उसकी प्रति दिन की हानि 3 रु० हो, तो 4 दिन के बाद उसकी कुल हानि 12 रु० की होगी, अर्थात्

$(-3)\times(+4)=-12$; अथवा $(-3)\times4=-12$,

किन्तु 4 दिन पहले उसकी बचत 12 रु० अधिक थी; इसलिए

$(-3)\times(-4)=(+12)$, अथवा $(-3)\times(-4)=+12$.

गुणा की प्रक्रिया के चिह्न के सम्बन्ध में नीचे लिखे हुए नियम प्रचलित हैं :—

(+) योग × (+) योग = (+) योग।
(+) योग × (−) वियोग = (−) वियोग।
(−) वियोग × (+) योग = (−) वियोग।
(−) वियोग × (−) वियोग = (+) योग।

अर्थात् गुणा की प्रक्रिया में सजातीय चिह्न के द्वारा योग (+) चिह्न और विजातीय चिह्न के द्वारा वियोग (−) चिह्न प्राप्त होता है।

39 ऋण-संख्या द्वारा भाग (Division by Negative Numbers).

यह बात अनायास ज्ञात होजाती है कि यदि लाभ का परिमाण 6 हो, तो उसके आधे लाभ का परिमाण 3 होगा, अर्थात् $(+6) \div 2 = (+3)$ या $6 \div 2 = 3$. इसी प्रकार हानि का परिमाण 6 होने पर उसकी आधी हानि का परिमाण 3 होगा, अर्थात् $(-6) \div 2 = (-3)$ या $-6 \div 2 = -3$.

अब इस विषय पर दूसरे प्रकार से विचार करें। किस संख्या को हम (-2) से गुणा करें कि गुणनफल 6 हो।

चूँकि $(-3) \times (-2) = 6$, निर्णेय भागफल (-3) होगा,

अर्थात् $6 \div (-2) = -3$; इसी प्रकार $(-6) \div (-2) = +3$.

साधारणतः $a \div (-b) = -\frac{a}{b}$ और $(-a) \div (-b) = +\frac{a}{b}$.

भाग की प्रक्रिया में भी चिह्नों का प्रयोग गुणा की प्रक्रिया के चिह्न के नियम के अनुसार होना चाहिए।

40. शून्य (0) चिह्न का अर्थ।

गणित में संख्या प्रकट करने के लिए शून्य (0) एक अङ्क माना जाता है और इसका बहुत अधिक प्रयोग होता है। इसलिए शून्य का वास्तविक अर्थ जान लेना विशेष रूप से आवश्यक है। जब बारहवीं शताब्दी में युरोप में संख्या प्रकरण की प्रणाली पहलेपहल प्रचलित हुई थी, उस समय सम्भवतः शून्य (0) चिह्न का आविष्कार नहीं हुआ था। उन दिनों किसी स्थान पर अङ्क का अभाव सूचित करने के लिए केवल एक विन्दु (·) काम में लाया जाता था। उदाहरण के लिए 508 के स्थान पर 5·8 लिखा जाता था। व्यापार सम्बन्धी हिसाब-किताब में भी अङ्क लिखने की यही प्रथा अधिकता के साथ प्रचलित थी। असावधानी के कारण यदि किसी प्रकार यह विन्दु मिट जाता, तो बड़ा गोलमाल हो जाता था। इसलिए लोग यह आवश्यकता अनुभव करने लगे कि विन्दु के स्थान पर किसी अच्छे चिह्न का आविष्कार करना चाहिए। फलतः ○ इस प्रकार के चिह्न का

प्रयोग आरम्भ हुआ। यही चिह्न क्रमशः परिवर्तित होते होते '0' (शून्य) के आकार में आगया। अतः जब किसी संख्या में शून्य (0) अङ्क होता है, तब उससे यह ज्ञात होता है कि जिस स्थान पर शून्य (0) है वहाँ कोई अङ्क नहीं है। शून्य की इस व्याख्या के अनुसार नीचे लिखे हुए फल अनायास ही प्राप्त होते हैं :—

$$x+0=x,\ x-0=x;\ 0-x=-x;\ 0.x=0;$$
$$x.0=0;\ 0\div x=0;\ x-x=0.$$

$x\div 0$ का कोई अर्थ नहीं होता। किसी x राशि को यदि 0 से भाग देना हो, तो कोई ऐसी राशि खोज निकालनी होगी जिसे 0 से गुणा करने पर गुणनफल x आवे, परन्तु यह अनायास ही अनुमान किया जासकता है कि इस प्रश्न का कोई भी उत्तर नहीं हो सकता। बात यह है कि जिस किसी भी संख्या को 0 से गुणा किया जाय उसका गुणनफल सदा 0 ही होगा। वस्तुतः यदि x को किसी a संख्या से भाग दिया जाय, तो a का मान क्रमशः घटता जायगा और भागफल का मान भी क्रमशः बढ़ता जायगा। अन्त में जब a का मान घटते घटते 0 के सन्निकट हो जायगा, तब भागफल का भी मान उत्तरोत्तर बढ़ते बढ़ते बहुत ही बड़ा या असीम हो जायगा। उस अवस्था में पहुँच जाने पर इसे अनन्त (Infinity) कहेंगे और '∞' द्वारा सूचित करेंगे।

प्रश्नावली 5.

यदि $x=2$, $y=3$ और $z=-5$ हो, तो नीचे लिखी हुई राशियों का मान बताओ :—

1. $x+z;\ x-y,\ x\times y,\ x\div y,\ 2x\div z.$

2. $\frac{2y-5x}{3x+2z},\ \frac{3y-4x}{3y-7x},\ \frac{5x-3y}{x+2y}.$

$x=-2$ होने पर निम्नलिखित राशियों का मान बताओ :—

3. $2x^2,\ (2x)^2;\ 4x,\ -4x,\ 4\div x.$

4. $x^2-3x+1;\ x^2-3(x+1),\ (2x-3)(x+1),\ (2x-3)x+1.$

5. $x^3+3x^2+5+0,\ (x+1)(3-2x+x^2-0);\ (x+1)(x+2)(x+3).$

यदि $a=4$ और $b=-3$ हो, तो निम्नलिखित राशियों का मान क्या होगा ?

6. $a+b$; $-b+0$; $(-b)^2$; $-2ab$; a^2-2b.

7. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; $\frac{a(a+b)}{b(a-b)}$; $\frac{a^2+b}{b^2+a}$; $\frac{2b+3a}{2a+3b}$.

8. $(-2)^2$ और $(+2)^2$ का मान बताओ। सिद्ध करो कि x^2 के वर्गमूल के दो मान $(+x)$ और $(-x)$ होते हैं।

9. $-16°$ से $-4°$ ताप के परिमाण में क्या अन्तर है ?

10. ताप का परिमाण प्रति मिनट $1°$ के हिसाब से 5 मिनट तक घटता गया, पहले वह $0°$ था। बताओ अब उसका परिमाण कितना है। यदि पहले वह $5°$ रहा हो, तो अब उसका परिमाण कितना है ?

11. एक जहाज़ विषुवत्-रेखा से ठीक उत्तर $40°$ अक्षांश तक जाने के बाद ठीक दक्षिण $20°$ अक्षांश तक जाता है। बताओ उसने अक्षांश की कितनी डिग्रियों का भ्रमण किया।

12. मेरी घड़ी स्कूल की घड़ी से 3 मिनट तेज़ है। स्कूल की घड़ी ठीक समय से 5 मिनट सुस्त है। बताओ मेरी घड़ी ठीक समय से कितनी सुस्त या तेज़ है।

13. एक हवाई जहाज़ स्थिर वायु में 64 मी० प्रति घंटा के हिसाब से चलता है। यदि वायु का वेग 10 मी० प्रति घंटा हो तो वायु के विपरीत दिशा में जाते समय हवाई जहाज़ की गति प्रति घंटा क्या होगी ?

—:o:—

चौथा अध्याय

साधारण चार नियम (The Four Simple Rules)

41. साधारण चार नियम।

अङ्कगणित में धन-संख्याओं के योग, वियोग, गुणा और भाग आदि चार प्रक्रियाओं के सम्बन्ध में विचार किया जाता है। बीजगणित में ये नियम ऋण-संख्याओं के सम्बन्ध में भी उपयोग में लाये जाते हैं। अङ्कगणित में जिस प्रकार इन नियमों का प्रयोग अङ्कों के सम्बन्ध में होता है, ठीक उसी प्रकार बीजगणित में अक्षरों के द्वारा सूचित संख्याओं के सम्बन्ध में भी हुआ करता है।

42. सजातीय पदों का योग (Addition of Like Terms).

5 रुपया के साथ 2 रुपया जोड़ने पर योगफल 7 रुपया होगा। 5 रु० में से 2 रु० निकाल लेने से 3 रु० शेष बचेंगे। अब यदि रुपये का चिह्न (Symbol) x मान लिया जाय, तो

$$5x+2x=7x,$$

$$5x-2x=3x.$$

किन्तु 2 गायें और 5 घोड़ों को एकत्र करने पर 7 घोड़े या 7 गायें नहीं होतीं। यदि x गाय का चिह्न और y घोड़े का चिह्न मान लिया जाय, तो उनका योग '$2x+5y$' के रूप में लिखा जायगा।

अतः इससे स्पष्ट है कि जब दो सजातीय पदों का योगफल निकालना हो, तो उन दोनों सजातीय पदों का योग लेना होगा और एक में से यदि दूसरे को घटाना हो, तो उन दोनों सजातीय पदों का अन्तरफल लेना होगा।

सजातीय पदों का योगफल या अन्तरफल निर्धारित करते समय जिस पद का योग या वियोग निकालना हो केवल उसके पहले '+' या '−' चिह्न लगा देना होता है।

उदाहरण 1. $2a$ और $3a$ को जोड़ो।

यहाँ $2+3=5$;

$\therefore \quad 2a+3a=5a.$

उदाहरण 2. $7x$ में से $3x$ घटाओ।

यहाँ $7-3=4$;

$\therefore \quad 7x-3x=4x.$

उदाहरण 3. x और $2y$ का योगफल बताओ।

यहाँ योगफल $x+2y$ लिखना होगा; कारण x और $2y$ दोनों विजातीय पद हैं।

उदाहरण 4. $8b$ में से $5a$ घटाओ।

यहाँ दोनों विजातीय पद हैं इसलिए इनका वियोगफल $8b-5a$ के रूप में लिखा जाता है।

43. कुछ सजातीय पदों का योग (Addition of Several Like Terms)।

पद या तो धन-पद होते हैं या ऋण-पद। इसलिए तीन प्रकार की सम्भावनाओं के सम्बन्ध में विचार करना होगा :—

(1) सभी धन-पद।

(2) सभी ऋण-पद।

(3) कुछ धन-पद और कुछ ऋण-पद।

पहला प्रकार—सभी धन-पद होने पर उनका योग भी एक धन-पद होता है और उनके संख्या सम्बन्धी सजातियों का योग इस योगफल का सजातीय होता है। कारण 2 या 2 से अधिक लाभों का योग भी लाभ ही होगा।

उदाहरण। x, $3x$ और $5x$ का योग कितना होगा ?

यहाँ योग $=x+3x+5x=(1+3+5)x=9x$, अर्थात् विभिन्न सजातीय पदों के सजातियों का योग ही योगफल में x का सजातीय होगा।

इस प्रकार $13a+7a+a+4a=(13+7+1+4)a=25a.$

दूसरा प्रकार—यदि सब ऋण-पद हों तो उनका योग भी एक ऋण-पद होगा। बात यह है कि यदि एक से अधिक बार हानि होगी, तो एक सम्मिलित हानि भी होगी और उस हानि का परिमाण निर्धारित करने के लिए जितने बार हानि हुई होगी उन सबके परिमाणों का योग करना होगा।

उदाहरण। $-x$, $-5x$, $-8x$, $-17x$ का योग करो।

यहाँ क्रम से 1, 5, 8 और 17 सजातीय वस्तुओं के घटाने का अर्थ यह है कि एक साथ $(1+5+8+17)$, अर्थात् 31 वस्तुओं को घटाना होगा।

इसलिए उन सब का योग $=(-x)+(-5x)+(-8x)+(-17x)$ $=-31x$.

नियम—एक ही चिह्न से युक्त कई सजातीय पदों का योग उसी चिह्न से युक्त एक सजातीय पद होता है और उस पद का संख्यावाचक गुणक उक्त पद-समूह के गुणकों का योग होता है।

तीसरा प्रकार—जब कुछ धन-पदों और ऋण-पदों को जोड़ना हो, तब यह कल्पना की जासकती है कि कई बार के लाभ में कई बार की हानि मिली हुई है। यदि लाभों का योग हानियों के योग से बड़ा हो, तो सिद्ध होगा कि लाभ हुआ है और यदि हानियों का योग लाभों के योग से बड़ा हो, तो सिद्ध होगा कि हानि हुई है।

इस अवस्था में नीचे लिखा हुआ नियम प्राप्त होता है:—

नियम—भिन्न भिन्न चिह्नों से युक्त कई सजातीय पदों का योग भी एक सजातीय पद होता है। जब कभी इनका गुणक निकालना हो, तो धन-पदों के संख्या-वाचक गुणकों का योग करलो और उसी प्रकार ऋण-पदों के गुणकों का भी योग करलो। इन दोनों ही योगों के अन्तर में बड़े योग के चिह्न को लगा देने से ही निर्णेय गुणक प्राप्त हो जायगा।

उदाहरण 1. $15a$ और $-7a$ को जोड़ो।

यहाँ दोनों गुणकों का योग $=15+(-7)=15-7=8$

$\therefore$ निर्णेय योग $=8x$.

उदाहरण 2. $3x$, $-2x$, $9x$, $-5x$ और x का योगफल निकालो।

यहाँ धन-पदों के गुणकों का योग $=3+9+1=13$,

और ऋण-पदों के गुणकों का योग $=2+5 \quad =7$

इन दोनों योगों का अन्तर $=13-7=6$

और इन दोनों में से बड़े योग का चिह्न + है,

$\therefore$ निर्णेय योग $=(13-7)x=6x$.

टीका 1—यदि दो विपरीत चिह्नों से युक्त राशियों का संख्या सम्बन्धी मान समान हो, तो उनका योग शून्य होता है; जैसे, $3x+(-3x)=0$.

टीका 2—धन और ऋण पदों के चिह्न ठीक रखकर उनका किसी भी क्रम से योग किया जासकता है। इससे फल में किसी प्रकार का व्यतिक्रम नहीं होता। इस नियम को **पद-संग्रह** (Collecting Terms) कहते हैं।

टीका 3—राशियों के + या − चिह्नों से युक्त होने पर सम्पूर्ण + राशि उनका **बीजगणितीय योग** (Algebraic Sum) कहलाता है। यहाँ यह स्मरण रखने की बात है कि **योग** (Sum) शब्द अङ्कगणित और बीजगणित में एक ही अर्थ में व्यवहार में नहीं लाया जाता। बीजगणित में धन-पदों और ऋण-पदों के समूहों का योग किया जासकता है और यथायुक्त चिह्नों से संयुक्त राशियों के योग को ही बीजगणितीय योग कहते हैं; जैसे,

$$9+3+(-12)+1+(-10)+(-7)$$
$$=9+3-12+1-10-7=-16.$$

44. विजातीय पदों का योग (Addition of Unlike Terms).

विजातीय पदों का योगफल भी सजातीय पदों के योगफल की भाँति निकाला जाता है। विभिन्न पदों के गुणक बीजीय योगफल निर्धारित करके नहीं निकाले जाते।

उदाहरण। 5 रु०, 6 आ०, और 10 पा० को सजातीय राशि में परिवर्तित किये बिना उनके योग को 5 रु० 6 आ० 10 पा० के रूप में लिखना पड़ता है। इस प्रकार बीजगणित में भी दो अथवा दो से अधिक

विजातीय राशियों का योगफल निकालने के लिए उनको योग-चिह्न के द्वारा संयुक्त करके रखना होता है; जैसे,

a और b के योग को '$a+b$' इस प्रकार लिखना पड़ता है। x, $2y$ और $3z$ के योगफल को '$x+2y+3z$' लिखते हैं। इसको और सरल नहीं कर सकते।

a और $(-b)$ का योगफल $a+(-b)=a-b$.

इसीलिए किसी राशि a के साथ '$-b$' इस ऋण-राशि का योग करने पर या उस राशि में से 'b' धन-राशि को घटाने पर सर्वदा एक ही फल प्राप्त होता है।

45. घटाना (Subtraction).

विभिन्न चिह्नों से युक्त सजातीय पदों का योगफल निकालने के सिलसिले में घटाने के सम्बन्ध की भी सरल बातों पर विचार किया जा चुका है; जैसे,

$$3x+(-x)=3x-x=2x,\ 6a+(-8a)=6a-8a=-2a;$$
$$-7p+(-3p)=-7p-3p=-10p.$$

इन सब स्थलों में कई ऋण-राशियाँ जोड़ी गई हैं और यह सरलतापूर्वक समझ में आ जाता है कि इस प्रकार के योग और कुछ धन-राशियों के वियोग का अर्थ एक ही है।

इसलिए एक धन-राशि को घटाने पर और एक ही परम मान (Absolute Value) से युक्त एक ऋण-राशि का योग करने पर एक ही फल प्राप्त होगा। ये दोनों ही सिद्धान्त एक ही स्थान पर नीचे लिखे नियम के आकार में प्रकट किये जाते हैं:—

नियम—जब दो राशियों का अन्तर निकालना हो, तो घटाई जानेवाली राशि का चिह्न बदलकर दूसरी राशि में उस राशि को जोड़ देना चाहिए।

उदाहरण 1. $9xy$ में से $4xy$ को घटाओ।

यहाँ $9xy$ में $-4xy$ को जोड़ना होगा।

$$\therefore\ 9xy-4xy=9xy+(-4xy)=(9-4)xy=5xy.$$

उदाहरण 2. $6abc$ में से $-15abc$ घटाओ ।

यहाँ $6abc$ में $+15abc$ को जोड़ना होगा

$$\therefore\ 6abc-(-15abc)=6abc+15abc$$
$$=21abc.$$

46. कोष्ठ का उपयोग (Use of Brackets).

26 अनुच्छेद में वर्णन की गई व्याख्या से ज्ञात होता है कि $a+(b+c)$ का अर्थ यह है कि b और c के योग को a में जोड़ना होगा। b और c को एक-साथ जोड़कर उनके योगफल में a को जोड़ने से भी वही फल प्राप्त होगा ; इसलिए

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

इस प्रकार $a+(b-c)=a+b-c.$

अतएव कोष्ठ के पहले + चिह्न होने पर कोष्ठ के अन्तर्गत वर्त्तमान राशिमाला के चिह्न में किसी प्रकार का परिवर्त्तन किये बिना भी कोष्ठ हटाया जा सकता है।

फिर $a-(b+c)$ का अर्थ यह है कि b और c के योग को a में से घटाना होगा। b और c में से किसी एक को a में से घटा देने पर जो अन्तर निकले उसमें दूसरे को घटा देने पर भी एक ही फल प्राप्त होगा।

$$\therefore\ a-(b+c)=a-b-c.$$

इसी प्रकार $a-(b-c)=a-b+c.$

अतएव कोष्ठ से पहले '–' चिह्न होने पर भी यह कोष्ठ हटाया जा सकता है, परन्तु इस अवस्था में कोष्ठ के भीतर के सभी चिह्नों को बदल देना पड़ेगा।

उदाहरण 1. $9x+(6x-2x)$ को सरल करो।

दी हुई राशि $=9x+6x-2x=(9+6-2)x=13x.$

यहाँ कोष्ठ को हटा देने के बाद भी कोष्ठ के भीतर के सभी पदों के चिह्न पूर्ववत् हैं।

उदाहरण 2. $17xy-(15xy+4x)-(3xy-2x)$ को सरल करो ।

$$\begin{aligned}\text{दी हुई राशि} &= 17xy-15xy-4x-3xy+2x\\ &=(17-15-3)xy-4x+2x\\ &=-xy+(-4+2)x\\ &=-xy-2x.\end{aligned}$$

यहाँ कोष्ठ के भीतर के सभी पदों के चिह्न परिवर्तित कर दिये गये हैं ।

उदाहरण 3. कोष्ठ को हटाकर $a^2+2ab-b^2-(a^2-b^2+2ab-\overline{a^2-b^2})$ राशिमाला को सरल करो ।

$$\begin{aligned}\text{दी हुई राशिमाला} &= a^2+2ab-b^2-(a^2-b^2+2ab-a^2+b^2)\\ &= a^2+2ab-b^2-a^2+b^2-2ab+a^2-b^2\\ &=(1-1+1)a^2+(2-2)ab+(-1+1-1)b^2\\ &=a^2+0ab-b^2=a^2-b^2.\end{aligned}$$

यहाँ पहले रेखा कोष्ठ हटा दिया गया है ।

टीका—अन्यान्य कोष्ठों से युक्त उदाहरण बाद में दिये जायेंगे ।

प्रश्नावली 6.

नीचे लिखी राशियों का योगफल निकालो:—

1. $3x$ और $4x$.
2. $2x$ और $-3y$.
3. a और $4a$.
4. $2ab$, $-6ab$ और $9ab$.
5. $5a^2$, $3a^2$ और $16a^2$.

नीचे लिखी हुई योग और वियोग की क्रियाओं को सिद्ध करो:—

6. $5a+9a$.
7. $-7x+(-x)$.
8. $a^2-(-3a^2)$.
9. $21xy-13xy$.
10. $75p+(-25p)$
11. $6xr-(+9xr)$.
12. $17x^3+12x^3$.
13. $6abc-4abc$.
14. $28xyz+(-7xyz)$.

घटाओः—

15. $5x$ में से $3x$.

16. $22y$ में से $9y$.

17. $8x^2$ में से $11x^2$.

18. $13ax^2y$ में से $4ax^2y$.

19. $35abxy$ में से $19abxy$.

सरल करोः—

20. $x+2x+5x$.

21. $7a+4a-8a$.

22. $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x^2+2x^2$.

23. $9b+16b-13b$.

24. $8a^2-24a^2-17a^2+3a^2$.

25. x^2+x+3x^2-5x.

26. $3x^2-y^2+9x^2-4y^2$.

27. $y^2-x^2+3x+2x^2$.

28. $a^2b-ab+ab^2-3a^2b+ab^2$.

29. $ax-by+6ax+4x+3by$.

$a=4$ और $b=3$ होने पर नीचे लिखी हुई दोनों राशियों का अन्तर निकालोः—

30. a^2+a और a^3.

31. $3a+b$ और $3ab$.

32. $a+b^2$ और ab^2.

33. a^2-a और $2a-a^2$.

34. a^3-b^2 और $3a-2b$.

कोष्ठ हटाकर नीचे लिखी राशियों को सरल करोः—

35. $-5x+(11x-6x)$.

36. $(8x^2-3x^2)+(7x^2-4x^2)$.

37. $(a^2+b^2)-(a^2-b^2)+(2a^2-b^2)$.

38. $p^2-(6p^2-2p^2)+8p^2$.

39. $3(ax+by)-(3ax+by)$.

40. $x^2-y^2+(x^2+2xy+y^2)-(4y^2-3xy+x^2)$.

41. $(5a-2b)-(3a-4b)-(2a+7b)$.

42. $abc-(6a+bc)-(2a+3bc-abc)$.

सरल करो:—

43. $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}-\frac{a}{6}$.　　44. $\frac{xy}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{xy}{9}$.

45. $\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}b+\frac{1}{16}b$.　　46. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}$.

47. $\frac{3a^2}{8}-\frac{5b^2}{6}-\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{4}$.

48. $2x$, $3x$ और $5x$ का योग यदि 40 हो, तो x का मान बताओ।

49. $7x$, $-9x$ और $5x$ का बैजिक योगफल यदि 12 हो, तो x का मान क्या होगा ?

50. दो राशियों का योग $8x$ है। उनमें से एक राशि यदि $5x$ हो, तो दूसरी राशि बताओ।

51. दो राशियों का अन्तर $6a$ है। उनमें से बड़ी राशि यदि $9a$ हो, तो छोटी राशि बताओ।

47. बहुपद राशिमाला का योग (Addition of Compound Expressions).

जिन राशियों का योग करना हो वे यदि एक से अधिक पदों से युक्त हों तो केवल सजातीय पदों का एक साथ योग करना होगा। वास्तव में बीजगणित में मिश्र राशियों का योग अङ्कगणित की मिश्र राशियों के योग के समान एक ही नियम से सिद्ध किया जाता है।

नियम। यदि कई मिश्र राशिमालाओं का योग करना हो, तो राशिमालाओं को एक के नीचे एक इस प्रकार लिखना चाहिए कि विभिन्न राशिमालाओं के सजातीय पद एक ही खाने (Column) में पड़ें। बाद को बाईं ओर से आरम्भ करके प्रत्येक खाने के जोड़ राशिमालाओं के नीचे खींची हुई रेखा के नीचे रखना चाहिए।

उदाहरण 1. $a-2b+c$, $2a+3b-5c$ और $3a-4b-2c$ का योगफल निकालो।

सजातीय पदों को ख़ानों के क्रम से लिखकर नीचे लिखी हुई रीति से योग की क्रिया सिद्ध की गई है।

$$\begin{array}{r|rr} a & -2b & +c \\ 2a & +3b & -5c \\ 3a & -4b & -2c \\ \hline \mathbf{6a} & -3b & -6c \end{array}$$

$\therefore$ निर्णेय योगफल $=6a-3b-6c.$

क्रिया सम्पन्न करते समय स्तम्भ (Vertical Lines) छोड़ दी जाती हैं।

उदाहरण 2. $3x-5y+z, 2x+3y-4$ और $-4x+2y$ को जोड़ो।
सजातीय पदों को ख़ानों के क्रम से सजाकर

$$\begin{array}{r|rr|r} 3x & -5y & +z & \\ 2x & +3y & & -4 \\ -4x & +2y & & \\ \hline x & & +z & -4 \end{array}$$

$\therefore$ निर्णेय योगफल $=x+z-4.$

पहले ख़ाने में लिखे गये पदों का बैजिक योग x है और दूसरे ख़ाने के पदों का योग 0 है। तीसरे और चौथे ख़ाने में केवल एक एक पद होने के कारण वे वैसे ही नीचे रख दिये गये हैं।

प्रश्नावली 7.

यदि $a=3, b=4, x=1, y=2$ हो, तो नीचे लिखी राशिमालाओं का मान बताओ।

1. $a+a^2+a^3$ 2. $a^2+b^2+2ab.$

3. $2x+x^2+3x^3.$ 4. $a^2+x+b^2+y.$

5. $a^3+b^3+a^2x+b^2y.$

नीचे लिखी राशियों का योगफल निकालोः—

6. $a+b, a-b.$ 7. $a+b-c, a-b+c.$

8. $a+b+c,\ a-b-c,\ c-a+b.$

9. $x+y+z,\ x-y+z\ \ x+y-z,\ y+z-x.$

10. $2x-y+3z,\ x+4y-z,\ 4x+2y-2z.$

11. $-xy+yz+zx,\ -3xy-2yz+3zx,\ xy+yz-zx.$

12. $2a^2+4ax+3x^2,\ a^2-3ax+2x^2,\ ax-x^2,\ a^2+x^2.$

13. $x^2-y^2,\ x^2+2xy+y^2,\ 4y^2-3xy+x^2.$

14. $a^3+b^3+c^3,\ a^3-2b^3+c^3,\ 3a^3-4b^3-4c^3.$

15. $a^3-a^2+a,\ a^2-a+1,\ a^4-a^3-1.$

16. यदि $X=ax+by+cz$, $Y=-ax+by-cz$, $Z=ax-by+cz$ हो, तो $X+Y+Z$ और $X-2Y+3Z$ का मान क्या होगा ?

17. सरल करो:—

$12+(3x-ax)+(4ax-3y)+(ax+5y-16)+(4y-32-3ax).$

18. $5t^2+3t+2$ और $2t^2+5t+3$ का योगफल निकालो और $t=10$ होने पर प्रत्येक राशिमाला का मान निकालो ,

19. $f(x)\equiv x^2-6x+7,\ F(x)\equiv 3x^2+8x-15,\ K(x)\equiv -7x^2+9x+5$ और $x=2$ होने पर $f(x)+F(x)+K(x)$ का मान कितना होगा ? $x=-3$ होने पर उसका मान कितना होगा ?

20. $A\equiv x^2-xy+y^2,\ B\equiv 2x^2+3xy+4y^2$ और $C\equiv y^2-xy-2x^2$, $x=3$ और $y=5$ होने पर $A+B+C$ का संख्यात्मक मान कितना होगा ?

48. सरल राशियों का गुणा (Multiplication of Simple Expressions).

अङ्कगणित में देखने में आता है कि गुणा योग की ही एक संक्षिप्त क्रिया है; जैसे, 2 को 3 से गुणा करने का अर्थ है कि उसे 3 बार लेकर जोड़ने पर कितना होता है, यह निर्णय किया जाय। इसलिए $2\times 3=2+2+2=6$. इसी प्रकार बीजगणित में भी एक राशि को 2 या 2 से अधिक बार लेकर जोड़ने पर कितना होता है इसका निर्णय करने की संक्षिप्त क्रिया को गुणा कहते हैं; जैसे, $a\times b$ का अर्थ है कि a का b बार योग किया जाय अर्थात् $a\times b=a+b+\dots\dots\dots(b)$ संख्यक पद तक $=a\times b.$

$2 \times 3 \times 4$ से बोध होता है कि 2 और 3 के गुणनफल को अर्थात् 2×3 को 4 से गुणा करना होगा किन्तु इसके द्वारा $2 \times 3 \times 2 \times 4$ का बोध नहीं होता।

इसी प्रकार $2ab$ का अर्थ है $2 \times a \times b$; किन्तु $2a \times 2b$ नहीं।

किसी कोष्ठ के भीतर यदि 2 या 2 से अधिक पद हों, तो कोष्ठ के बाहर के गुणक के द्वारा उनमें से प्रत्येक का गुणा करना होगा; जैसे,

$$2(3+4) = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14.$$

इसी प्रकार $x(y+z) = xy + xz.$

उदाहरण 1. $3x$ को $5y$ से गुणा करो।

$$3x \times 5y = 3 \times 5 \times x \times y = 15xy.$$

उदाहरण 2. $x + 2y$ को $3z$ से गुणा करो।

$$(x+2y) \times 3z = x \times 3z + 2y \times 3z = 3xz + 6yz.$$

49 गुणन का क्रम (Order of Multiplication).

जिस प्रकार अङ्कगणित में किसी गुणनफल के गुणनखण्डों के क्रम में परिवर्तन कर देने पर उस गुणनफल में किसी प्रकार का परिवर्तन नहीं होता वैसे ही बीजगणित में भी a और b चाहे कैसी ही दो राशियाँ हों हर अवस्था में

$$a \times b = b \times a \text{ अर्थात् } ab = ba.$$

$\because$ a और b चाहे किसी भी क्रम से क्यों न हों यह नियम सर्वदा लागू होगा। अतएव a, b और c चाहे कैसी ही राशियाँ क्यों न हों,

$$abc = (ab) \times c = (ba)c = bac.$$

$$bac = b \times ac = bca$$

$$bac = (ba) \times c = c \times (ba) = cba \text{ आदि।}$$

इससे प्रतीत होता है कि गुणकों के क्रम में इच्छानुसार परिवर्त्तन किया जासकता है।

इसे गुणा का **क्रम विनिमय नियम** (Commutative Law) कहते हैं।

उदाहरण। $a \times 2b \times 3c = 2 \times 3 \times a \times b \times c = 6abc.$

50. गुणा का संकलन नियम (Associative Law).

$$abcd = a \times b \times c \times d$$
$$= (ab) \times (cd)$$
$$= a \times (bc) \times d$$
$$= a \times (bcd).$$

यही गुणा का 'संकलन नियम' है। इस नियम के अनुसार गुणकों को इच्छानुसार किसी भी क्रम से संघबद्ध किया जाता है।

उदाहरण 1. $3x$ को $-4y$ से गुणा करो।

§ 38 में वर्णन किये गये चिह्न समूहों की नियमावली से यह देखने में आता है कि गुणनफल एक ऋण-राशि (Negative) है, और हम यह भी जानते हैं कि

$$3x \times 4y = 3 \times 4 \times x \times y = 12xy,$$

अतएव $3x \times (-4y) = -12xy.$

उदाहरण 2. $-5ax$ को $-6by$ से गुणा करो।

यहाँ गुणनफल धन-राशि (Positive) होगी। (§ 38)

इसलिए $(-5ax) \times (-6by) = 30abxy.$

51. गुणन का घातांक नियम (Index Law).

गुणा की संज्ञा से देखने में आता है कि $a^3 = a \times a \times a$ और $a^4 = a \times a \times a \times a$;

$$\therefore\ a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaa.aaaa = a^{3+4}.$$

इस प्रकार साधारण रूप से m और n चाहे कोई भी अखण्ड धन-संख्या क्यों न हों,

$$a^m \times a^n = (a.a.a \ldots\ldots m \text{ संख्यक गुणक तक})$$
$$\times (a.a.a \ldots\ldots n \text{ संख्यक गुणक तक})$$
$$= a.a.a \ldots\ldots (m+n) \text{ संख्यक गुणक तक}$$
$$= a^{m+n}.$$

इसलिए देखने में आता है कि गुणकों के a के सभी घातांकों का योग करने पर गुणनफल में a का घातांक प्राप्त होता है। यही गुणक का घातांक नियम है।

दो से अधिक संख्यक गुणकों का गुणनफल निकालते समय भी उक्त नियम काम में लाया जा सकेगा ।

गुणकों में विभिन्न अक्षरों के घात वर्त्तमान रहने पर भी गुणनफल के अन्तर्गत प्रत्येक अक्षर का घातांक ही उक्त नियम के अनुसार निकाला जाता है किन्तु घातांक निर्णय करते समय एक अक्षर के घातांक के साथ दूसरे अक्षर के घातांक का योग न होने पावे इसके लिए सावधान रहना आवश्यक है ।

टीका—ऋण-राशि का समघात धन और विषमघात ऋण होगा ।

उदाहरण 1. $5x^2$ को $8x^5$ से गुणा करो ।

निर्णय गुणनफल $= 5x^2 . 8x^5 = 5\times 8\times x^{2+5}$
$= 40x^7.$

उदाहरण 2. $2a^2, 3a^5$ और $5a^7$ का गुणनफल निकालो ।

निर्णय गुणनफल $= 2a^2\times 3a^5\times 5a^7$
$= 2\times 3\times 5\times a^{2+5+7}$
$= 30a^{14}.$

उदाहरण 3. $7a^2x^3y^4$ को $4ax^5y^6z^2$ से गुणा करो ।

निर्णय गुणनफल $= 7a^2x^3y^4\times 5ax^5y^6z^2$
$= 7\times 5\times (a^2\times a)\times (x^3\times x^5)\times (y^4\times y^6)\times z^2$
$= 7\times 5\times a^{2+1}. x^{3+5}. y^{4+6}. z^2$
$= 35a^3x^8y^{10}z^2.$

टीका—$(x^2)^3$ और $x^2\times x^3$ का भेद ध्यान में रखना आवश्यक है ।
$(x^2)^3 = x^2\times x^2\times x^2 = x^{2+2+2} = x^6$; किन्तु $x^2\times x^3 = x^{2+3} = x^5$.

प्रश्नावली 8.

पहली राशि का दूसरी राशि से गुणा करोः—

1. $3a, b.$ 2. $-xy, 2x.$ 3. $5x^2, xy^2.$
4. $a^3, ab.$ 5. $-a^2b, 3.$ 6. $(x+y), z.$
7. $(x-y), a^2.$ 8. $(x+2y), (-xy)$ 9. $(a+b), ab.$
10. $3abc, (-2a^2b^2c^2).$

सरल करो:—

11. $x^2 \times x$.   12. $x^3 \times xy^2$.

13. $a^4 \times a^3$.   14. $2a^2x^3 \times 5bx^2$.

15. $x^2 \times x^n$.   16. $x^a \times x^b$.

17. $5x^4y^3 \times (-4y^2z^2)$.   18. $xy^2 \times yz^2 \times zx^2$.

19. $a^2b^3 \times b^4c^3 \times cd^4$.   20. $(3x^3y^2z) \times (-x^2y^3z^4) \times (7xy^2z)$.

21. $-ax^2$, x^3y^2 और a^2b^6 राशियों का तृतीय घात निकालो ।

22. $(a^4)^5$ और $a^4 \times a^5$ का भेद क्या है ?

23. $a=2$, $b=3$, $x=4$ और $z=5$ हो, तो $(b^4)^6$, $(-z^2)^5$ और $(a^2x^2)^3$ का मान निकालो ।

24. $ab+b$, $x+2xy$ और x^2+xy का गुणनफल क्या होगा ?

52. सरल राशियों का भाग (Division of Simple Expressions).

अङ्कगणित के समान बीजगणित में भी भाग की क्रिया सिद्ध करते समय एक ऐसी राशि का निर्णय करना पड़ता है जिसके द्वारा भाजक राशि का गुणा करने पर भाज्य राशि प्राप्त की जा सके। यह बहुधा भाज्य और भाजक के गुणक का निर्णय करके भी सम्पन्न किया जाता है; जैसे,

$$24 \div 8 = \frac{24}{8} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = 3;$$

$$2a^2b \div ab = \frac{2a^2b}{ab} = \frac{2 \times a \times a \times b}{a \times b} = 2a;$$

$$x^5 \div x^3 = \frac{x^5}{x^3} = \frac{x \times x \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}}{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}} = x^2.$$

भाग गुणा की विपरीत क्रिया है। कारण हम जानते हैं कि $\frac{a}{b} \times b = a$ अर्थात् $(a \div b) \times b = a$.

अर्थात् भागफल × भाजक = भाज्य ।

टीका 1—$\frac{a}{b}$ अथवा a/b का अर्थ है $a \div b$.

टीका 2—चूँकि $1 \times a = a$, इसलिए $a \div a = 1$.

टीका 3—चूँकि भाग गुणा की विपरीत क्रिया है, इसलिए गुणा का क्रम विनिमय और संकलन नियम भाग में भी लागू होना चाहिए।

उदाहरण 1. चूँकि $3 \times x = 3x$, अतएव $3x$ को 3 से भाग देने पर x आवेगा और x से भाग देने पर 3 आवेगा।

$\therefore\ 3x \div 3 = x$; और $3x \div x = 3$.

उदाहरण 2. $45x^3y^4z^2$ को $9x^2y^3z$ से भाग दो।

$$45x^3y^4z^2 \div 9x^2y^3z$$
$$= \frac{5 \times \cancel{9} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times x \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times y \times \cancel{z} \times z}{\cancel{9} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times \cancel{y} \times \cancel{z}}$$
$$= 5 \times x \times y \times z = 5xyz.$$

53. हटाने का नियम (Rule of Cancelling).

$4x$ को $2x$ से और 4 को 2 से भाग देने पर एक ही भागफल 2 प्राप्त होता है। यहाँ भाज्य और भाजक दोनों को ही x से भाग दिया गया है। इस प्रकार भाग देने को 'x हटा दिया गया है' कहते हैं। अतः देखने में आता है कि भाज्य और भाजक दोनों में से उनका साधारण गुणनखंड हटाया जासकता है और उसके कारण भागफल में किसी प्रकार का भी व्यतिक्रम नहीं होता।

टीका—हटाने के नियम के प्रयोग के सम्बन्ध में विशेष सावधानी रखने की आवश्यकता है क्योंकि केवल साधारण गुणनखंडों को ही हटाया जाता है; जैसे, $4x \div 2x = 2$, किन्तु $(4+x) \div (2+x)$, 2 के समान नहीं है; कारण $4+x$ और $2+x$ का ऐसा कोई साधारण गुणनखंड नहीं है जो हटाया जा सके।

54. घातांक का नियम (Index Law).

उपर्युक्त नियम के अनुसार $x^5 \div x^3 = x^2 = x^{5-3}$ और $x^3 \div x^5 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{5-3}}$. इस प्रकार साधारणतः m और n चाहे कोई भी अखण्ड धन-

संख्या क्यों न हों, $a^m \div a^n = a^{m-n}$ अर्थात् भागफल का चाहे किसी भी अक्षर का सूचक भाज्य हो, भाजक के इस अक्षर के दोनों सूचकों का अन्तर समान होगा। यही भाग का घातांक नियम है और यह गुणा के घातांक नियम से सरलतापूर्वक अनुमान किया जासकता है।

टीका 1—चूँकि $a \div a = 1$ और वर्तमान नियम के अनुसार $a \div a = a^{1-1} = a^0$ इसलिए $a^0 = 1$ और $x^p \div x^p = x^0 = 1$.

अतः जब कभी किसी राशि का घातसूचक शून्य हो, तो उसका मान सदा ही एक होगा।

टीका 2—यदि भाज्य और भाजक भिन्न अक्षरों के घात के गुणनफल हों, तो भागफल में भी इन अक्षरों के घात वर्तमान रहेंगे और प्रत्येक घात के घातांक भाज्य और भाजक के अन्तर्गत इस अक्षर के दोनों घातों के घातांक के अन्तर के समान होगा; जैसे,

$$a^4 b^6 \div a^3 b^3 = \frac{a^4 b^6}{a^3 b^3} = a^{4-3} b^{6-3} = ab^3;$$

साधारणतः $\dfrac{a^x b^y c^z}{a^p b^q c^r} = a^{x-p} b^{y-q} c^{z-r}$ इत्यादि।

उदाहरण 1. $16y^7$ को $8y^2$ से भाग दो।

$$16y^7 \div 8y^2 = \frac{16y^7}{8y^2} = \frac{2 \times 8y^2 \times y^5}{8 \times y^2} = 2y^5.$$

उदाहरण 2. $45abc^3$ को $5ac$ से भाग दो।

$$= 45abc^3 \div 5ac = \frac{45abc^3}{5ac} = \frac{9 \times 5 \times a \times b \times c^3}{5 \times a \times c}$$

$$= 9 \times a^{1-1} \times b \times c^{3-1} = 9 \times a^0 \times b \times c^2 = 9bc^2.$$

55. चिह्न सम्बन्धी नियम (Rule of Signs).

गुणा के चिह्न सम्बन्धी नियम भाग में भी लागू होते हैं (देखो अनुच्छेद § 38 और 39), अतएव

$$xy \div x = y, \qquad xy \div (-x) = -y,$$
$$-xy \div x = -y, \quad -xy \div (-x) = y.$$

अतः गुणा की भाँति भाग में भी जब दो राशियाँ समान चिह्न से युक्त होती हैं तब उनका भागफल एक धन-राशि होती है और जब वे असमान चिह्न से युक्त होती हैं तब उनका भागफल एक ऋण-राशि होती है।

56. भाग का विकलन नियम (Distributive Law).

$a\times(b+c)=ab+ac$; दोनों ही ओर की दोनों समान राशियों को a से भाग देने पर

$$b+c=\frac{ab+ac}{a}=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}.$$

अतः $a+b$ को जब c से भाग देना हो, तो a और b में से प्रत्येक को c से भाग देकर दोनों ही आंशिक भागफलों को जोड़ लेना होगा। इसे भाग का विकलन नियम (Distributive Law) कहते हैं।

टीका 1—ध्यान रखना होगा कि $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$,

किन्तु $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ के समान नहीं है।

टीका 2—स्मरण रखो कि भाज्य यदि मिश्र राशि हो, तो उसके प्रत्येक पद को भाजक से भाग देना पड़ता है। केवल एक पद को भाग देने से अशुद्ध हो जायगा। अर्थात् $\frac{3xy+x}{x}=3y$ कहना अशुद्ध होगा।

उदाहरण। $3x^2y+15xy^2$ को $3xy$ से भाग दो।

$$(3x^2y+15xy^2)\div 3xy=\frac{3x^2y}{3xy}+\frac{15xy^2}{3xy}=x+5y.$$

57. गुणा और भाग का क्रम (Order of Division and Multiplication).

जोड़ने और घटाने के समान (अनुच्छेद 43 टीका 2) गुणा और भाग की क्रिया भी किसी भी क्रम से सम्पन्न की जासकती है; जैसे,

$$4\times 6\div 2=4\div 2\times 6=6\div 2\times 4;$$

इसी प्रकार $x\times y\div z=x\div z\times y=y\div z\times x.$

भाग गुणा की ही विपरीत क्रिया है और 2 वा 2 से अधिक गुणकों के क्रमिक गुणनफल का निर्णय करते समय गुणक किसी भी क्रम से लिखे जा सकते हैं, इसलिए 2 या 2 से अधिक भाग के चिह्न एक के बाद एक होने पर भाग की क्रियाएँ भी क्रम के अनुसार सिद्ध की जाती हैं और किसी भी राशि को एक के बाद एक कई राशियों से भाग देने पर जो भागफल प्राप्त होता है उसको अन्त में कही गई राशियों के गुणनफल से भाग देने पर भी वही (एक ही) भागफल प्राप्त होगा, जैसे,

$$x \div y \div z = x \div z \div y = x \div (yz) = x \div yz.$$

किसी कोष्ठ के भीतर यदि 2 का 2 से अधिक गुणा या भाग के चिह्न अथवा दोनों ही चिह्न वर्त्तमान हों, तो कोष्ठ के भीतर की क्रियाएँ पहले कर लेनी होंगी।

जैसे, $a \times (b \times c \div d) = a \times b \times c \div d;$

किन्तु, $a \div (b \times c \div d) = a \div b \div c \times d,$

किसी कोष्ठ के भीतर केवल एक गुणा या गुणा का चिह्न अथवा एक एक दोनों ही चिह्न वर्त्तमान हों तो कोष्ठ हटाया जासकता है। कोष्ठ के पहले $\times$ चिह्न होने पर कोष्ठ हटाते समय उसके भीतर के किसी चिह्न में परिवर्त्तन नहीं करना होता किन्तु कोष्ठ के पहले $\div$ चिह्न होने पर उसके भीतर प्रत्येक $\times$ चिह्न को $\div$ चिह्न में और $\div$ चिह्न को $\times$ चिह्न में परिवर्तित करना पड़ता है।

प्रश्नावली 9.

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्नों में पहली राशि को दूसरी राशि से भाग दोः—

1 $5a, a, 3xy, x; 12xy^2, 3xy.$

2. $16a^2b^3, 4ab; -8ax, 4x, 48pq^2r, (-6pq),$

3. $-x^3, x^2; (-7a^3), (-7), 6m^2, 3m.$

4. $15a^3x^4z^3, 5ax^2z^2; 8a^2b^3c^5, -4ab^2c^3.$

5. $6x^8, 3a; x, x^3; 3x^9, x^6; 24y^{12}, 8y^5.$

6. $(ab+b), b, (px^2+py^2), p; (axy+amn), a.$

7. $(mpq - mxy)$, m; $(abc - bcd)$, bc; $(ax - a^2x^2)$, ax.

8. $(xy^2z - x^2yz^3)$, xyz, $(p^3q^2r^4 + p^2q^3r^4)$, $p^2q^2r^2$.

9. $(a^2 - ax + ay)$, a; $(a - ax + ay)$, $(-a)$; $(2x^2 - bx - 3cx)$, $(-x)$.

10. $(x^4 - 3x^3 + 4x^2)$, x^2; $(3a^6 - 6a^4 - 9a^3)$, $(-3a^3)$.

सरल करोः—

11. $ab \times (ab \div b)$; $ab \div (ab \div b)$; $x^2y^2 \div (x \times y)$; $x^2y^2 \times (x \div y)$.

12. $4ax^2 \div (2a^2x \div ax)$; $15x^3 \times (x^5 \div x^2 \div x)$;
$18x^6y^8 \div (12x^5y^4 \div x^3y^3 \times xy)$.

13. $-a^2b^3c \div (ab^2c^3 \times a^2bc \div abc)$; $a^3x^4y^3 \div (x^2y^2 \times a^2x \div axy^2)$.

नीचे लिखी भाग की क्रियाएँ सिद्ध करोः—

14. $\dfrac{32a^4b^3c}{-8abc}$; $\dfrac{-60x^6y^7z^9}{12x^3y^4z^5}$; $\dfrac{25p^8q^8r^8}{5p^2q^2r^2}$.

15. $-3xy^2z^3$ को किस राशि से गुणा करें कि गुणनफल $6x^2y^4z^5$ प्राप्त हो ?

16. भाजक a और भागफल b होने पर भाज्य क्या होगा ?

17. $12a^2x^3b^2y^3$ को किस राशि से भाग देने पर भागफल $3ax^2by^2$ होगा ?

——:o:——

पाँचवाँ अध्याय

सांकेतिक वाक्य और सूत्रगठन

58. सांकेतिक वाक्य (Symbolical Expression).

इससे पहले कहा गया है कि बीजगणित में अङ्कगणित के समस्त नियम व्यापक भाव से उपयोग में लाये जाते हैं और इसके द्वारा अङ्कगणित के ज्ञान में विशेषरूप से वृद्धि होती है। इसकी सहायता से साधारण भाषा में प्रकट की जानेवाली विभिन्न राशियों का परस्पर का सम्बन्ध बहुत संक्षेप में प्रकट कर दिया जाता है। यही बीजगणित की सबसे अधिक आवश्यक उपयोगिता है। बीजगणित सम्बन्धी संकेत अर्थात् अक्षर और चिह्नों की सहायता से भी उक्त सम्बन्ध सांकेतिक आकार में प्रकट किया जाता है। विभिन्न राशियों के सम्बन्ध के इस सांकेतिक वर्णन को ही **सांकेतिक वाक्य** (Symbolical Expression) कहते हैं।

पहले-पहल विद्यार्थियों के लिए सांकेतिक वाक्य की रचना कठिन होती है। उनको सुविधा के लिए किस प्रकार संख्याएँ बीजगणितीय अक्षरों के द्वारा सूचित हो सकती हैं इस बात की व्याख्या पहले ही बहुत सरल उदाहरणों के द्वारा की जाचुकी है। यहाँ कुछ और उदाहरण दिये जारहे हैं।

59. सांकेतिक वाक्य के उदाहरण।

(1) जिस प्रकार '4 से 3 अधिक' संख्या को '$4+3$' इस रूप में लिखना होता है, वैसे ही 'x से 3 अधिक' संख्या को '$x+3$' के रूप में लिखना होता है।

(2) जिस प्रकार 7 में से 5 घटाने पर $7-5$ आता है, उसी प्रकार a में से b घटाने पर $a-b$ राशि आती है।

(3) 4 और 5 का गुणनफल 4×5 है, इसी प्रकार x और y का गुणनफल $x\times y$ या $x.y$ या xy होता है। [$4\times 5=20$, 45 नहीं, किन्तु $x\times y=xy$.]

(4) 18 का एक गुणनखण्ड 6 हो, तो दूसरा $18 \div 6$ होगा। इसी प्रकार a का गुणनखण्ड b होने पर दूसरा $a \div b$ होगा।

(5) 2 अङ्कों से युक्त 36 संख्या 3 दहाई और 6 इकाई के बराबर है अर्थात् $3 \times 10 + 6 = 36$. इसी प्रकार 2 अङ्कों से युक्त किसी संख्या के दोनों अङ्क यदि x और y हों, तो वह संख्या $10x + y$ के समान होगी; अङ्कगणित में 2 अङ्कों से लिखी जानेवाली संख्या के समान न होगी। [x और y का स्थानीय मान क्रमशः x दहाई और y इकाई है।]

(6) 5 रुपये $= (5 \times 16)$ आना, इसी प्रकार x रुपया $= (x \times 16)$ आना $= 16x$ आना। x मन $= 40x$ सेर आदि।

(7) यदि 25 मील रास्ता तै करने में 5 घण्टे लगें, तो चाल प्रति-घण्टा $= 25 \div 5$ मील। इसी प्रकार x मील रास्ता तै करने में यदि y घं० का समय लगे, तो चाल घण्टे में $x \div y$ मील होगी।

(8) राम की वर्त्तमान अवस्था 10 वर्ष होने पर 6 वर्ष पहले उसकी अवस्था $(10-6)$ वर्ष थी और 6 वर्ष बाद वह $(10+6)$ वर्ष होगी। इसी प्रकार श्याम की वर्त्तमान अवस्था x वर्ष होने पर y वर्ष पहले उसकी अवस्था $(x-y)$ वर्ष थी और y वर्ष बाद $(x+y)$ वर्ष होजायगी।

प्रश्नावली 10. (मौखिक)

1. 2 संख्याओं का योग x है। उनमें से छोटी संख्या 6 है, तो बड़ी संख्या बताओ।
2. दो संख्याओं का गुणनफल 15 है। उनमें से एक यदि p हो, तो दूसरी बताओ।
3. x शिलिंग में कितने पेंस होंगे ?
4. y मन में कितने छटाँक होंगे ?
5. कोई आदमी x घं० में यदि 100 मील चले, तो उसकी चाल प्रति घण्टा बताओ। x मील की दूरी तै करने में यदि 10 दिन लगें, तो उस आदमी की चाल प्रतिदिन कितने मील की होगी ?
6. y मन जल आनेवाले पीपे से कितनी बोतलें भरी जासकेंगी जबकि एक बोतल में x सेर जल आता है ?

7. x संख्या के निकटतम पूर्ववर्त्ती और परवर्त्ती अखण्ड संख्याएं निर्धारित करो।

8. x विषम संख्या की निकटतम परवर्त्ती दो विषम संख्याएं बताओ।

9. x सम संख्या की निकटतम पूर्ववर्त्ती दो सम संख्याएँ बताओ।

10. 30 से किसी एक संख्या की अधिकता, किसी एक संख्या से 30 की अधिकता और किसी एक संख्या से 30 अधिक बड़ी एक संख्या को संकेत द्वारा प्रकट करो।

11. एक बालक की वर्त्तमान अवस्था x वर्ष है। बताओ 18 वर्ष पहले उसकी अवस्था क्या थी और 8 वर्ष बाद क्या होगी।

12. किसी एक आयत क्षेत्र की चौड़ाई, जिसका क्षेत्रफल 24 वर्गगज़ है, x गज़ हो, तो उसकी लम्बाई बताओ।

13. x^2 वर्गइंच क्षेत्रफलवाले वर्गक्षेत्र की परिमिति (Perimeter) निकालो।

14. $3x$ में a कितने बार शामिल है ?

15. एक पुस्तक का मूल्य 13 पा० हो, तो $5x$ पुस्तकों का मूल्य बताओ।

16. m संख्या में हरएक x के समान संख्याओं का योग और गुणनफल निकालो।

17. 3 मील प्रति घंटा की चाल से चलने पर x मील चलने में कितने घंटे लगेंगे ? प्रति घं० y मील की चाल से चलने पर x घं० में कितने मील की यात्रा की जासकेगी ?

18. x फ़ुट लम्बे और y फ़ुट चौड़े कमरे के फ़र्श पर दरी बिछवानी है, बताओ कितने वर्ग गज़ दरी की ज़रूरत पड़ेगी।

19. x रुपये 3 आदमियों में बराबर बराबर बाँटे गये, तो बताओ हरएक को कितना मिला।

20. 20 को दो भागों में बाँटा गया। उनमें एक भाग यदि x हो, तो दूसरा भाग क्या होगा ?

60. संख्या और गुणितक-समूह का सांकेतिक परिचय ।

कोई अङ्क, संख्या या उनके गुणितक-समूह संकेत द्वारा सूचित किये जासकते हैं ।

I. **संलग्न संख्या**—कोई संख्या यदि x द्वारा सूचित हो, तो उससे बाद की संलग्न संख्याएँ क्रमशः $x+1$, $x+2$, $x+3$........होंगी और उसके पहले की संलग्न संख्याएँ क्रमशः $x-1$, $x-2$, $x-3$........होंगी ।

उदाहरण 1. किसी भी पाँच संलग्न संख्याओं का योग 5 का गुणितक होगा ।

संलग्न संख्याएँ $(x-2)$, $(x-1)$ और $(x+2)$ मानली जाने पर इनका योग $5x$ होगा । इसलिए यह योग 5 का **गुणितक** है ।

उदाहरण 2. दो संलग्न संख्याओं में से पहली x हो, तो उनका गुणनफल निकालो ।

यहाँ दोनों संख्याएँ x और $x+1$ हैं ।

$\therefore$ गुणनफल $= x \times (x+1) = x^2 + x$.

II. सम और विषम संख्याएँ (Odd and Even Numbers).

प्रत्येक सम संख्या 2 से बाँटी जासकती है, इसलिए सम संख्या को $2x$ से सूचित किया जाता है । यहाँ x एक अखण्ड संख्या है । फिर एक विषम संख्या एक सम संख्या के निकटतम पूर्व और परे वर्त्तमान है और $2x$ इष्ट सम संख्या के निकटतम पूर्व में और परे में वर्त्तमान 2 अखण्ड संख्याएँ क्रमशः $2x-1$ और $2x+1$ हैं । इसलिए सम संख्या को सदा $2x+1$ या $2x-1$ से सूचित करना होगा । [यहाँ x एक अखण्ड संख्या है] ।

जैसे, 4 एक सम संख्या है, इसलिए यह $2x$ द्वारा सूचित की जाती है । यहाँ $x=2$ है ।

9 एक विषम संख्या है, इसलिए इसे $2x+1$ द्वारा सूचित किया जाता है । यहाँ $x=4$. 1 को भी $2x+1$ द्वारा सूचित किया जाता है । यहाँ $x=0$.

अतः x को शून्य या कोई भी अखण्ड संख्या मानकर $2x+1$ द्वारा 1 से लेकर कोई भी विषम संख्या सूचित की जाती है।

सम अथवा विषम ऋण-संख्याएँ ऊपर लिखे हुए संकेतों द्वारा सूचित की जाती हैं। यहाँ x को अखण्ड ऋण संख्या मान लेना होगा। अतः x को धन अथवा ऋण अखण्ड संख्या मानकर किसी भी सम संख्या को $2x$ से और किसी भी विषम संख्या को $2x-1$ अथवा $2x+1$ से सूचित किया जाता है।

टीका—उक्त सांकेतिक नियम के अनुसार सरलतापूर्वक ही ऋण-संख्याओं का सम अथवा विषम घात निकाला जासकता है।

चूँकि $(-1)^{2x}=+1$ और $(-1)^{2x}+1=-1$;

इसलिए, $(-a)^{2x}=(-1)^{2x}\times a^{2x}=+a^{2}$;

और $(-a)^{2x+1}=(-1)^{2x+1}\times a^{2x+1}=-a^{2x+1}$.

अर्थात् ऋण-संख्याओं का समघात धन और विषम घात ऋण होगा।

उदाहरण 1. 3 संलग्न विषम संख्याओं में से मध्यम संख्या x हो, तो शेष दोनों संख्याएँ क्या हैं?

यहाँ x एक विषम संख्या है।

$\therefore$ $x-1$ और $x+1$ इसकी निकटतम सम संख्याएँ हैं।

$\therefore$ परवर्त्ती निकटतम दोनों संख्याएँ विषम होंगी और वे $x-2$ और $x+2$ से सूचित होंगी।

$\therefore$ निर्णेय दोनों संख्याएँ $x-2$ और $x+2$ हैं।

उदाहरण 3. किसी भी तीन संलग्न विषम संख्याओं का योग 3 का गुणितक होगा। मानलो, $2x+1$, $2x+3$ और $2x+5$ तीन संलग्न विषम संख्याएँ हैं।

$$\text{इन सबका योग} = (2x+1)+(2x+3)+(2x+5)$$
$$= 6x+9 = 3(2x+3).$$

यह $2x+3$ मध्यम संख्या का 3 गुना है।

III. संख्या समूह का गुणितक।

(*i*) कोई संख्या x द्वारा सूचित रहने पर उसके किसी भी गुणितक को nx द्वारा सूचित किया जाता है। यहाँ n एक अखण्ड संख्या है।

(*ii*) n एक अखण्ड संख्या होने पर कोई भी ऐसी संख्या जो x से बाँटी जासके nx से सूचित की जाती है।

जैसे, $5x$, x से बाँटी जासकती है और यह x का एक गुणितक है।

IV. आंशिक विभाग (Divisions into Parts).

एक अखण्ड संख्या दो या दो से अधिक अंशों में विभक्त की जासकती है इस सम्बन्ध में दो बातों पर विचार करना आवश्यक है।

(*i*) 12 को 2 अंशों में विभक्त करने पर यदि एक अंश 7 हो, तो दूसरा $12-7=5$ होगा। इस प्रकार यदि x अखण्ड संख्या के दो अंशों में से एक अंश a हो तो दूसरा अंश $x-a$ होगा।

यहाँ दो अंशों का योग दी हुई संख्या के समान होगा।

(*ii*) 15 का एक तृतीय अंश $15\div3$, अथवा $15\times\frac{1}{3}$ है। इस प्रकार x संख्या का pवाँ अंश $x\div p$ अथवा $x\times\frac{1}{p}=\frac{x}{p}$.

21, 28 का कौनसा अंश है? इस प्रश्न के उत्तर में 21, 28 का $21\div28$, या $\frac{3}{4}$ अंश है।

इसी प्रकार a का $\frac{x}{a}$वाँ अंश x है क्योंकि a और $\frac{x}{a}$ का गुणनफल x है।

उदाहरण 1. एक आदमी x दिन में एक कार्य कर सकता है, तो बताओ कि वह एक दिन में उस कार्य का कौनसा अंश पूरा कर सकेगा।

सम्पूर्ण कार्य को इकाई मान लेने पर वह आदमी एक दिन में कार्य का $\frac{1}{x}$ अंश पूरा कर सकेगा।

उदाहरण 2. एक संख्या का आधा उस संख्या के एक तृतीय अंश से कितना अधिक है ?

यदि संख्या x हो, तो $\frac{x}{2}$ उसका आधा और $\frac{x}{3}$ उसका तृतीय अंश होगा।

$\therefore$ उनका अन्तर $=\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x=\frac{1}{6}x.$

$\therefore$ संख्या का आधा उसके तृतीय अंश से उस संख्या का छठवाँ अंश अधिक है।

V. संख्या के अङ्क-समूह (Digits of a Number).

अङ्कगणित में पूर्ण संख्या अङ्क की सहायता से लिखी जाती है। प्रत्येक अङ्क के दो प्रकार के मान होते हैं। एक उसका स्थानीय मान (Local Value) और दूसरा वास्तविक मान (Intrinsic Value) होता है; जैसे, 325 संख्या तीन अङ्कों के द्वारा बनी हुई है। इनका वास्तविक मान क्रमशः 3, 2, 5 है। परन्तु इनका स्थानीय मान क्रमशः 3×100, 2×10 और 5 है।

इसलिए $325=300+20+5$.

फिर इन अङ्कों को यदि विपरीत क्रम से लिखा जाय, तो 523 हो जाता है। यह $5\times100+2\times10+3$ के बराबर है।

इसी प्रकार बीजगणित में भी 10 का गुणितक और 10 के घात-समूह की सहायता से किसी भी संख्या को उसके अङ्क-समूह द्वारा प्रकट किया जाता है।

जैसे, यदि 2 अङ्कों से बनी हुई किसी संख्या के दोनों अङ्क बाईं ओर से आरम्भ करके क्रमशः x और y हो, तो वह संख्या $10x+y$ के समान होगी। उन अङ्कों को यदि विपरीत क्रम से लिखा जाय, तो वह संख्या $10y+x$ के समान होगी।

उदाहरण। तीन अङ्कों से बनी हुई संख्या के तीनों अङ्क बाईं ओर से आरम्भ करके क्रमशः x, y और z हैं। उस संख्या का मान बताओ।

सैकड़े के स्थान का अङ्क x है; इसलिए उसका स्थानीय मान $x\times100$ या $100x$ है। दहाई के स्थान का अङ्क y है; इसलिए उसका स्थानीय मान $y\times10$ या $10y$ है।

इसलिए निर्णेय संख्या $= 100 + 10y + z.$
विपरीत क्रम से लिखने पर प्राप्त संख्या $= 100z + 10y + x.$

VI. सिक्कों का सांकेतिक परिचय (Representation of Coins).

5 रु० 6 आ० 4 पा० $= 5 \times (16 \times 12) + 6 \times 12 + 4$ अर्थात् 10036 पाई के समान ।

इसी प्रकार x रु० y आ० z पा० $= x \times (16 \times 12) + y \times 12 + z$
$= 192x + 12y + z$ पा० ।

इस प्रकार किसी भी मिश्र राशि को सजातीय सरल राशि में परिवर्तित कर लिया जाता है । इसके विपरीत किसी भी सरल राशि को सजातीय मिश्र राशि में परिवर्तित कर लिया जाता है ।

16 आ० $= 1$ रु०, इसलिए x आ० $= \frac{x}{16}$ रु० ।

इसी प्रकार x पा० $= \frac{x}{12}$ आ० $= \frac{x}{12 \times 16}$ रु० ।

उदाहरण । एक थैली में x रु० y आना हैं । उसमें से z आ० खर्च कर दिया गया । अब जो सिक्के बच गये हों उनका परिमाण पाइयों में प्रकट करो ।

x रु० $= 16x$ आ०;
$\therefore x$ रु० y आ० $= (16x + y)$ आना ।
शेष सम्पत्ति $= (16x + y) - z$ आना
$= (16x + y - z) \times 12$ पाई ।

प्रश्नावली 11.

1. चार ऐसी संलग्न संख्याएँ बताओ जिनमें सबसे छोटी संख्या x हो ।
2. तीन ऐसी संलग्न सम संख्याएँ बताओ जिनमें बीचवाली संख्या a हो ।
3. x वर्ष के बाद एक आदमी की अवस्था यदि y वर्ष हो जाय, तो उसकी वर्तमान अवस्था कितनी है ?
4. c बच्चों में 25 नारंगियाँ बराबर बराबर बाँटी गईं । बताओ हरएक बच्चे को कितनी नारंगियाँ मिलीं ।

5 एक आदमी प्रति घंटा 5 मील की चाल से चलता है। बताओ वह x घंटे में कितने मील चलेगा।

6. A की आयु x वर्ष है। B की आयु A से y वर्ष, और C की आयु से z वर्ष अधिक है, तो C की आयु क्या है?

7. 11 वर्ष पहले एक आदमी की आयु y वर्ष थी तो उसकी वर्तमान आयु क्या है?

8. 35 को तीन भागों में बाँटने पर पहला भाग x, दूसरा भाग पहले भाग से y कम है, तो तीसरा भाग बताओ।

9. a को दो भागों में बाँटने पर एक भाग यदि b हो, तो दूसरा भाग b से कितना अधिक होगा?

10. मेरी जेब में x रुपये हैं। उनका आधा मैंने खो दिया और बाद में 50 रुपये ख़र्च कर डाले। बताओ मेरी जेब में अब कितने रुपये हैं।

11. एक आदमी किसी काम का $\frac{1}{a}$ भाग एक दिन में कर लेता है, तो बताओ पूरा काम वह कितने दिनों में कर लेगा।

12. किसी काम में एक आदमी को x दिन लगाने पड़े। वही काम यदि y आदमी करते, तो वह कितने दिनों में पूरा होगया होता?

13. एक आदमी घंटे भर में a मील चलता है, तो बताओ x मील चलने में वह कितना समय लगावेगा।

14. एक थैली में x पौं० और y शि० हैं। उसमें से z पें० ख़र्च किये गये, तो बचे हुए सिक्कों का परिमाण पेंस में बताओ।

15. x आम का दाम एक रुपया है, तो y आमों का दाम बताओ।

61. सूत्रगठन (Construction of Formulæ).

पहले ही कहा जाचुका है कि बीजगणित की सहायता से विभिन्न राशियों का सम्बन्ध जहाँ तक सम्भव होता है बहुत संक्षेप में और स्पष्टरूप से प्रकट किया जाता है और उसमें समय अथवा परिश्रम की भी बचत होती है। इस प्रकार सम्बन्ध प्रकट करनेवाले संक्षिप्त वाक्यों को सूत्र (Formulæ) कहते हैं। सूत्रों के व्यापक प्रयोग के लिए ही बीजगणित को 'पूर्ण अङ्कगणित' की संज्ञा मिली है। यहाँ अब दुरूह विषयों के सूत्रगठन की प्रणाली का वर्णन किया जायगा।

केवल तादात्म्य (Identities) ही सूत्र नहीं हैं परन्तु किसी भी अङ्कगणित सम्बन्धी नियम के सांकेतिक वाक्य के रूप को भी 'सूत्र' कहा जासकता है।

उदाहरण। कमरे की लम्बाई को चौड़ाई से गुणा करो। यही कमरे के फ़र्श का क्षेत्रफल निकालने का अङ्कगणित सम्बन्धी नियम है। 'गुणा करो' इस वाक्यांश के स्थान पर '×' चिह्न का प्रयोग करने पर नियम कुछ संक्षिप्त हो जायगा और

क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई, यह रूप धारण कर लेगा।

फिर, लम्बाई और चौड़ाई के बदले क्रमशः a और b लिख देने पर नियम

क्षेत्रफल $= a \times b$, इस प्रकार लिखा जायगा।

यहाँ क्षेत्रफल A द्वारा सूचित होने पर, नियम

$A = a \times b$...........(1), यह संक्षिप्त आकार धारण करेगा।

यहाँ A द्वारा क्षेत्रफल, a द्वारा लम्बाई और b द्वारा चौड़ाई सूचित होती है।

इस स्थान पर (1) सूत्र A, a और b तीन राशियों के बीच का सम्बन्ध प्रकट करता है।

तीनों राशियों में से किसी भी दो राशियों का मान दिये होने पर तीसरी राशि का मान (1) की सहायता से निकाला जाता है।

उदाहरण के लिए मानलो कि कमरे के फ़र्श का क्षेत्रफल 24 वर्गफ़ीट है और उसकी लम्बाई ६ फ़ी० है, तो उक्त सूत्र के अनुसार उसकी चौड़ाई $A \div a$ अर्थात् $24 \div 6 = 4$ फ़ी० होगी।

62. सूत्र का उपयोग (Use of Formulæ).

शायद तुम्हारे मन में यह बात आती होगी कि 'सूत्र' केवल कुछ साधारण वाक्यों के सांकेतिक रूप हैं। इसलिए इनकी कोई दूसरी उपयोगिता नहीं है परन्तु जब कभी बहुत जटिल प्रश्नों का समाधान करना होता है, तो हम इनकी सहायता से व्यर्थ में एक ही बात को कई बार दोहराने से बच जाते हैं। सूत्रों से यही मुख्य लाभ है।

उदाहरण 1. एक ठेकेदार को मालूम हुआ कि 5 खम्भे बनाने में 15 आदमियों को 3 दिन लग जाते हैं। बताओ कि यदि उसे y दिन में

x खम्भे बनवाने हों, तो कितने आदमियों की आवश्यकता पड़ेगी। यह बात वह किस तरह मालूम कर सकेगा ?

	3	दिन में	5	खम्भे बनवाने के	लिए	15	आदमी आवश्यक हैं
∴	1	,,	5	,,	,,	$15 \times 3 = 45$	,, ,,
∴	1	,,	1	,,	,,	$\frac{45}{5}$ या 9	,, ,,
तो	y	,,	1	,,	,,	$\frac{9}{y}$	,, ,,
∴	y	,,	x	,,	,,	$\frac{9}{y} \times x$	,, ,,

इसलिए आदमियों की संख्या $= \frac{9x}{y}$, इस सूत्र में x और y के अलग अलग मान स्वीकार कर लेने पर ही विशेष विशेष अवस्था में आवश्यक आदमियों की संख्या प्राप्त होगी। प्रत्येक बार फिर व्यर्थ में परिश्रम करके आदमियों की संख्या न निकालनी होगी।

उदाहरण 2. किसी संख्या N को D से भाग देने पर भागफल Q आता है और R शेष रह जाता है। इन तीन राशियों में सम्बन्ध प्रकाशक एक सूत्र बनाओ।

अङ्कगणित के नियम के अनुसार 31 को जब हम 4 से भाग देते हैं, तो भागफल 7 आता है और 3 शेष रह जाता है,

और, $31 = 4 \times 7 + 3$

अर्थात्, भाज्य = भागफल × भाजक + शेष;

इसलिए भाज्य N, भाजक D, भागफल Q और शेष R होने पर स्वभाव से ही $N = Q \times D + R$ यह सूत्र प्राप्त होता है।

63. रेखागणित सम्बन्धी सूत्र (Geometrical Formulæ).

रेखागणित सम्बन्धी चित्रों का फल भी बहुत ही संक्षेप में सूत्रों की सहायता से प्रकट किया जाता है। इस प्रकार सूत्रों की सहायता से रेखागणित के प्रश्नों का हल करने में भी बहुत सुविधा होती है।

I. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार पर अङ्कित समान ऊँचाई-वाले समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram) का आधा होगा।

इसलिए क्षेत्रफल के स्थान पर A, आधार के स्थान पर b, और ऊँचाई के स्थान पर h लिखने पर

$A = \frac{1}{2}h \times l$, यह सूत्र पाया जाता है।

अतएव $A = 15$ वर्ग इंच, और $b = 3$ इंच होने पर $h = 10$ इंच होगा।

II. वृत की परिधि उसके व्यास के π (pi) गुना है, π का मान प्रायः $\frac{22}{7}$ होता है।

व्यास के स्थान पर d और परिधि के स्थान पर C लिखने पर

$C = \frac{22}{7}d$, यह सूत्र पाया जाता है।

व्यास अर्द्ध-व्यास का दूना होता है; इसलिए अर्द्ध-व्यास को यदि r द्वारा सूचित किया जाय, तो उक्त सूत्र

$C = 2\pi r$ अथवा $2 \times \frac{22}{7} \times r$, यह रूप धारण कर लेगा।

टीका—π एक सकेत है। इसका मान यथार्थ रूप से निकाला नहीं जासकता। इसका निकटतम मान $3 \cdot 14159$......होगा; प्रश्न हल करते समय इसका मान साधारणतः $\frac{22}{7}$ माना जाता है। इसलिए अर्द्ध-व्यास मालूम रहने पर परिधि आसानी से ही निकालली जासकती है।

III. वृत का क्षेत्रफल A होने पर वह

$A = \pi r^2$, इस सूत्र की सहायता से निकाला जाता है।

IV. पिरामिड की ऊँचाई h और सतह का क्षेत्रफल A होने पर उसका घनफल

$V = \frac{1}{3} Ah$, यह सूत्र पाया जाता है।

टीका—V को घन की इकाई में, A को वर्ग की इकाई में और h को लम्बाई की इकाई में प्रकट करना होगा।

V. वृत के पृष्ठ या सतह का क्षेत्रफल उसके अर्द्धव्यास के वर्ग का 4π गुना है। इसलिए पृष्ठ का क्षत्रफल S होने पर वह

$S=4\pi r^2$, इस सूत्र की सहायता से निकाला जाता है।

इस प्रकार वृत का घनफल V होने पर

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$, यह सूत्र पाया जाता है।

उदाहरण 1. एक साइकिल के पहिये का व्यास 28 इंच है। बताओ कि 5 बार घूमने पर वह पहिया कितना रास्ता तै कर लेगा।

पहिये की परिधि $=\pi d=\frac{22}{7}\times 28$ इं० $=88$ इं०।

इसलिए एक बार घूमने पर पहिया 88 इंच रास्ता तै करता है।

$\therefore$ 5 बार घूमने पर पहिया $88\times 5=440$ इंच, अर्थात् 12 गज़ 8 इं० रास्ता तै करेगा।

उदाहरण 2. एक पिरामिड की ऊँचाई 8 फ़ी० और उसके भूमि का क्षेत्रफल 12 वर्ग फ़ी० है, तो उसका घनफल निकालो।

यहाँ $A=12$ वर्ग फ़ी० और $h=8$ फ़ी०,

$\therefore\ V=\frac{1}{3}\times 12\times 8$ घनफ़ीट $=32$ घनफ़ीट।

प्रश्नावली 12.

1. त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र की सहायता से 4 फ़ी० आधार और 5 फ़ी० ऊँचाईवाले एक त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो।

2. अनुच्छेद 62 के उदाहरण 2 में लिखे गये सूत्र की सहायता से एक ऐसी संख्या निकालो जिसको 32 से भाग देने पर भागफल 21 हो और 13 शेष रह जाय।

3. AB सरल रेखा को O विन्दु पर दो भागों में बाँट दिया गया है। बीजगणित की सहायता से सिद्ध करो कि $AB^2=AB.AO+AB.OB$.

4. a और b भुजाओंवाले एक आयत क्षेत्र का कर्ण (Diagonal) निकालने का सूत्र बनाओ ।

5. $v=40$, $u=10$ और $s=50$ होने पर $v^2-u^2=2ts$ इस सूत्र से t का मान निकालो ।

6. एक कमरे की लम्बाई l फ़ु०, चौड़ाई b फ़ु० और ऊँचाई h फ़ु० होने पर उसके (i) फ़र्श का क्षेत्रफल, (ii) परिसीमा (Perimeter) और (iii) चारों दीवारों का क्षेत्रफल निकालने का सूत्र बनाओ ।

——:o:——

विविध प्रश्नावली 1.

I.

1. $3x^2$ और $(3x)^2$ में क्या भेद है । $x=4$ होने पर $(3x)^2-3x^2$ का मान बताओ ।

2. गुणक और घाताङ्क की संज्ञा लिखो । $2x^2+3x$ और x^3+5x^2 दोनों राशिमालाओं के (i) घातांकों का योग और (ii) गुणकों का योग बताओ ।

3. सरल करो:— (i) $2x^2\times 3x^3$; (ii) $3x^2y^3\div 4xy^4$.

4. $2x+3x=15$ होने पर $2x^3-3x^2$ का मान बताओ ।

5. $\pi=\frac{22}{7}$ और $r=2$ होने पर, $A=\pi r^2$, इस सूत्र से A का मान बताओ ।

6. $2x$ व $3y$ का योगफल और $2xy$ व $3x^2y^2$ का गुणनफल बताओ ।

7. $x-(y-z)=x-y+z$ क्यों होगा, भली भाँति समझाओ ।

8. $x=4$ और $y=5$ होने पर 45 संख्या को x और y द्वारा प्रकट करो ।

II.

1. 12 A.D. वर्ष x द्वारा सूचित होने पर $-3x$ द्वारा कौनसा वर्ष सूचित होगा ?

2. $3x+y$ और $3xy$ में भेद क्या है? $x=3, y=6$ होने पर दोनों राशियों का मान बताओ।

3. a रु०, b आ० और c पा० का योग पाइयों में प्रकट करो। $a=3$, $b=5$, $c=9$ होने पर उत्तर क्या होगा?

4. $a=1$, $b=12$ और $n=12$ होने पर $s=\frac{n}{2}(a+l)$ से s का मान निकालो।

5. सरल करोः—(i) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$; (ii) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}$; (iii) $\frac{x}{2}\times\frac{x}{3}$; (iv) $\frac{x}{2}\div\frac{x}{3}$.

6. $3x^3-5x^2y+y^4$ राशिमाला का सर्वोच्चघात, सबसे निम्नघात, धनपद समूह और x^2 का गुणक बताओ।

7. नीचे लिखी हुई राशियों के अन्त के दो पदों को कोष्ठ के अन्दर रक्खो।

$x-2y+3z$, $a^2+2ax-b^2$, $a-5b-3c$.

8. $2x+3$ रु० में से $x+2$ रु० ख़र्च कर देने पर कितने रुपये बाक़ी बचेंगे?

III.

1. a और b के योग में से x और y के योग के अन्तर को प्रकट करनेवाली एक राशिमाला लिखो।

2. $x=5$ और $y=3$ होने पर, $(x-y)^2$ और x^2-y^2 का मान बताओ।

3. सजातीय और विजातीय पदों में क्या भेद है? $x^3-2ax+a^2-2x^3-x^2+3a^2+4ax+5x^2$ व्यंजक के सजातीय पदों को लिखो।

4. x पौं० को औंस में, y मन को छटाँक में और z रु० को पाई में लाओ।

5. x^3, $3x$ एवं $\frac{x}{3}$ का अर्थ क्या है? $x=6$ होने पर राशियों का मान बताओ।

6. एक आदमी ने एक ऐसे स्थान की ओर यात्रा की जो x मील की दूरी पर था। y मी० प्रति घंटा की चाल से z घंटा तक वह चलता रहा; तो बताओ कि पहुँचने की जगह से वह कितनी दूरी पर है।

7. $a=4, b=6$ और $c=3$ होने पर दिखाओ कि $a \div b \times c > a \div bc$.

8. a लम्बाई की सरल रेखा के ऊपर एक वर्गाकार क्षेत्र बनाओ और उस चित्र से सिद्ध करो कि वह क्षेत्र इस रेखा के आधे भाग के ऊपर बनाये गये वर्गाकार क्षेत्र का चौगुना है।

IV.

1. सरल करो:— $3x^2+2x-xy-x^2+x+xy$.

2. व्यंजक के किसी पद का घात (Degree) क्या है? व्यंजक का घात किसे कहते हैं? $3x^2-3x^2y^2+y^3$ व्यंजक का घात कितना है। इस राशिमाला (व्यंजक) में जो ऋण-पद है उसका घात कितना है?

3. a में से $b+c$ घटाया गया है। इस वाक्य को प्रकट करनेवाले व्यंजक को (i) कोष्ठिकरण करो और (ii) विकोष्ठिकरण करो।

4. $3ax$ को कितने से गुणा किया जाय कि गुणनफल $3a^2x^2-3ax$ हो?

5. ऐसी तीन संलग्न संख्याएँ बताओ जिनका मध्य पद $2x$ हो। इन तीनों संख्याओं में से कौनसी सम है और कौनसी विषम?

6. पिता, पुत्र से 25 वर्ष बड़ा है। यदि पिता की अवस्था x वर्ष है, तो पुत्र की अवस्था बताओ।

7. एक बालक ने $x+y$ प्रश्नों को हल किया। उनमें से यदि $y-z$ ठीक हों, तो ग़लत कितने हैं?

8. किसी त्रिभुज के दो कोण x° और y° होने पर तीसरा कोण कितना होगा। [किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है]

V.

1. $x(y+2)$ में से $(x+2)y$ घटाने पर कितना शेष रहेगा?

2. $p=3$ और $q=2$ होने पर p^2+q^2-2pq का मान बताओ।

3. $-x^\circ$ और $-(x-2)^\circ$ के बीच में ताप के बढ़ने का परिमाण बताओ।

4. $\sqrt{x}-y$ और $\sqrt{x-y}$ में क्या भेद है ? $x=169, y=25$ होने पर दोनों राशियों का अन्तर निकालो ।

5. 9 बजकर x मिनट से लेकर 10 बजने में x मिनट तक कितने मिनट होंगे ?

6. सरल करो:—(i) $x+\frac{x}{2}-2(x-\frac{x}{2})$.

(ii) $3(x+2y)-5(y+2z)+2(x-3z)$.

7. $3x$ और x^3 में क्या भेद है ? $x=2$ होने पर दोनों राशियों का अन्तर निकालो ।

8. तीन अङ्कों से बन हुई संख्या के अङ्क बाईं ओर से क्रमशः x, o, z होने पर वह संख्या कितनी है ?

VI.

1. सरल करो:— $2\{a-3(b-\overline{c+d})\}$.

2. $3a^2b+4ab^2$ को ab से भाग दो ।

3. $4a^2+8ab-6b^2$ और $6a^2-ab-7b^2$ के योग में से $2a^2+4ab-5b^2$ घटाओ ।

4. x शि० में से y शि० खो जाने पर (i) कितने पेंस या (ii) कितने पौंड शेष रहेंगे ?

5. मैंने एक काग़ज़ के ऊपर $2n+1$ सरल रेखाएँ समान दूरी पर खींचीं । n एक पूर्ण संख्या होने पर मध्य-रेखा की स्थिति मालूम करो ।

6. सांकेतिक आकार में प्रकट करो:— y और z के अन्तर का x गुना; z और x के अन्तर का y गुना; x और y के अन्तर का z गुना । सिद्ध करो कि इस प्रकार उत्पन्न हुई तीनों राशियों का योग शून्य है ।

7. q से p के बड़ी होने पर $x-q$ से $x-p$ बड़ी है या छोटी, बताओ । इनका अन्तर क्या है ?

8. p घण्टा q मिनट को सेकण्डों में प्रकट करो ।

VII.

1. $x=4$, $y=-2$ और $z=3$ होने पर $(x+2y)z$, $(x+2)(y+z)$ और $x+2(y+z)$ राशियों का मान निकालो।

2. $5x=35$ होने पर x का मान बताओ।

3. $x=2y+3$ और $z=3y+4$; सिद्ध करो कि $3x-2y=1$.

4. 1, 2, 3,......... 10 संख्याओं में से किन को x के स्थान पर लिखने से $\frac{3x+2}{4}$ भागांश होगा।

5. $x=3$ और $y=4$ होने पर x दहाई और y इकाईवाली संख्या और 34 का अन्तर कितना होगा ?

6. $3x+5$ में से कौनसी संख्या घटाई जाय कि अन्तर $3x$ हो। $3x+5=26$ होने पर x का मान कितना होगा ?

7. एक विद्यालय में 500 बालकों को उच्च, मध्यम और निम्न श्रेणियों में बाँटा गया। इन श्रेणियों में क्रमशः $3(x-4)$, $4(x+5)$ और $(3x-8)$ लड़के हैं। तो x का मान और प्रत्येक श्रेणी के बालकों की संख्या बताओ।

8. x का मान क्रमशः 1, 2, 3 होने पर $3x^2-5x+2$ राशि का मान बताओ।

VIII.

1. $x=5$ होने पर $4x+3=5x-a$ में से a का मान निकालो।

2. $5x-3y-10z+9a$ और $5x-3y+10z-9a$ दोनों राशियों में 3 से भाग देने योग्य और 5 से भाग देने योग्य पदों का अलग अलग कोष्ठिकरण करो।

3. y एंजिन में x टन कोयला ख़र्च होने पर z एंजिन में कितना कोयला ख़र्च होगा ?

4. तीन अङ्कों की किसी संख्या के अङ्क x, y और o होने पर इन तीन अङ्कों से बनी हुई संख्याओं को बताओ।

5. नीचे लिखे हुए गुणनफलों को जोड़ोः—
$(x+1)(x+2)$, $(x+2)(x+3)$ और $(x+3)(x+4)$.

6. सरल करोः— $3(a^2-x^2)-2[x^2-\{a^2+ax+a(x-\overline{x-a})\}]$.

7. $5a$ पेंस की दर से 25 चीज़ें मोल ली गईं और वे सब b पौं० में बेच डाली गईं; तो बताओ कितना लाभ या हानि हुई? उत्तर पौंड में प्रकट करो।

8. $a=\pi r^2$ सूत्र की सहायता से 3 इंच अर्द्ध-व्यास वाले वृत का क्षेत्रफल निकालो।

IX.

1. $x=10$, $a=3$ और $b=2$ होने पर सिद्ध करो कि $x-3a\div a+b$ और $(x-3a)\div(a+b)$ का मान भिन्न भिन्न होगा।

2. $1-2x^2+x$ में से कितना घटाने पर अन्तर $2x-3x^2$ होगा?

3. $9x^2y-24xy^2$ को $3xy$ से भाग दो।

4. विकोष्ठिकरण करके नीचे लिखी हुई राशिमाला को सरल करो और बाद को x के सजातीय घातों के गुणकों को कोष्ठिकरण करो।
$ax^3-x\{b(x^2-x)-c(x-2)+a\}+x(x^2-2x-1)$.

5. एक विदेशी चिट्ठी का डाक-व्यय पहले औंस के लिए $2\frac{1}{2}$ पें० है और फिर प्रति औंस $1\frac{1}{2}$ पें० बढ़ता जाता है, तो बताओ कि x औंस वज़न की एक चिट्ठी पर कितना डाक-व्यय पड़ेगा?

6. $P\equiv 4a^2b^2c$, $Q\equiv 5b^2c^2a$, $R\equiv 6c^2a^2b$ और $a=4b=2c$ होने पर $\frac{P}{Q}+\frac{Q}{R}+\frac{R}{P}$ का मान बताओ।

7. एक साइकिल चलानेवाला घंटा में y मील के वेग से x मील जाने के बाद साइकिल पंक्चर होजाने के कारण z मील प्रति घंटा की चाल से पैदल चलकर घर लौटा; तो बताओ कि घर से वह कितनी देर तक बाहर रहा।

8. एक चाय के व्यापारी ने 3 रु० प्रति पौं० की x पौं० चाय में 2 रु० प्रति पौं० की y पौं० चाय मिला दी, तो बताओ कि मिली हुई चाय का दाम प्रति पौं० क्या होगा।

X.

1. $a=12, b=4, c=11, d=9$ होने पर, $\sqrt{a+b+c+d}+\sqrt[3]{a+b+c}+\sqrt[4]{a+b}$ का मान कितना होगा ?

2. $3x^4-4x^2+6x^3-2$ में कितना जोड़ा जाय कि योगफल 0 हो।

3. $-6x^2yz$ को $-xy^2z^2$ से गुणा करो।

4. $A\equiv x^2-2x+3$, $B\equiv x^2+7x-2$ और $C\equiv x^2+9x-3$ होने पर $2A-3B+2C$ का मान बताओ।

5. $(x+2y)$ गज़ लम्बी एक लकड़ी में से $2(x-3y)$ फुट काट लेने पर कितने गज़ लम्बी लकड़ी बच रहेगी ?

6. $x+z=6$ होने पर $xy+yz=24$ से y का मान बताओ।

7. एक वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल A वर्ग इं० और उसकी लम्बाई l इं० है, तो बताओ कि क्षेत्र की चौड़ाई क्या है ? s से परिमिति सूचित होने पर A, l और s में सम्बन्ध-प्रकाशक एक सूत्र लिखो।

8. एक लड़का प्रति सेकंड x के हिसाब से एक पैकेट ताश गिन सकता है। दूसरा एक आलसी लड़का प्रति सेकंड केवल y के हिसाब से गिन सकता है। बताओ z ताश के गिनने में दूसरे लड़कों को पहले लड़के की अपेक्षा कितना अधिक समय लगेगा। [$x>y$.]

———:o:———

छठवाँ अध्याय

गुणनफल के विशेष सूत्र

64 विशेष सूत्र (Formulæ).

सूत्र-गठन प्रणाली में किस प्रकार सूत्र की सहायता से एक ही विषय को बार बार दोहराने के झंझट से छुटकारा मिल जाता है और अनावश्यक परिश्रम बहुत अधिक मात्रा में कम होजाता है यह सब पहले लिखा जाचुका है। यहाँ तक मुख्य मुख्य अङ्कगणित सम्बन्धी और रेखागणित सम्बन्धी नियम आदि ही सांकेतिक रूप से सूत्र के आकार में प्रकट किये गये हैं। साधारणतः इन सब सूत्रों की राशियों में परस्पर कोई सम्बन्ध नहीं है। वर्त्तमान अध्याय में राशियों के साधारण-नियम-प्रकाशक एक विशेष जातीय सूत्र के सम्बन्ध में विचार किया जायगा। वास्तव में यह गुणा के कुछ फल-मात्र हैं परन्तु इन सब स्थानों पर मिली हुई राशियाँ चाहे किसी भी मान से युक्त क्यों न हों उनकी सत्यता सुरक्षित रहेगी। ये फल अत्यन्त आवश्यक हैं।

65. द्विपद का वर्ग $(a+b)^2$.

दो राशियों के योग का वर्ग उनके वर्ग का योग तथा उनके गुणनफल के दुगने के समान होता है। किसी भी दो संख्याओं के सम्बन्ध में ही यह नियम सत्य है। यह नीचे लिखे हुए सूत्र की सहायता से प्रकट होता है।

सूत्र। $\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$............**(1)**

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)\times(a+b)\\&=a\times(a+b)+b\times(a+b)\\&=(a^2+ab)+(ab+b^2)\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

इस सूत्र की सहायता से किसी भी दो राशियों के योग का वर्ग निकाला जासकता है।

उपसिद्धान्त। $a^2+b^2=(a^2+2ab+b^2)-2ab$
$\qquad\qquad=(a+b)^2-2ab.$

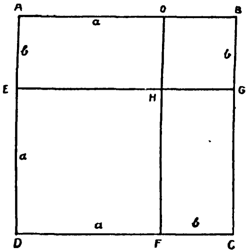
इस सूत्र के द्वारा अङ्कगणित सम्बन्धी संख्या का वर्ग निकालने में विशेष सुविधा होती है।

उदाहरण । 325 का वर्ग निकालो ।

$$325^2=(300+25)^2=300^2+2\ 300.25+25^2$$
$$=90000+15000+625$$
$$=105625.$$

66 रेखागणित द्वारा दिखाना (Geometrical Representation).

मानलो कि AB सरल रेखा को किसी भी भीतरी विन्दु O पर AO और OB इन दो भागों में बाँटा गया है। AO की लम्बाई को a द्वारा और OB की लम्बाई को b द्वारा सूचित करने पर AB की लम्बाई $a+b$ द्वारा सूचित होगी।



AB और OB के ऊपर क्रमशः ABCD और OBGH दो वर्गाकार क्षेत्र बनाओ। OH और GH को बढ़ाओ और मानलो कि बढ़ाई हुई OH, DC को F विन्दु पर और बढ़ाई हुई GH, AD को E विन्दु पर काटती हैं।

चित्र से विदित होता है कि समस्त ABCD वर्गाकार क्षेत्र EDFH और OBGH इन दोनों वर्गों और AOHE और HFCG इन दो आयत क्षेत्रों के योग के समान है। यहाँ EDFH और OBGH दोनों वर्गाकार क्षेत्रों का क्षेत्रफल क्रमशः a^2 और b^2 है और AOHE और HFCG इन दो आयत क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ab है।

इसलिए $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

उदाहरण 1. $2x+3y$ का वर्ग निकालो।

मानलो, $a=2x$ और $b=3y$.

$$\therefore\ (2x+3y)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$$
$$=4x^2+12xy+9y^2.$$

उदाहरण 2. यदि $x=2$ हो, तो $25x^2+10x+1$ का मान बताओ।

$$\text{दी हुई राशि} = (5x)^2+2.5x.1+1^2=(5x+1)^2$$
$$=(5\times 2+1)^2$$
$$=11^2=121.$$

67. द्विपद का वर्ग $(a-b)^2$.

दो राशियों के अन्तर का वर्ग, पहली राशि के वर्ग में से दोनों राशियों के गुणनफल के दूने को घटाने पर जो अन्तर प्राप्त होता है उसमें दूसरी राशि का वर्ग जोड़ने से प्राप्त योगफल के समान होता है।

यह गुर अङ्कगणित सम्बन्धी संख्याओं में भी वर्तमान है। यह साधारण गुर नीचे लिखे हुए सूत्र द्वारा प्रकट होता है:—

सूत्र। $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.........(2)

साधारण गुणन के द्वारा ज्ञात होता है कि,

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$$
$$=(a^2-ab)-(ab-b^2)=a^2-2ab+b^2.$$

a और b का मान चाहे कितना ही क्यों न हो यह सूत्र सदा ही सत्य होगा। इसलिए इस सूत्र की सहायता से किसी भी दो राशियों के अन्तर का वर्ग निकाला जासकता है।

टीका 1— b के स्थान पर $-b$ लिखकर, पूर्व सूत्र से भी यह सूत्र प्राप्त होता है। फलतः यह $(a+b)^2$ सूत्र में शामिल है। कारण,

$$(a-b)^2=\{a+(-b)\}^2$$
$$=a^2+2.a.(-b)+(-b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

टीका 2— $(a-b)^2$ और $(b-a)^2$ दोनों ही वर्ग परस्पर समान हैं। क्योंकि उनमें से हरएक a^2+b^2-2ab के समान है।

उपसिद्धान्त 1. $a^2+b^2=(a^2-2ab+b^2)+2ab$
$$=(a-b)^2+2ab.$$

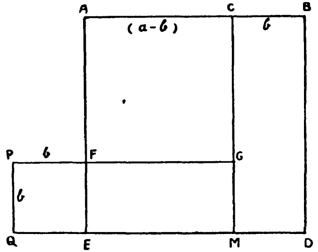
उपसिद्धान्त 2. $(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-4ab$
$$=(a+b)^2-4ab.$$
और $(a+b)^2=(a^2-2ab+b^2)+4ab$
$$=(a-b)^2+4ab.$$

उदाहरण 1. 99 का वर्ग निकालो।
$$99^2=(100-1)^2=100^2-2.100.1+1^2$$
$$=10000-200+1=9801.$$

उदाहरण 2. $ax-by$ का वर्ग निकालो।
$$(ax-by)^2=(ax)^2-2(ax)(by)+(by)^2$$
$$=a^2x^2-2abxy+b^2y^2.$$

68. रेखागणित द्वारा प्रकट करना।

AB सरल रेखा पर C एक विन्दु लो और AB और BC की लम्बाई को क्रमशः a और b द्वारा सूचित करो। उस अवस्था A C की लम्बाई $a-b$ द्वारा सूचित होगी।



AB के ऊपर खींचे हुए ABDE वर्ग में b भुजावाले PQEF वर्ग को जोड़ने से ABDEQPF चित्र बनता है जिसका क्षेत्रफल a^2+b^2 है।

इस चित्र में से PM और CD दो आयत क्षेत्र हटा देने पर ACGF क्षेत्र शेष रह जायगा। ACGF क्षेत्र AC के ऊपर एक वर्ग है। इसलिए इसका क्षेत्रफल $(a-b)^2$ है और PM और CD दोनों ही आयत क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ab है।

इसलिए $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

उदाहरण 1. $x=4, y=3$ होने पर $9x^2-12xy+4y^2$ का मान कितना है ?

$$\text{दी हुई राशि} = (3x)^2 - 2.(3x).(2y) + (2y)^2$$
$$= (3x-2y)^2 = (3\times 4 - 2\times 3)^2 = 6^2 = 36.$$

उदाहरण 2. $x+\frac{1}{x}=3$ होने पर $x^2+\frac{1}{x^2}$ का मान कितना है ?

$$x^2+\frac{1}{x^2} = x^2+\frac{1}{x^2} + 2.x.\frac{1}{x} - 2.x.\frac{1}{x}$$
$$= \left(x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - 2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2$$
$$= 3^2 - 2 = 7.$$

प्रश्नावली 13.

निम्नलिखित राशियों का वर्ग निकालो:—

1. $x+2$. 2. $4x-1$ 3. $5x+9y$. 4. $2x-y$.
5. $px+qy$. 6. $2a+5b$. 7. $ax-3b$. 8. $2ab+c^2$.
9. x^2-y^2. 10. $2a-x^2$.

11. $2x+x^2$ को $2x+x^2$ से और x^2+xy को x^2+xy से गुणा करो।

12. p^2-2pq को p^2-2pq से और p^2-3p को p^2-3p से गुणा करो।

13. वास्तविक गुणा के अतिरिक्त और किस प्रकार $9x^2-7y^2$ का वर्ग निकाला जासकता है ?

14. सूत्र की सहायता से $2x-3y$ और $3y-2x$ का गुणनफल निकालो।

15. निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग निकालो:—
(i) 11. (ii) 105. (iii) 1025. (iv) 89. (v) 998.

$x=2$, $y=3$ और $a=4$ और $b=5$ होने पर निम्नलिखित राशियों का मान बताओ:—

16. x^2-6x+9. 17. $a^4-2a^2bx+b^2x^2$. 18. $9+12a+4a^2$.
19. $x^2y^2-16xy+64$. 20. $(a+x)^2+(b+y)^2$.

सरल करोः—

21. $(x+y)^2-2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.

22. $(3a-5b)^2+2(3a-5b)(x-2y)+(x-2y)^2$.

23. $(px+qy)^2+(px-qy)^2$. 24. $(ax+by)^2-2abxy$.

25. $p+\frac{1}{p}=4$ होने पर सिद्ध करो कि $x^2+\left(\frac{1}{p}\right)^2=14$.

26. $x-\frac{1}{x}=4$ होने पर सिद्ध करो कि $x^2+\frac{1}{x^2}=18$.

27. सिद्ध करो कि $(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2=2(x^4+y^4)$.

28. $a+\frac{1}{a}=x$ होने पर $a^2+\frac{1}{a^2}$ का मान x द्वारा प्रकट करो।

29. $x-y=3$ और $xy=4$ होने पर $x+y$ का मान कितना है ?

30. $x+y=7$ और $xy=10$ होने पर $x-y$ का मान बताओ।

69. दो राशियों के वर्ग का अन्तर (Difference of Two Squares).

दो राशियों के योग और अन्तर का गुणनफल दोनों ही राशियों के वर्ग के अन्तर के समान होता है। यह गुर नीचे लिखे सूत्र द्वारा प्रकट होता है।

सूत्र। $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$......................(3)

साधारण गुणन के द्वारा ज्ञात होता है कि—

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{-ab-b^2} \\ a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

a और b का चाहे कुछ भी मान क्यों न हो, उक्त सूत्र का प्रयोग हो सकता है। इसलिए जो राशि a^2-b^2 के रूप में प्रकट की जाती है अर्थात् दो राशियों के वर्ग के अन्तर के रूप में प्रकट की जाती है उसको उन दोनों राशियों के योग और अन्तर के समान दो द्विपद गुणनखण्डों में विश्लेषण किया जाता है।

टीका—बहुत से स्थानों में सीधी गणना (calculation) न करके गुणनखण्ड के विश्लेषण के द्वारा दो संख्याओं के वर्ग का अन्तर निकालना अधिक सुविधाजनक होता है।

उदाहरण 1. $428^2 - 427^2$ का मान कितना है?

$$428^2 - 427^2 = (428+427)(428-427)$$
$$= 855 \times 1 = 855.$$

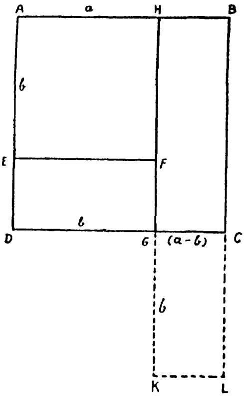
उदाहरण 2. $4x^2 - 25$ के गुणनखण्ड बताओ।

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)(2x-5).$$

इसलिए दोनों निर्णेय गुणनखण्ड $2x+5$ और $2x-5$ हैं।

70. रेखागणित द्वारा प्रकट करना।❀

AB सरल रेखा के ऊपर एक विन्दु H लो और AB और AH की लम्बाई को क्रमशः a और b द्वारा सूचित करो। इसलिए AB सरल रेखा के ऊपर खींचा हुआ ABCD वर्ग का क्षेत्रफल a^2 और AH के ऊपर खींचे हुए AHFE वर्ग का क्षेत्रफल b^2 होगा।



$\therefore a^2 - b^2 =$ वर्ग ABCD − वर्ग AHFE

= आयत FD + आयत HC

= आयत CK + आयत HC

= आयत HBLK

= HB.BL

$= (a-b)(a+b).$

टीका—$a+b$ और $a-b$ आकारवाले किसी भी दो गुणनखण्डों का गुणनफल निकालते समय इस सूत्र का प्रयोग किया जासकता है।

❀"लीलावती" के अनुच्छेद 135 में भी यह दिया हुआ है।

उदाहरण 1. $(2x+3)$ को $(2x-3)$ से गुणा करो।

$$(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2$$
$$=4x^2-9.$$

उदाहरण 2. x^2+ax+a^2 को x^2-ax+a^2 से गुणा करो।

मानलो, $x^2+a^2=A$ और $ax=B$;

$$\therefore (x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)=(A+B)(A-B)$$
$$=A^2-B^2 \quad \text{[सूत्र (3)]}$$
$$=(x^2+a^2)^2-(ax)^2$$
$$=(x^4+2a^2x^2+a^4)-a^2x^2 \quad \text{[सूत्र (1)]}$$
$$=x^4+a^2x^2+a^4.$$

प्रश्नावली 14.

निम्नलिखित राशियों का मान बताओ:—

1. 28^2-15^2.
2. 98^2-88^2.
3. 647^2-627^2.
4. $(12643)^2-(12640)^2$.

गुणनफल बताओ:—

5. $(x+y), (x-y)$.
6. $(x+1), (x-1)$.
7. $(5x+7), (5x-7)$.
8. $(6x-a^2), (6x+a^2)$.
9. $(a+2b), (2b-a)$.
10. x^2-y^2, x^2+y^2.
11. $(1-a^mb^m), (a^mb^m+1)$.
12. $(a+b+c), (a+b-c)$.

गुणनखण्ड निकालो:—

13. x^2-4y^2.
14. $16a^2-1$.
15. $9x^2-49$.
16. $a^2x^2-b^2y^2$.
17. $1-x^2y^2z^2$.
18. $x^{2m}-y^{2m}$.
19. $(a-b)^2-c^2$.
20. $(a+b)^2-(c+d)^2$.

गुणनफल निकालो:—

21. $(4+x)\times(4-x)$.
22. $(2x+y-3z)\times(2x+y+3z)$.

71. दो द्विपद राशियों का गुणनफल (Product of Two Binomials).

एक साधारण पदवाली दो द्विपद राशियों का गुणनफल—(i) साधारण

पद का वर्ग, (*ii*) साधारणपद और शेष दोनों पदों के योग का गुणनफल, और (*iii*) शेष दो पदों का गुणनफल, इन तीन राशियों के योग के समान होता है ।

यह साधारण गुर निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्रकट होता है:—

सूत्र । $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$.........(4)

साधारण गुणन क्रिया द्वारा ज्ञात होता है कि

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ \qquad\quad +bx+ab \\ \hline x^2+ax+bx+ab. \end{array}$$

गुणनफल को $x^2+(a+b)x+ab$ के रूप में लिखा जाता है । और इसे एक 'x का द्विघात व्यंजक' (Quadratic Expression in x) कहते हैं ।

एक साधारण पद वाली दो द्विपद राशियों का गुणनफल और द्विघात व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालते समय यह सूत्र विशेष रूप से उपयोगी होता है ।

टीका 1— x के किसी द्विघात व्यंजक में x^2 का एक पद और x का एक पद और एक अचल (Constant) वर्त्तमान रहता है । इसलिए साधारणतः गम्भीरतापूर्वक विचार करने से इस प्रकार के व्यंजक के गुणनखण्ड निकाले जासकते हैं ।

टीका 2— a और b धन या ऋण चाहे किसी भी मान से युक्त क्यों न हों उक्त सूत्र सत्य होगा । इसलिए इस सूत्र के अनुसार $(x+a)$ और $(x-b)$, $(x-a)$ और $(x-b)$ ऐसी सभी दो द्विपद राशियों का गुणनफल निकाला जाता है; जैसे,

$$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab.$$
$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab.$$

उदाहरण 1. $(x+3)$ और $(x+5)$ का गुणनफल बताओ ।

$$(x+3)(x+5)=x^2+(3+5)x+3\times5$$
$$=x^2+8x+15.$$

उदाहरण 2. $(x+7)$ को $(x-4)$ से गुणा करो ।

$$(x+7)(\quad-4)=x^2+(7-4)\,x+7\times(-4)$$
$$=x^2+3x-28.$$

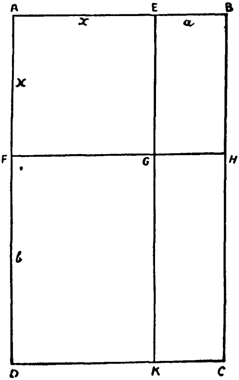
उदाहरण 3. x^2+5x+6 का गुणनखण्ड निकालो ।

दोनों गुणनखण्ड स्पष्ट ही $(x+a)$ और $(x+b)$ आकारवाले होंगे । यहाँ a और b का मान इस प्रकार का होगा कि उन दोनों का योग 5 और गुणनफल 6 हो । परीक्षा करने पर ज्ञात होता है कि $3\times2=6$, और $3+2=5$. इसलिए $a=2$ और $b=3$ माना जा सकता है ।

$$\therefore\quad x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

अतएव निर्णय दोनों गुणनखण्ड $x+2$ और $x+3$ हैं ।

72. रेखागणित द्वारा प्रकट करना ।



दो सरल रेखायें AE और EB इस प्रकार खींचो कि वे एक ही सीध में हों । मानलो कि AE और EB की लम्बाई क्रमशः x और a है, तो $AB=x+a$.

AE के ऊपर AFGE वर्ग खींचो । इसका क्षेत्रफल x^2 होगा । AF को D तक बढ़ाओ और मानलो कि $FD=b$ है । ABCD आयत बनाओ । इसका क्षेत्रफल स्पष्ट ही $(x+a)(x+b)$ है ।

यहाँ ABCD आयत = वर्ग AG + आयत EH + आयत GD + आयत CG

$$=x^2+ax+bx+ab$$
$$=x^2+(a+b)\,x+ab.$$

$$\therefore\quad (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\,x+ab.$$

प्रश्नावली 15.

निम्नलिखित उदाहरणों में पहली राशि को दूसरी से गुणा करोः—

1. $x+2, x+4.$
2. $3x+2y, 3x+5y.$
3. $a-2, a+7.$
4. $a+4, a-5.$
5. $x-6a, x+2a.$
6. $2m+n, 2m+3n.$
7. $a+bx, a+cx.$
8. $3x+2, 5x-2.$
9. $4-x, 5-x.$
10. $x^m+16, x^m-10.$

निम्नलिखित राशियों के गुणनखण्ड बताओ :—

11. $x^2+3x+2.$
12. $x^2-3x+2.$
13. $15-8x+x^2.$
14. $a^2+a-2.$
15. $x^2-x-6.$

73. द्विपद का घन $(a+b)^3$.

$a+b$ का तृतीय घात $(a+b)^3$ है; यह $(a+b)(a+b)^2$, अर्थात् $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$ के समान है ।

साधारण गुणन से ज्ञात होता है कि

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

अतएव निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:—

सूत्र । $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$=a^3+3ab(a+b)+b^3$ ....(5)

a और b चाहे किसी भी मान से युक्त क्यों न हों, यह सूत्र सर्वदा सत्य होगा । इसीलिए इसकी सहायता से किसी भी दो राशियों के योग का घन निकाला जासकता है ।

यहाँ यह बात ध्यान में रखनी होगी कि दाहिनी ओर वाली राशि के आकार में परिवर्त्तन करने के योग्य किसी भी राशिमाला को एक पूर्ण घन

के रूप में अर्थात् तीन समान गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में प्रकट किया जाता है।

उपसिद्धान्त। उक्त सूत्र से नीचे लिखे हुए दोनों फल अनायास ही प्राप्त होते हैं:—

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab\,(a+b).$$
$$(a+b)^3-(a^3+b^3)=3ab\,(a+b).$$

उदाहरण 1. $x+2y$ का घन निकालो।

$$(x+2y)^3=x^3+3.x.(2y)(x+2y)+(2y)^3.$$
$$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3.$$

उदाहरण 2. $x=2$ होने पर $8x^3+60x^2+150x+125$ का मान बताओ।

दी हुई राशि $=(2x)^3+3.(2x).5.(2x+5)+5^3$
$$=(2x+5)^3=(2\times 2+5)^3$$
$$=9^3=729.$$

टीका—द्विपद राशि के दोनों पद निकालते समय दी हुई राशिमाला के तृतीय घात के दोनों पद जिन दो राशियों के घन हों उनको निकालना होता है।

उदाहरण 3. $x+\frac{1}{x}=p$ होने पर $x^3+\frac{1}{x^3}$ का मान p के द्वारा प्रकट करो।

सूत्र के अनुसार $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3.x.\frac{1}{x}.\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^3$
$$=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}.$$

इस फल में $x+\frac{1}{x}$ के स्थान पर p लिखकर

$$p^3=x^3+3p+\frac{1}{x^3};$$

दोनों पक्षों से $3p$ हटादो तो

$$x^3+\frac{1}{x^3}=p^3-3p.$$

74. द्विपद् का घन $(a-b)^3$.

a और b चाहे किसी भी मान से युक्त क्यों न हों,

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2-2ab+b^2).$$

साधारण गुणन के द्वारा ज्ञात होता है कि

$$(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

इसलिए निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:—

सूत्र। $$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$=a^3-3ab(a-b)-b^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

a और b के सभी मानों के सम्बन्ध में यह सूत्र सत्य है; इसलिए इसकी सहायता से किसी भी दो राशियों के अन्तर का घन निकाला जासकता है।

टीका—फलतः यह सूत्र $(a+b)^3$ के सूत्र में शामिल है। यह पहले ही कहा जाचुका है कि a और b के सभी मानों के सम्बन्ध में $(a+b)^3$ का सूत्र सत्य है। इसलिए इस सूत्र में b के स्थान पर $-b$ लिखने से भी सूत्र सत्य होगा।

इसलिए $$(a-b)^3=\{a+(-b)\}^3=a^3+3a(-b)(a-b)+(-b)^3$$
$$=a^3-3ab(a-b)-b^3.$$

उपसिद्धान्त 1. $(a-b)^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b)$

$$\therefore \quad a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$$

उपसिद्धान्त 2. $(a^3-b^3)-(a-b)^3=3ab(a-b)$.

उदाहरण 1. $2x-y$ का घन निकालो।

$$(2x-y)^3=(2x)^3-3.2x.y\,(2x-y)-y^3$$
$$=8x^3-6xy(2x-y)-y^3$$
$$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3.$$

उदाहरण 2. सरल करोः— $(2x+3y)^3-3(2x+3y)^2(2x-3y)$
$+3(2x+3y)(2x-3y)^2-(2x-3y)^3$.

मानलो कि $a=2x+3y,\ b=2x-3y$;

$\therefore$ दी हुई राशिमाला $=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$$=(a-b)^3=(2x+3y-2x+3y)^3$$
$$=(6y)^3=216y^3.$$

उदाहरण 3. $a-\frac{1}{a}=2$ होने पर सिद्ध करो कि $a^3-\frac{1}{a^3}=14$.

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^3=\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-3a\,\frac{1}{a}.\left(a-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-3.\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

यहाँ $a-\frac{1}{a}=2$ लिखने से

$$2^3=\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)-6.$$

$\therefore$ दोनों पक्षों में 6 जोड़ने से

$$a^3-\frac{1}{a^3}=2^3+6=8+6=14.$$

उदाहरण 4. $x-y=6$ और $xy=16$ होने पर x^3-y^3 का मान बताओ।

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$
$$=6^3+3\ 16.6=216+288$$
$$=504.$$

प्रश्नावली 16.

निम्नलिखित राशियों का घन निकालोः—

1. $1+x$. 2. $3-a$. 3 $2x+1$.
4. x^2-1. 5. $ax-by$. 6. x^2+2y.
7. $-3m+2n^2$. 8. $3ax+2by$.

सरल करोः—

9. $(a+b)^3(a-b)^3$. 10. $(x+y)^3+(x-y)^3$.

11. $(p+q)^3-(p-q)^3$. 12. $(x+y)^3+(x-y)^3+6x(x^2-y^2)$.

13. $(x+a)^3-(x+b)^3-3(a-b)(x+a)(x+b)$.

14. $(x-a)^3-(y-a)^3-3(x-y)(x-a)(y-a)$.

15. $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x-y)(x+y)^2$.

16. $x+y=5$ और $xy=6$ होने पर x^3+y^3 का मान बताओ ।

17. $x-y=4$ और $xy=21$ होने पर x^3-y^3 का मान बताओ ।

18. $2x-\frac{2}{x}=3$ होने पर सिद्ध करो कि $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$.

19. $p+\frac{1}{p}=1$ होने पर $p^3+\frac{1}{p^3}$ का मान बताओ ।

20. $x-\frac{1}{x}=5$ होने पर सिद्ध करो कि $x^3-\frac{1}{x^3}=140$.

21. $x+y=4$ होने पर सिद्ध करो कि $x^3+y^3+12xy=64$.

22. $x-y=2$ होने पर सिद्ध करो कि $x^3-y^3-6xy=8$.

23. $a+b=c$ होने पर सिद्ध करो कि $a^3+b^3+3abc=c^3$.

75. $(a+b)$ और (a^2-ab+b^2) का गुणनफल ।

साधारण गुणन क्रिया द्वारा ज्ञात होता है कि,

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$

इसलिए किसी भी दो घन-राशियों के योग का गुणनखंड निकालने के लिए निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:—

सूत्र । $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.....................(7)

a और b का मान चाहे कुछ भी हो, यह सूत्र सदा ही सत्य होगा । इसलिए दो घन-राशियों के योग के रूप में प्रकट किया जाता है कि इस प्रकार की किसी भी राशिमाला का गुणनखंड इस सूत्र की सहायता से बहुत ही सरलतापूर्वक निकाला जासकता है ।

टीका—यह सूत्र (5) सूत्र में शामिल है क्योंकि,

$$(a+b)^3=(a^3+b^3)+3ab(a+b).$$

$$\therefore\ a^3+b^3+3ab(a+b)-3ab(a+b)=(a+b)^3-3ab(a+b);$$

अर्थात् $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2).$

उदाहरण 1. $4x^2-6x+9$ को $2x+3$ से गुणा करो ।

$2x$ के स्थान पर a और 3 के स्थान पर b लिखने से निर्णेय गुणनफल

$$(2x+3)(4x^2-6x+9)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3+b^3=(2x)^3+3^3$$
$$=8x^3+27.$$

उदाहरण 2. $x^3y^3+27z^3$ का गुणनखण्ड निकालो ।

मानलो कि $xy=a$ और $3z=b$; तो,

$$x^3y^3+27z^3=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$=(xy+3z)\{(xy)^2-xy.3z+(3z)^2\}$$
$$=(xy+3z)(x^2y^2-3xyz+9z^2).$$

$\therefore$ निर्णेय दोनों गुणनखण्ड $(xy+3z)$ और $(x^2y^2-3xyz+9z^2)$ हैं ।

उदाहरण 3. $(x+y)(x^2-xy+y^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)$ को सरल करो ।

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3;$$

और $(y+z)(y^2-yz+z^2)=y^3+z^3;$

$\therefore$ दी हुई राशिमाला $=(x^3+y^3)-(y^3+z^3)=x^3-z^3.$

76. $(a-b)$ और (a^2+ab+b^2) का गुणनफल ।

साधारण गुणन क्रिया द्वारा ज्ञात होता है कि,

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;$$

इसलिए किसी भी दो घन राशियों के अन्तर का गुणनखंड निकालने के लिए निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:—

सूत्र । $\mathbf{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$....................(8)

a और b चाहे किसी भी मान के क्यों न हों सूत्र सदा ही सत्य होगा। इसलिए दो घन-राशियों के अन्तर के रूप में प्रकट की जा सकनेवाली किसी भी राशिमाला का गुणनखंड इस सूत्र की सहायता से बहुत ही सरलता-पूर्वक निकाला जासकता है।

टीका—यह सूत्र (6) सूत्र से प्राप्त होता है क्योंकि,

$$(a-b)^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b),$$

$$\therefore\ a^3-b^3=3ab(a-b)+3ab(a-b)=(a-b)^3+3ab(a-b);$$

अर्थात् $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$$=(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

उदाहरण 1. $x^2+2ax+4a^2$ को $x-2a$ से गुणा करो।

$x=A$, और $2a=B$ लिखकर निर्णय गुणनफल

$$(x-2a)(x^2+2ax+4a^2)=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

$$=A^3-B^3$$

$$=x^3-(2a)^3=x^3-8a^3.$$

उदाहरण 2. $125x^3-64y^3$ के गुणनखंड निकालो।

मानलो कि $5x=a$ और $4y=b$ होने पर,

$$125x^3-64y^3=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=(5x-4y)\{(5x)^2+5x.4y+(4y)^2\}$$

$$=(5x-4y)(25x^2+20xy+16y^2)$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि, $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)=0.$

चूँकि $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3,$

$(y-z)(y^2+yz+z^2)=y^3-z^3;$

और $(z-x)(z^2+zx+x^2)=z^3-x^3;$

$\therefore$ दी हुई राशिमाला $=(x^3-y^3)+(y^3-z^3)+(z^3-x^3)=0.$

प्रश्नावली 17.

गुणा करोः—

1. $1-x+x^2$ को $1+x$ से। 2. x^4+x^2+1 को x^2-1 से।

3. $4a^2-2a+1$ को $2a+1$ से।

4. $x^2+3xy+9y^2$ को $x-3y$ से।

5 $a^4+a^2bc+b^2c^2$ को a^2-bc से।

6. $a^2x^2-5abx+25b^2$ को $ax+5b$ से।

7. $a^{2m}+a^mb^n+b^{2n}$ को a^m-b^n से।

8. $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^3+a^3)$ का संलग्न गुणनफल निकालो।

9. $(a+b)$, $(a-b)$, (a^2+ab+b^2) और (a^2-ab+b^2) का संलग्न गुणनफल निकालो।

10. $(x-3)(x^2+3x+9)-(x-2)(x^2+2x+4)$ को सरल करो।

11. सिद्ध करो कि $(a+b)(a^2-ab+b^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$$-(c-a)(c^2+ca+a^2)=2(a^3+b^3).$$

गुणनखण्ड निकालोः—

12. $x^3+27.$ 13. $8a^3-125.$ 14. $m^3+64n^3.$

15. $343a^3b^6-1.$ 16. $x^3+(y+z)^3.$ 17. $(x+y)^3-(x-y)^3.$

18. सिद्ध करो कि—

(i) $ax(x^2-a^2)+a^2(x+a)\equiv a(x^3+a^3).$

(ii) $(x+y)^4-3xy(x+y)^2\equiv(x+y)(x^3+y^3).$

19. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ होने पर सिद्ध करो कि $a^3+\frac{1}{a^3}=0.$

20. $a-\frac{1}{a}=3$ होने पर $a^3-\frac{1}{a^3}$ का मान बताओ।

21. सिद्ध करो कि $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=x^6-y^6$ के गुणनफल की सहायता से $64x^6-y^6$ का गुणनखण्ड निकाला जासकेगा।

22. $f(x)\equiv x^3$ होने पर $f(a+b)+f(a-b)-2f(a)$ का मान बताओ।

———:o:———

सातवाँ अध्याय

सहज सरल समीकरण (Easy Simple Equations)

77. समीकरण (Equation) और तादात्म्य (Identity).

जब दो बीजीय राशियाँ परस्पर समान होती हैं, तो उन दोनों के बीच में '=' का चिह्न लिखकर उनकी समानता सूचित की जाती है। '=' चिह्न से युक्त दोनों राशियों का साधारण नाम **समीकरण** है।

समता-प्रकाशक चिह्न के दोनों ओर वर्त्तमान दो समीकरण राशियों को पक्ष (Side) और अंग (Member) कहते हैं। उक्त चिह्न के बाईं ओर वर्त्तमान राशि को **वाम पक्ष** (Left-hand Side) या **प्रथम पक्ष** और दाहनी ओर वर्त्तमान राशि को **दक्षिण पक्ष** या **द्वितीय पक्ष** (Right-hand Side) कहते हैं।

इस सिलसिले में निम्नलिखित दो अवस्थाओं पर विचार करना होगा—

(1) अक्षर चाहे किसी भी मान के क्यों न हों, समीकरण के दोनों पक्ष समान होते हैं।

(2) संश्लिष्ट अक्षर केवल विशेष मान से युक्त होने पर ही दोनों पक्ष समान होते हैं।

प्रथम प्रकार के समीकरणों को **तादात्म्य समीकरण** या संक्षेप में **तादात्म्य** (Identity) कहते हैं और दूसरे प्रकार के समीकरणों को **सापेक्ष** या **कपिलत** (Conditional) समीकरण या संक्षेप में **समीकरण** (Equation) कहते हैं।

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ सूत्र एक तादात्म्य है। कारण a और b चाहे किसी भी मान के क्यों न हो, उन दोनों ही पक्षों का मान (Value) सदा ही समान होगा किन्तु $x+7=2x+2$ एक समीकरण है क्योंकि यहाँ x का मान केवल 5 ही होने पर दोनों पक्ष समान हो सकते हैं। 5 के अतिरिक्त दूसरा कोई भी मान ग्रहण करने पर उनकी समता रक्षित नहीं रहती।

समीकरण में वर्त्तमान जिस अक्षर का एक या एक से अधिक मान निर्दिष्ट होने पर ही उसके दोनों पक्ष समान हो जाते हैं, उसे **अज्ञात राशि** (Unknown Quantity) कहते हैं।

अज्ञात राशि साधारणतः वर्णमाला के अन्तवाले अक्षरों द्वारा सूचित होती है; जैसे, x, y और z आदि।

बहुधा समीकरण में वर्त्तमान एक से अधिक अक्षरों का विशेष मान निर्दिष्ट करके दोनों पक्षों की समानता सिद्ध की जाती है। इस प्रकार सभी अक्षरों को 'अज्ञात राशि' कहते हैं।

अज्ञात राशि के अतिरिक्त समीकरण में वर्त्तमान अन्यान्य राशियों को ज्ञात मान से युक्त मान लिया जाता है और उनको 1, 2, 3 आदि अंकगणित सम्बन्धी संख्याओं या a, b, और c आदि वर्णमाला के आदि के अक्षरों से प्रकट किया जाता है।

संज्ञा। जिस समीकरण में ज्ञात राशियाँ अंकगणित की संख्याओं द्वारा प्रकट की जाती हैं उसे **संख्यात्मक** (Numerical) समीकरण कहते हैं। और जिस समीकरण में ज्ञात राशियाँ अक्षरों द्वारा सूचित की गई हों, वह **आक्षरिक** (Literal) समीकरण कहलाता है।

78 मूल (Root).

अज्ञात राशि के दोनों पक्षों की समता जिस मान के द्वारा सिद्ध होती है उसे उस समीकरण का **मूल** (Root or Solution) कहते हैं और समीकरण इस मान से सिद्ध होता है, यह कहा करते हैं।

जैसे, $x=3$ होने पर $2x+3=x+6$ इस समीकरण के प्रत्येक पक्ष का मान 9 है। इसलिए x के इस विशेष मान द्वारा समीकरण सिद्ध हुआ। इसलिए उक्त समीकरण का **मूल** (Root) 3 है।

टीका—याद रक्खो कि किसी समीकरण का समाधान करने के लिए उसका मूल निकालना होता है।

79. सरल समीकरण (Simple Equation).

जिस समीकरण में केवल एक अज्ञात राशि रहती है और वह प्रथम घात युक्त रहती है उसे **सरल समीकरण** कहते हैं; जैसे,

$2x+5=12$ एक सरल समीकरण है क्योंकि इसमें केवल एक अज्ञात राशि (x) वर्तमान है और वह प्रथम घात से युक्त है।

टीका—एक अज्ञात राशि से युक्त समीकरण का मान अज्ञात राशि के सर्वोच्चघात के सूचक द्वारा निर्धारित होता है; जैसे, $2x+3=3x+4$ एक *प्रथम मान का समीकरण* (Equation of the First Degree) क्योंकि यहाँ अज्ञात राशि x के सर्वोच्चघात 'x' का सूचक 1 है।

$x^2=2x+5$ एक सरल समीकरण नहीं है। यह एक *द्वितीय मान* का समीकरण (Equation of the Second Degree) है और इसे *द्विघात समीकरण* (Quadratic Equation) कहते हैं।

80. स्थानापन्न करना (Substitution).

कोई संख्या किसी समीकरण का मूल है या नहीं यह निश्चित करने के लिए उक्त संख्या को अज्ञात राशि का मान स्वीकार करके समीकरण के दोनों पक्षों का मान निकालना होता है। यदि इस प्रकार निकाला हुआ दोनों पक्षों का मान परस्पर समान हो तो केवल उसी समय उक्त संख्या को उस समीकरण का मूल कहा जाता है। इस विधि को **स्थानापन्न करना** (Substitution) कहते हैं; जैसे, $5x+6=3x+12$ समीकरण में x का मान 3 स्वीकार करने पर हरएक पक्ष का मान 21 होता है। अतएव इस समीकरण का मूल 3 है। किन्तु 4 इस समीकरण का मूल नहीं है क्योंकि x का मान 4 मान लेने पर दोनों पक्षों का मान एक दूसरे के समान नहीं होता। उस समय $5x+6=26$, किन्तु $3x+12=24$.

टीका—प्रारम्भिक शिक्षार्थी को समीकरण का मूल निकाल कर यह देख लेना चाहिए कि निकाले गये मूल के द्वारा समीकरण के दोनों पक्षों की समता स्थायी रहती है या नहीं।

81. समीकरण को हल करना (Solving an Equation).

किसी समीकरण को हल करने के लिए विभिन्न प्रक्रियाओं की सहायता से समीकरण का रूप क्रमशः परिवर्तित करके '$x=$ कोई अज्ञात राशि' इस प्रकार के आकार में परिणत करना होता है।

चाहे किसी भी प्रकार का समीकरण क्यों न हो उसको हल करने के लिए नीचे लिखी हुई दो स्वयं सिद्धियों (Axioms) का प्रयोग करना होता है।

(1) समान समान राशि के साथ समान समान अथवा एक ही राशि को जोड़ने पर उनके योगफल परस्पर समान होते हैं और घटाने पर उनके अन्तर भी समान होते हैं। इसे 'पक्षान्तरकरण प्रक्रिया' (Principle of Transposition) कहते हैं।

(2) समान समान राशि को समान समान अथवा एक ही राशि के द्वारा गुणा करने पर गुणनफल परस्पर समान होते हैं और भाग देने पर भागफल भी परस्पर समान होते हैं।

इसे 'सरलीकरण' प्रक्रिया (Principle of Simplification) कहते हैं।

ऊपर लिखी हुई दोनों प्रक्रियाओं में से किसी एक का अथवा दोनों का प्रयोग करके किसी भी सरल समीकरण का समाधान किया जासकता है। ऊपर लिखी हुई दोनों प्रक्रियाओं के प्रयोग का अभ्यास विद्यार्थियों को करना चाहिए।

82. समान समीकरण (Equivalent Equations).

यदि दो समीकरण हों और अज्ञात राशि के किसी निर्दिष्ट मान के द्वारा उनमें से एक के सिद्ध होजाने पर यदि दूसरा भी सिद्ध होजाय, तो उनको समान समीकरण कहते हैं;

जैसे, $x+3=15$ और $2x+1=25$ दोनों समान समीकरण हैं क्योंकि पहला केवल $x=12$ द्वारा सिद्ध होता है और दूसरा भी केवल $x=12$ द्वारा सिद्ध हो जाता है।

किन्तु $x^2=144$ समीकरण उक्त दोनों समीकरणों के समान नहीं है क्योंकि यह समीकरण $x=12$ द्वारा सिद्ध होता है और $x=-12$ द्वारा भी सिद्ध होता है परन्तु पहलेवाले दोनों समीकरण $x=-12$ द्वारा नहीं सिद्ध होते।

इसलिए एक ही बीज या मूल से युक्त दो समीकरणों को समान समीकरण कहा जासकता है।

83. पक्षान्तरकरण प्रक्रिया (Principle of Transposition).

उदाहरण। तराज़ू के एक पलड़े पर 5 सेर का एक बाट और अज्ञात तोल की एक वस्तु रक्खी गई। दूसरे पलड़े में 12 सेर का एक बाट रखकर देखा गया, तो उनका वज़न समान था। बताओ उस वस्तु का वज़न कितना था।

मानलो कि तोल में वह वस्तु x सेर थी। तो प्रश्न की शर्त के अनुसार

x सेर $+5$ सेर $=12$ सेर,

अर्थात् $x+5=12$ ....(1)

यहाँ दोनों पलड़ों में से 5 सेर वज़न का बाट हटा देने पर पहले पलड़े में वह अज्ञात तोल की वस्तु और दूसरे पलड़े में केवल 7 सेर तोल का बाट रह जायगा और दोनों ही पलड़ों का वज़न बराबर होगा।

$\therefore x=7$ सेर।

यहाँ क्रिया करते समय दोनों पलड़ों में से 5, 5 सेर हटाये गये हैं।

$\therefore x+5-5=12-5$,

अर्थात् $x=7$..............................(2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) से ज्ञात होता है कि 5 को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में चिह्न परिवर्तित करके स्थानान्तरिक किया गया है।

यही पक्षान्तरकरण प्रक्रिया है। इस प्रक्रिया की सहायता से समीकरण के किसी पद को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में चिह्न का परिवर्त्तन करके स्थानान्तरित किया जासकता है।

84 सरलीकरण (Simplification).

अज्ञात तोल की किसी चीज़ का तोल निकालते समय देखने में आता है कि तराज़ू के एक पलड़े पर उस चीज़ को रख देने पर उसके बराबर करने के लिए दूसरे पलड़े पर 12 सेर तोल का एक बाट रखने की आवश्यकता पड़ती है। इससे वस्तु की तोल x मान लेने पर ज्ञात हुआ कि $x=12$. फिर जिस पलड़े में वस्तु रक्खी गई है उसी पलड़े में यदि समान तोल की एक दूसरी वस्तु रखली जाय, तो देखने में आवेगा कि तराज़ू के दोनों पलड़ों को बराबर करने के लिए दूसरे पलड़े में 12 सेर तोल का एक और

बाट रखना होगा। तात्पर्य यह है कि दोनों पक्षों के वज़न को दूना करके भी तराज़ू की समानता को स्थायी रखना सम्भव है। इसलिए $x\times 2 = 12\times 2$ लिखा जासकता है।

इस प्रकार दोनों पक्षों के वज़न को तिगुना कर देने पर भी तराज़ू की डाँड़ी की सिधाई ठीक वैसी ही बनी रहेगी। वास्तव में दोनों पक्षों में वज़न का समान समान गुणितक रखने पर भी तराज़ू की डाँड़ी की सिधाई में किसी प्रकार से फ़र्क़ नहीं आवेगा। इसलिए $x\times 3=12\times 3$, $x\times 4=12\times 4$ और साधारण भाव से $x\times a=12\times a$.

ठीक इसी प्रकार के उपाय से देखने में आता है कि उक्त तोल का आधा, तिहाई, चौथाई आदि किसी भी टुकड़े का उपयोग करने पर भी तराज़ू की डाँड़ी की सिधाई बनी रहेगी। इसलिए यदि $x=12$ हो, तो $x\div 2=12\div 2$, $x\div 3=12\div 3$, और साधारण तौर से $x\div a=12\div a$.

इससे स्पष्ट ही समझ में आजाता है कि समीकरण के पदों को एक ही राशि के द्वारा गुणा करने या भाग देने पर भी उसकी समता बनी ही रहती है।

85. सरल समीकरण के विभिन्न रूप (Types of Simple Equation).

सरल समीकरण के समाधान की प्रक्रिया पर विचार करने से पहले उक्त समीकरणों के भिन्न-भिन्न रूपों और उनके समाधान करने की पद्धति पर विचार किया जायगा।

सरल समीकरण के रूप मुख्य तौर से निम्नलिखित तीन प्रकार के हुआ करते हैं:—

(1) प्रथम प्रकार— $ax=b$ यही सरल समीकरण का सबसे सरल रूप है। इसके एक पक्ष में चाहे किसी भी गुणक से युक्त अज्ञात राशि हो, दूसरे पक्ष में केवल ज्ञात राशि ही वर्तमान रहती है।

(2) द्वितीय प्रकार— $ax+b=c$ यह सरल समीकरण का एक दूसरा रूप है। इसके एक पक्ष में अज्ञात राशि x का चाहे कोई भी गुणितक और एक ज्ञात राशि हो, दूसरे पक्ष में केवल ज्ञात राशि ही वर्तमान रहती है।

(3) तृतीय प्रकार—ऊपर कहे गये दो प्रकार के सरल समीकरणों के अतिरिक्त एक दूसरे रूप का समीकरण भी (जैसे, $ax+b=cx+d$) देखने में आता है। इस रूप के समीकरण में अज्ञात राशि दोनों ही पक्षों में विद्यमान रहती है।

ऊपर लिखी गई a, b, c, d राशियाँ धन या ऋण पूर्ण सख्या या भिन्न—किसी भी मान से युक्त हो सकती हैं।

स्मरण रखना होगा कि सभी प्रकार के समीकरण का समाधान करते समय पहले पक्षान्तरकरण प्रक्रिया की सहायता से अज्ञात राशि युक्त पदों को बायें पक्ष में, और दूसरी ज्ञात राशियों को दाहिने पक्ष में स्थानान्तरित करने के बाद सरलीकरण प्रक्रिया का प्रयोग किया जाता है।

86. सरल समीकरण (प्रथम प्रकार): $ax=b$.

दोनों पक्षों को x के गुणक अर्थात् a से भाग देने से

$$\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}, \text{ अर्थात् } x=\frac{b}{a};$$

अतएव $\frac{b}{a}$ यह समीकरण का मूल है।

a और b पूर्ण संख्या या भिन्न होने पर भी सर्वत्र ही इस प्रक्रिया का अवलम्बन किया जाता है। a और b को चाहे एक या दो भिन्न हों उक्त भिन्न के हरों के ल० स० के द्वारा दोनों पक्षों को गुणा करके समीकरण को भिन्न से मुक्त कर लिया जाता है।

समीकरण में एक ही पक्ष के एक अथवा अधिक पदों में अज्ञात राशि वर्तमान होने पर भी इस प्रक्रिया के द्वारा समीकरण का समाधान किया जासकता है; जैसे,

$ax+bx+cx=d$ होने पर $(a+b+c)x=d$,

दोनों पक्षों को $(a+b+c)$ द्वारा भाग करने से, $x=d\div(a+b+c)$.

इसी प्रकार, $ax+bx+cx=d+e+f$ होने पर

$$x(a+b+c)=d+e+f; \text{ अथवा } x=\frac{d+e+f}{a+b+c}.$$

उदाहरण 1. $5x=15$ समीकरण को हल करो।

दोनों पक्षों को 5 से भाग देने पर

$x=15\div5=3;$

$\therefore$ उक्त समीकरण का मूल 3 है।

उदाहरण 2. $\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}$ को हल करो।

यहाँ $a=\frac{1}{2}, b=\frac{2}{3}$ है।

$\therefore$ दोनों ही भिन्न हैं; दोनों भिन्नों के हर 2 और 3 के ल० स० 6 से दोनों पक्षों को गुणा करने से दिया हुआ समीकरण

$3x=4$ यह रूप धारण करता है।

अब इसके दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर $x=\frac{4}{3}$ अथवा $1\frac{1}{3};$

$\therefore$ समीकरण का मूल $1\frac{1}{3}$ है।

उदाहरण 3. किसी संख्या के तिगुने के साथ उसका चौगुना जोड़ने से 84 होता है, तो वह संख्या बताओ।

मान लो कि निर्णेय संख्या x है;

$\therefore$ उस संख्या का तिगुना $=3x$, और चौगुना $=4x$.

अब प्रश्न की शर्त के अनुसार

$3x+4x=84$, अथवा $7x=84$.

दोनों पक्षों को 7 से भाग देने पर

$x=12;$

$\therefore$ निर्णेय संख्या $=12$.

उदाहरण 4. $5\cdot2x=15\cdot6$ को हल करो।

दोनों पक्षों को $5\cdot2$ से भाग देने पर

$x=\frac{15\cdot6}{5\cdot2}$ अथवा $x=3;$

इसलिए निर्णेय मूल 3 है।

दशमलवों को समान भिन्न में परिवर्तित करके साधारण नियम के अनुसार क्रिया की जाती है।

उदाहरण 5. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13$ को हल करो।

भिन्नों के हरों 2, 3 और 4 के ल० स० 12 से दोनों पक्षों को गुणा करने पर

$6x+4x+3x=13\times 12,$

अर्थात् $13x=13\times 12,$

$\therefore\ x=12,$

अतएव निर्णय मूल $=12$

प्रश्नावली 18.

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

1. $2x=4$ 2. $7x=28.$ 3. $-17x=51.$

4. $\frac{1}{2}x=3.$ 5. $-\frac{1}{3}x=\frac{3}{4}.$ 6. $\frac{3}{4}x=12.$

7. $\frac{1}{6}x=\frac{1}{5}$ 8. $\frac{x}{4}=\frac{3}{8}.$ 9. $2\cdot 5x=10.$

10 $-8\cdot 1x=24\cdot 3.$ 11. $4\frac{2}{3}x=9\frac{1}{3}.$

12. $x+3x=12.$ 13. $\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x=17.$

14. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x=1+\frac{1}{6}.$ 15 $1\cdot 5x+2\cdot 6x=2\cdot 05.$

16. किसी संख्या को 5 से गुणा करने पर 30 आता है, तो वह संख्या बताओ।

17. किस संख्या को 4 से भाग देने पर भागफल 9 आता है तो वह संख्या बताओ।

18 किसी संख्या को 7 से गुणा करने पर गुणनफल 35 होगा ?

19. किस संख्या को 32 से भाग देने पर भागफल $\frac{1}{8}$ होगा ?

20. किसी संख्या के तिगुने को 8 से भाग देने पर भागफल 9 होता है, तो वह संख्या बताओ।

87. सरल समीकरण (द्वितीय प्रकार): $ax+b=c$.

'पक्षान्तरकरण' प्रक्रिया के द्वारा b को बायें पक्ष से दाहिने पक्ष में स्थानान्तरित करने पर $ax=c-b$ प्राप्त होता है। यह प्रथम प्रकार का एक समीकरण है।

इसके दोनों पक्षों को a से भाग देने पर

$$\frac{ax}{a}=\frac{c-b}{a}, \text{ अथवा } x=\frac{c-b}{a}.$$

इसलिए इसका मूल $\frac{c-b}{a}$ है।

विकल्प रूप (Alternative Form):

इस प्रकार का समीकरण $d(ax+b)=c$ आकार का भी हो सकता है। यहाँ दोनों पक्षों को d से भाग देने से ही यह पूर्व आकार में परिवर्तित होता है।

उदाहरण 1. $2x+5=11$ समीकरण को हल करो।

दोनों पक्षों से 5 घटाने पर अर्थात् पक्षान्तरकरण प्रक्रिया द्वारा 5 को बायें पक्ष से दाहिने पक्ष में लेजाने पर

$$2x=11-5=6.$$

अब दोनों ही पक्षों को 2 से भाग देने पर

$$x=3.$$

उदाहरण 2. $-3x+4=10$ को हल करो।

दोनों पक्षों में $3x$ जोड़ने पर

$$-3x+4+3x=10+3x,$$

अर्थात् $4=10+3x$;

अब दोनों पक्षों से 10 घटाने पर $4-10=10+3x-10$.

अर्थात् $-6=3x$.

अन्त में दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर $x=-2$.

उदाहरण 3. $5(3x+7)=50$ को हल करो।

दोनों पक्षों को 5 से भाग देने पर, $3x+7=50 \div 5=10$; 7 को दाहिने पक्ष में ले जाने पर, $3x=10-7=3$; अब दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर $x=1$.

उदाहरण 4. ऐसी तीन संलग्न संख्याएँ बताओ जिनका योगफल 42 हो।

मान लो कि उन तीनों संख्याओं में से सब से छोटी संख्या x है, तो उसके बाद की दो संलग्न संख्याएँ क्रमशः $x+1$ और $x+2$ होंगी।

प्रश्न की शर्त के अनुसार,

$$x+(x+1)+(x+2)=42,$$

अर्थात् $3x+3=42$.

3 को दाहिने पक्ष में हटाने पर $3x=42-3=39$;

अब दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर

$$x=13.$$

$\therefore$ तीनों निर्णेय संख्याएँ 13, 13+1, 13+2;

अर्थात् 13, 14 और 15 हैं।

प्रश्नावली 19.

निम्नलिखित समीकरणों से x का मान निकालोः—

1. $x-2=5$. 2. $2x+3=7$. 3. $7x-4=10$.

4. $x+5=12$. 5. $\frac{3}{4}x-8=7$. 6. $3(2x+6)=126$.

7. $\frac{x+3}{2}=1 \cdot 3$. 8. $7(9x+3)=84$. 9. $28=4(5x-3)$.

हल करोः—

10. $6(11x-\frac{1}{2})=9$. 11. $\frac{2}{3}(12-4 \cdot 8x)=1 \cdot 6$.

12. $5-1 \cdot 6x=\frac{1}{5}$ 13. $\frac{2}{3}-\frac{x}{6}=\frac{1}{2}$.

14. किसी संख्या के तिगुने में 6 जोड़ने से 21 आता है, तो वह संख्या बताओ।

15. किस संख्या के आधे में से 9 घटाने पर अन्तर 33 होगा ?

16. किसी संख्या में 4 जोड़ने पर योगफल को जब 3 से गुणा किया जाता है, तो 51 आता है, तो बताओ वह संख्या कौनसी है।

17. किस संख्या में से 3 घटाया जाय कि शेष को 8 से गुणा करने पर गुणनफल 112 हो ?

18. किस संख्या के 5 गुने में 6 जोड़ने पर 41 होगा ?

88. सरल समीकरण (तृतीय प्रकार): $ax+b=cx+d$.

यहाँ पक्षान्तरकरण प्रक्रिया की सहायता से अज्ञात राशिवाले पदों को बायें पक्ष में और अन्यान्य राशियों को दायें पक्ष में स्थानान्तरित कर दिया गया है ; इसलिए,

$ax-cx=d-b$, अथवा $(a-c)x=d-b$;

अब दोनों पक्षों को $a-c$ से भाग देने से

$$\frac{(a-c)x}{a-c}=\frac{d-b}{a-c};$$

अथवा $$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

a, b, c और d राशियों के एक या अधिक भिन्न होने पर पदों को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में हटाने से पहले समीकरण को भिन्न से मुक्त कर लेना चाहिए।

समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही पद वर्त्तमान रहने पर दूसरे पदों को पक्षान्तर करने के पहले इन पदों को हटाना चाहिए।

उदाहरण 1. $5x+3=2x+6$ को हल करो।

पक्षान्तर करने से, $5x-2x=6-3$,

अर्थात् $3x=3$.

अब 3 से भाग देने पर $x=1$.

उदाहरण 2. $7(x-18)=3(x-14)$ को हल करो।

दोनों पक्षों का विकोष्ठिकरण करने पर

$7x-126=3x-42$,

पक्षान्तर करने से, $7x-3x=-42+126$,

अथवा $4x=84$;

अब 4 से भाग देने पर $x=21$.

उदाहरण 3. 45 को ऐसे दो भागों में बाँटो कि उनमें से बड़े भाग का चौगुना छोटे भाग के 5 गुने के समान हो।

मान लो कि बड़ा भाग x है,

तो छोटा भाग $45-x$ होगा।

अब बड़े भाग का चौगुना $=4x$ और छोटे भाग का 5 गुना $=5(45-x)$

$\therefore$ दी हुई शर्त के अनुसार

$$4x=5(45-x);$$

अर्थात् $$4x=225-5x.$$

पक्षान्तर करने पर, $9x=225$, $\therefore$ $x=25$

$\therefore$ बड़ा भाग $x=25$, और छोटा भाग $45-x=45-25=20$.

प्रश्नावली 20.

हल करो:—

1. $5x+2=2x+23$.
2. $2x-7=x+11$.
3. $4x-13=2-x$.
4. $3x=2x+15$.
5. $15x+28=48+5x$.
6. $56-21x=36x-1$.
7. $72x-18=65x+1$.
8. $3(x-2)=x+4$.
9. $2x+3=5(x-3)$.
10. $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{x+11}{5}$.
11. $\frac{1}{5}(x+2)=5(1+3-2x)$.
12. $\dfrac{x-2}{2}-2=\dfrac{x-3}{3}$.
13. $\cdot8(2-4x)=\cdot32(3-5x)$.
14. $2(x+3)+7=3(x+5)+4$.
15. $(2x+5)=7+(x+3)$.
16. एक ऐसी संख्या बताओ जिसके तिगुने में 4 जोड़ने पर और दुगने में 6 जोड़ने पर दोनों के योगफल समान हों।
17. 48 में से कौनसी संख्या घटाने पर शेष उक्त संख्या का 5 गुना आवेगा ?
18. एक ऐसी संख्या बताओ जिसके तिगुने में 13 जोड़ने पर और 8 गुने में से 12 घटाने पर फल एक ही आता हो।

89. सरल समीकरण का विशेष रूप (Special Type).

कभी कभी अज्ञात राशि के उच्चतर घातों के वर्तमान रहने पर भी समीकरण वास्तव में केवल सरल समीकरण का ही एक रूप होता है क्योंकि उच्चतर घात सम चिह्न और एक ही गुणक से युक्त अवस्था में दोनों पक्षों में विद्यमान रहते हैं। इसलिए उनको समीकरण से हटाने पर दोनों पक्षों की समता में किसी प्रकार का फ़र्क़ नहीं पड़ता।

उदाहरण 1. $(x+1)(x+2)=(x-1)(x+6)$ को हल करो।

इस समीकरण में अज्ञात राशि x के द्वितीय घात x^2 के वर्तमान होने पर साधारणतः यह एक द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) सा मालूम पड़ता है परन्तु दोनों पक्षों से x^2 को हटा देने पर ही ज्ञात होता है कि यह एक सरल समीकरण है।

दोनों पक्षों की गुणनक्रिया सिद्ध करने पर,

$$x^2+3x+2=x^2+5x-6.$$

दोनों पक्षों से x^2 हटाने पर,

$$3x+2=5x-6;$$

अब पक्षान्तर करने पर, $2x=8$; $\therefore x=4$.

उदाहरण 2. $(x+1)^2=x^2+3$ को हल करो।

यहाँ बायें पक्ष का विकोष्ठिकरण करने से

$$x^2+2x+1=x^2+3;$$

अब दोनों पक्षों से x^2 को हटाने से

$$2x+1=3;\ \text{अतएव } x=1.$$

प्रश्नावली 21.

हल करोः—

1. $x^2+2=x^2+x$.
2. $x^2+3=(x-1)(x+2)$.
3. $(x+1)(x+2)=x(x+4)$.
4. $x^2-36=x(x-4)$.
5. $(x+5)(x-2)=x(x+2)+1$.
6. $(x^2-3x-7)(x-1)=x^2(x-4)-5(x-2)$.

7. $(x^2-2x-5)(x+1)=x^2(x-1)-8(x+1)$.

8. $(x+1)(x-4)=x^2-11$.

9. $3x(2x+1)=6(x+7)(x-3)$.

10. $(x+1)^2+(x-2)^2=2x^2-x+1$.

11. x का मान कितना होने पर $15-x(8-x)$ और $(x-5)^2$ में दोनों राशियाँ परस्पर समान होंगी ?

12. सिद्ध करो कि निम्नलिखित समीकरण तादात्म्य हैं :—

    (i) $(x+3)(2x-7)+3=2x(x-5)+9(x-2)$.

    (ii) $6-4(x-3)=2(9-2x)$.

13. प्रमाणित करो कि $(x-5)^2-4(3-x)=(x+2)^2-10(x-1)-1$ समीकरण x के किसी भी मान के द्वारा सिद्ध होता है ।

14. x का मान कितना होने पर $\frac{7(x-3)}{4}-\frac{3(x-2)}{2}$ का मान 8 होगा ?

15. किस संख्या में 1 जोड़ने से योगफल को उस संख्या से गुणा करने पर गुणनफल उस संख्या के वर्ग से 3 अधिक होगा ?

16. एक ऐसी संख्या बताओ जिसे किसी ऐसी संख्या से गुणा करने से जो उस संख्या से 3 अधिक हो गुणनफल उस संख्या के वर्ग से 15 अधिक होता हो ।

17. वह कौनसी संख्या है जिसमें 1 जोड़ने पर योगफल को यदि किसी ऐसी संख्या से गुणा किया जाय जो उस संख्या से 2 अधिक हो, तो गुणनफल पहली संख्या के वर्ग से 23 अधिक हो जावे ?

18. $a=3$ और $b=2$ होने पर क्या x का कोई ऐसा मान है जिसके द्वारा $x-3a\div a+b$ और $(x-3a)\div(a+b)$ दोनों राशियाँ परस्पर समान हों ?

——:o:——

आठवाँ अध्याय

विन्दु अङ्कित करना (Plotting of Points) और लेखाचित्र (Graphs)

90. रेखागणित में बीजगणित का प्रयोग (Application of Algebra to Geometry).

अबतक संख्याओं और संख्या सम्बन्धी प्रक्रियाओं पर ही विस्तारपूर्वक विचार किया गया है। अब इस बात पर विचार किया जायगा कि बीजीय राशि तथा व्यंजक किस प्रकार रेखागणित के विन्दुओं और चित्रों द्वारा सूचित हो सकते हैं। बहुतसी ऐसी अवस्थाएँ हैं जिनमें इन सब चित्रों (लेखाचित्रों) की सहायता से बीजीय समीकरणों का हल पहले बतलाई गई प्रक्रिया की अपेक्षा अधिक आसानी से किया जासकता है। इस प्रकार के चित्रों की सहायता से किसी प्रश्न के हल करने की प्रक्रिया को लैखिक प्रक्रिया (Graphical Method) कहते हैं। यद्यपि लैखिक प्रक्रिया से प्रश्नों का हल प्रायः अत्यन्त सरल होजाता है तथापि बीजीय प्रक्रिया ही अधिक नियम-संगत और वैज्ञानिक भित्ति पर प्रतिष्ठित है। परन्तु लेखाचित्र किसी प्रश्न का एक स्पष्ट चित्र हमारे सामने पेश कर देता है। इसीलिए वैज्ञानिक जगत में इसका प्रयोग बड़ी शीघ्रतापूर्वक बढ़ रहा है।

91. संख्याओं द्वारा विन्दुओं का परिचय (Representation of Points by numbers).

पार्श्ववर्त्ती स्थान का परिचय ज्ञात रहने पर ही किसी भी स्थान की स्थिति का निर्देश किया जासकता है। उक्त परिचित स्थानों की सहायता से कोई अपरिचित व्यक्ति भी उस स्थान पर पहुँच सकता है। काग़ज़ पर कोई विन्दु कहाँ है इसका निर्णय करते समय भी इस एक ही पद्धति का अवलम्बन किया जाता है। यहाँ लम्बवत् एक दूसरे को काटती हुई दो सरल रेखाओं को अक्ष (Axis) के रूप में लिया जाता है। इसलिए इन दो रेखाओं से समतल (Plane) में स्थित उक्त किसी विन्दु की दूरी ज्ञात रहने पर ही विन्दु का स्थान निर्धारित किया जासकता है।

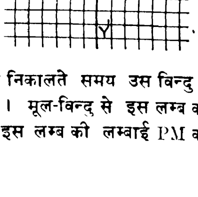
92. सांकेतिक अक्ष (Axes of Reference); भुज कोटि (Co-ordinates).

उपरोक्त जिन दो निर्दिष्ट (और साधारणतः परस्पर लम्बवत् स्थित) सरल रेखाओं की सहायता से किसी समतल के विन्दुओं का स्थान निर्धारित होता है उनमें से प्रत्येक को अक्ष-रेखा (Axis) कहते हैं। ये दोनों अक्ष-रेखाएँ इस समतल पर स्थित असीम लम्बाई की दो निर्दिष्ट सरल रेखाएँ हैं।

भुज-कोटि (Co-ordinates). मान लो कि काग़ज़ के समतल पर XOX' और YOY' दो सरल रेखाएँ एक दूसरी को लम्बरूप से O विन्दु पर काटती हैं। इस O विन्दु को 'मूल-विन्दु' (Origin) कहते हैं। XOX' और YOY' को क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष कहते हैं।

उक्त दोनों रेखाओं से इस समतल में स्थित किसी P विन्दु की दूरी मालूम रहने पर ही उस विन्दु का स्थान निर्दिष्ट किया जासकता है। इस विन्दु के प्रत्येक संख्यामान (Measure) को P विन्दु का भुज-कोटि (Co-ordinate) कहते हैं जिनको क्रमशः x और y से सूचित करते हैं।

P विन्दु से XOX' और YOY' अक्ष रेखाओं के ऊपर क्रमशः PM और PN दो लम्ब खींचो। मान लो कि PM और PN दोनों की लम्बाई का संख्यामान (किसी भी इकाई के अनुसार परिमित) क्रमशः x और y है। इस x और y को P विन्दु का भुज-कोटि कहते हैं। x को P विन्दु का भुज (Abscissa) और y को उसका कोटि (Ordinate) कहते हैं और P विन्दु को P (x, y) के रूप में लिखते हैं। चित्र से स्पष्ट ही देखने में आता है कि PN = OM = x, इसलिए OM और PM, P विन्दु के भुज-कोटि हैं।



अतएव किसी विन्दु P का भुज-कोटि निकालते समय उस विन्दु के x-अक्ष के ऊपर PM लम्ब खींचना होता है। मूल-विन्दु से इस लम्ब की दूरी OM को इस विन्दु का भुज और इस लम्ब की लम्बाई PM को इस विन्दु का कोटि कहते हैं।

इसके विपरीत भुज-कोटि ज्ञात रहने पर ही विन्दु का स्थान निर्धारित किया जाता है। यहाँ x-अक्ष पर दिये हुए OM भुज के समान करने के बाद M विन्दु से x अक्ष के ऊपर कोटि की लम्बाई के समान y-अक्ष पर एक PM लम्ब डालने की आवश्यकता पड़ती है।

अब यदि $OM = a$ और $PM = b$ हो, तो P विन्दु को $P(a, b)$ के रूप में निर्देश किया जायगा। अतएव, '(a, b) विन्दु' अथवा केवल (a, b) से एक ऐसा विन्दु निर्दिष्ट होता है जिसके भुज की लम्बाई a इकाई और कोटि की लम्बाई b इकाई है।

जैसे, P (3, 4) से एक ऐसा विन्दु सूचित होता है जिसका भुज = 3 इकाई और कोटि = 4 इकाई अर्थात् जिसका $x = 3$, और $y = 4$.

टीका 1. किसी विन्दु का 'x और y' रहने से उसके भुज और कोटि का बोध होता है।

टीका 2. भुज-कोटि ज्ञात रहने पर कागज़ के समतल पर विन्दु स्थापन करने को ही विन्दु का अंकित करना कहते हैं।

93. चिह्न-सम्बन्धी नियम (Convention of Signs).

OX और OY को दोनों अक्षों के धन (Positive) दिशा में गिनने पर OX′ और OY′ को उसकी विपरीत दिशा में (Negative) गिनना होगा। यही प्रचलित रीति है और यह स्वीकार कर लिया गया है कि मूल-विन्दु के दाहिनी ओर x-अक्ष की धन (Positive) दिशा और ऊपर की ओर y-अक्ष की धन (Positive) दिशा होती है।

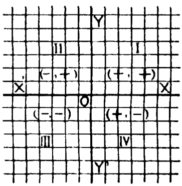
OX को एक सरल रेखा मानकर (अर्थात् YOY′ के दाहिनी ओर) खींची गई रेखाओं की लम्बाई को धन (Positive) और OX′ के समानान्तर खींची गई रेखाओं की (अर्थात् YOY′ के बाईं ओर) लम्बाई को ऋण (Negative) माना जाता है। इस प्रकार OY की समानान्तर (अर्थात् XOX′ के ऊपर की ओर) रेखाओं को धन और OY′ की समानान्तर (अर्थात् XOX′ के नीचे की ओर) रेखाओं को ऋण माना जाता है।

टीका—स्मरण रक्खो कि दाहिनी ओर ऊपर की ओर को सदा ही धन (Positive) दिशा मानते हैं।

दो अक्षों के द्वारा कागज़ के समतल को I, II, III और IV चिह्नित अंशों में विभक्त किया गया है। इन सबको क्रम से प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ चौथाई (Quadrant) कहते हैं।

प्रथम चौथाई (Quadrant) में स्थित विन्दुओं को भुज और कोटि दोनों ही धन (Positive) होते हैं क्योंकि वे y-अक्ष के दाहिनी ओर x-अक्ष के ऊपर की ओर होते हैं।

द्वितीय चौथाई (Quadrant) में स्थित विन्दुओं के भुज ऋण हैं क्योंकि वे y-अक्ष के बाईं ओर हैं किन्तु x-अक्ष के ऊपर हैं जिससे उनकी कोटि धन है।



तृतीय चौथाई (Quadrant) में स्थित विन्दुओं के भुज और कोटि दोनों ही ऋण हैं क्योंकि वे y-अक्ष के बाईं ओर और x-अक्ष के नीचे हैं।

चतुर्थ चौथाई (Quadrant) में स्थित विन्दुओं के भुज धन होते हैं क्योंकि वे y-अक्ष के दाहिनी ओर हैं किन्तु x-अक्ष के नीचे स्थित होने के कारण उनकी कोटि ऋण है।

नीचे दी हुई सूची से भुज-कोटि के चिह्न सरलतापूर्वक निर्णीत किये जासकते हैं :—

चौथाई या पाद ...	I	II	III	IV
भुज ...	+	−	−	+
कोटि ...	+	+	−	−

94. वर्गांकित काग़ज़ (Squared Paper).

काग़ज़ के ऊपर समान समान दूरी पर कुछ क्षैतिज (Horizontal) ऊर्ध्वाधर (Vertical) सरल रेखाएँ (बहुधा काग़ज़ की चौड़ाई के समानान्तर खींची गई रेखाओं को क्षैतिज और उन पर लम्बरूप से खड़ी सरल रेखाओं को उर्ध्वाधर रेखाएँ कहते हैं।) खींचने पर काग़ज़ कई समान वर्ग क्षेत्रों में विभक्त हो जाता है। इस प्रकार वर्गाङ्कित काग़ज़ को 'Squared Paper' कहते हैं। उक्त समानान्तर रेखाओं में एक दूसरी के बीच की दूरी 1 इंच का $\frac{1}{10}$ होती है और उनमें प्रत्येक पाँचवीं अथवा दसवीं को अन्यान्य रेखाओं की अपेक्षा कुछ मोटी खींचते हैं इस प्रकार वर्गाङ्कित काग़ज़ उक्त रेखाओं के द्वारा (1) एक इंच के दसवें अंश के समान लम्बाई के वाहुओं से युक्त बहुत से छोटे वर्गों और, (2) आधी इंच या एक इंच लम्बी वाहुओं और ज़्यादा मोटी रेखाओं से सीमित कई वर्गों में बँट जाता है।

वर्गाङ्कित काग़ज़ के द्वारा विन्दु-अङ्कन कार्य्य में विशेष सुविधा होती है क्योंकि इसके ऊपर विन्दु-समूहों की कोटि अङ्कित करने की और अङ्कित कोटि की लम्बाई नापने की कोई आवश्यकता नहीं पड़ती।

टीका—यदि लम्बाई की इकाई फ़ुट या इंच न मानकर सेण्टीमीटर या मिलीमीटर मानी जाय, तो उसके अनुसार भिन्न प्रकार के वाहुओं से युक्त वर्गों में विभक्त वर्गाङ्कित काग़ज़ काम में लाया जायगा।

95. विन्दु अंकित करना (Plotting of Points).

इससे पहले अक्ष, पाद या चौथाई, भुज-कोटि के चिह्न आदि विषयों के सम्बन्ध में जानने योग्य सभी बातों पर विचार किया गया है; इसलिए भुज-कोटि ज्ञात रहने पर सरलतापूर्वक विन्दुओं का स्थान निर्धारित किया जासकता है। विन्दुओं के स्थान का निरूपण करने की क्रिया को 'विन्दु अङ्कन' क्रिया कहा जाता है। विन्दु अंकित करते समय निम्नलिखित नियमों को विशेषरूप से ध्यान में रखना चाहिये :—

(1) दोनों अक्ष खींचकरके उनको धन तथा ऋण दिशा का निर्देश करो। परस्पर काटनेवाली दो मोटी रेखाओं को x-अक्ष और y-अक्ष के रूप में ग्रहण करना सुविधाजनक होगा।

(2) सुविधाजनक और उत्तम इकाइयों का निर्वाचन करो ।

(3) दोनों अक्षों के ऊपर उक्त राशियों को चिह्नित करके सूचित राशियों का स्पष्ट उल्लेख करो । भुज और कोटि का परिमाण साधारणतः एक ही इकाई के अनुसार करो ।

(4) मूल-विन्दु से x-अक्ष के ऊपर दी गई भुज के समान लम्बाई नापकर मिलनेवाली विन्दु का निर्देश करो । भुज धन होने पर मूल विन्दु से दाहिनी ओर और ऋण होने पर बाईं ओर उक्त लम्बाई नापनी होगी ।

(5) तत्पश्चात् इन विन्दुओं से (कोटि धन होने पर ऊपर की ओर और ऋण होने पर नीचे की ओर) एक ऊर्ध्वाधर (Vertical) सरल रेखा के ऊपर कोटि के समान लम्बाई नाप लो। यह प्राप्त विन्दु ही निर्णेय स्थान है ।

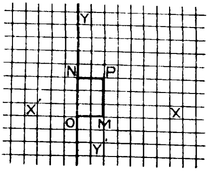
(6) विन्दु का स्थान निरूपित होने पर एक × या ० चिह्न रख दो ।

टीका—मूल-विन्दु का भुज-कोटि $(0, 0)$, y-अक्ष रेखा के ऊपर स्थित प्रत्येक विन्दु की भुज $=0$ और x-अक्ष रेखा के ऊपर स्थित प्रत्येक विन्दु की कोटि $=0$.

उदाहरण 1. $(2, 3)$ भुज-कोटि से युक्त विन्दु अंकित करो ।

किसी वर्गाङ्कित काग़ज़ के ऊपर XOX' और YOY' दो अक्ष रेखाएँ खींचकर छोटे वर्ग की एक बाहु की लम्बाई को इकाई मान लो ।

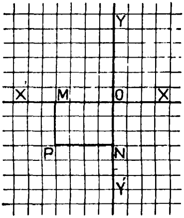
यहाँ दोनों ही भुज-कोटि धन हैं; इसलिए विन्दु प्रथम पाद (Quadrant) में स्थित होगा । मूल-विन्दु से OX के ऊपर दो इकाई के समान OM लम्बाई काट लो और M विन्दु के ऊपर खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा के ऊपर 3 इकाई के बराबर MP नाप लो, तो P ही निर्णेय विन्दु है ।



विकल्पप्रक्रिया—OX के ऊपर OM = 2 (लम्बाई की) इकाई नाप लो और OY के ऊपर ON = 3 (लम्बाई की) इकाई नाप लो। अब M और N से क्रमशः OY और OX के समानान्तर MP और NP दो सरल रेखाएँ खींचो। इन दोनों रेखाओं का विन्दु P ही निर्णय विन्दु है।

उदाहरण 2. $x = -4, y = -3$ भुज-कोटि से युक्त विन्दु अंकित करो।

यहाँ भुज और कोटि दोनों ही ऋण हैं। इसलिए यह विन्दु तृतीय चौथाई या 'पाद' (Quadrant) में अवस्थित होगा।



OX′ के ऊपर OM = 4 (लम्बाई की) इकाई नाप लो और OY′ के ऊपर ON = 3 (लम्बाई की) इकाई नाप लो। M और N से क्रमशः OY′ और OX′ के समानान्तर MP और NP दो सरल रेखाएँ खींचो। जिस विन्दु पर ये दोनों रेखाएँ मिलती हैं, वही P निर्णय विन्दु है।

96. भुज-कोटि निर्णय करना (Determination of Co-ordinates).

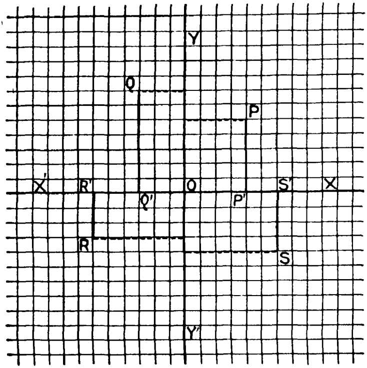
किसी विन्दु का स्थान ज्ञात रहने पर नीचे लिखी रीति से उसके भुज-कोटि निकाले जाते हैं।

उदाहरण। नीचे के चित्र में स्थित P, Q, R, और S विन्दुओं का भुज-कोटि निकालो।

छोटे वर्ग के एक वाहु की लम्बाई को इकाई मान लो।

(i) P विन्दु प्रथम-चौथाई में स्थित है। इसलिए इसके भुज और कोटि दोनों ही धन होंगे। P से OX के ऊपर PP′ एक लम्ब खींचो और मान लो कि इसने OX को P′ विन्दु पर काट दिया, तो P विन्दु का भुज = OP′ और कोटि = P′P है। चित्र से ज्ञात होता है कि OP′ = 4 इकाई

और $PP'=5$ इकाई; इसलिए P विन्दु का भुज-कोटि $x=4$ और $y=5$ है ।



(*ii*) Q विन्दु दूसरे चौथाई (Quadrant) में है । इसलिए इसका भुज ऋण और कोटि धन होगा । Q से OX' के ऊपर QQ' एक लम्ब डालो ।

इस अवस्था में Q का भुज $=OQ'$ और कोटि $=Q'Q$.

चित्र से ज्ञात होता है कि $OQ'=3$ इकाई और $Q'Q=7$ इकाई ।

अतएव Q विन्दु $(-3, 7)$ है ।

(*iii*) R विन्दु तृतीय चौथाई में है । इसलिए उसका भुज और कोटि दोनों ही ऋण होंगे । RR' लम्ब खींचने से ज्ञात होगा कि R विन्दु का भुज $=OR'$ और कोटि $=R'R$, किन्तु $OR'=6$ इकाई और $R'R=3$ इकाई ।

$\therefore$ R विन्दु के भुज-कोटि $(-6, -3)$ हैं ।

(*iv*) S विन्दु चौथे पाद में है । इसलिए इसका भुज धन और कोटि ऋण है । OS' लम्ब खींचने से $OS'=6$ और $S'S=4$ इकाई ।

$\therefore$ S विन्दु $(6, -4)$ हैं ।

97. वर्गाङ्कित काग़ज़ सम्बन्धी कुछ उदाहरण ।

उदाहरण 1. (*i*) छोटे वर्ग के एक वाहु को लम्बाई को इकाई मानकर और (*ii*) मोटी परिसीमा से युक्त वर्ग के एक वाहु की लम्बाई को इकाई मानकर अनुच्छेद 95, उदाहरण 1, के चित्र में स्थित P विन्दु का भुज-कोटि निकालो ।

(*i*) चित्र से ज्ञात होता है कि P विन्दु के भुज-कोटि OM और PM हैं और OM = 2 इकाई और PM = 3 इकाई । P विन्दु प्रथम चौथाई (Quadrant) में अवस्थित होने के कारण उसके भुज और कोटि दोनों ही धन हैं । इसलिए उनका भुज-कोटि $x=2$ और $y=3$; अर्थात् यह (2, 3) विन्दु है ।

(*ii*) मोटी परिसीमावाले वर्ग के वाहु की लम्बाई को इकाई मानने पर छोटे वर्ग के एक वाहु की लम्बाई इस इकाई का पाँचवाँ अंश होगा ।

यहाँ OM = छोटे वर्ग के एक वाहु का दूना = नई इकाई का $\frac{2}{5}$ गुना,

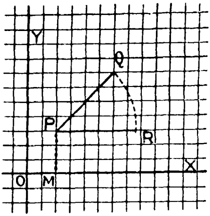
और PM = छोटे वर्ग के एक वाहु का तिगुना = नई इकाई का $\frac{3}{5}$ गुना ।

$\therefore$ नई इकाई के अनुसार P विन्दु का भुज-कोटि $x=\frac{2}{5}$ या $\cdot 4$ और $y=\frac{3}{5}$ या $\cdot 6$

उदाहरण 2. P (2, 3) और Q (6, 7) को अंकित करके उनके बीच की दूरी निकालो ।

वर्गाङ्कित काग़ज़ (Squared Paper) पर OX और OY दो अक्ष अङ्कित करके छोटे वर्ग के एक वाहु की लम्बाई को इकाई मानने पर ज्ञात होता है कि P और Q दोनों ही प्रथम पाद (Quadrant) में अवस्थित हैं । अब पूर्व प्रक्रिया के अनुसार इन दोनों विन्दुओं को अङ्कित करो ।

मान लो कि दिये हुए चित्र में P और Q के द्वारा उनका अवस्थान सूचित हो रहा है। P से x-अक्ष के समानान्तर PR सरल रेखा खींचो और P को केन्द्र मानकर PQ को अर्द्ध-व्यास लेकर एक वृत्त खींचो। मान लो कि यह वृत्त PR को R विन्दु पर काटता है। इसलिए PQ = PR, यहाँ PR की लम्बाई नापने पर ज्ञात हुआ कि यह उक्त इकाई का 5·6 गुना है। अतः PQ = 5·6 (लम्बाई की) इकाई।

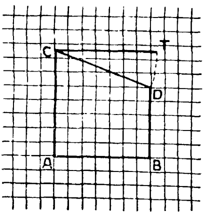


परीक्षा पद्धति। स्केल की सहायता से PQ की लम्बाई नापने पर भी ज्ञात होता है कि निर्दिष्ट इकाई के अनुसार PQ = 5·6 इकाई।

उदाहरण 3. 15 फ़ुट और 10 फ़ुट ऊँचे दो खम्भों की दूरी 14 फ़ुट है, तो दोनों खम्भों के सिरों का अन्तर निकालो।

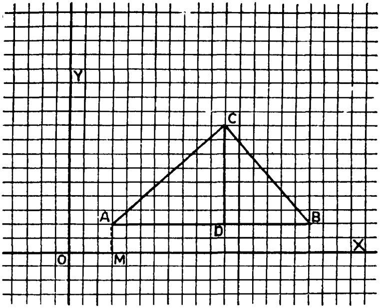
छोटे वर्ग के एक वाहु को 2 फ़ुट के बराबर मान लिया गया है। इस अवस्था में AC द्वारा 15 फ़ुट ऊँचा स्तम्भ (खम्भा) और BD द्वारा 10 फ़ुट ऊँचा खम्भा सूचित होता है। A और B एक ही क्षैतिज सरल रेखा पर स्थित हैं और AB = 14 फ़ुट = छोटे वर्ग की 7 वाहुएँ।

अब CD की लम्बाई निकालनी है। C को केन्द्र मानकर CD अर्द्ध-व्यास लेकर एक वृत्त-चाप (arc) खींचो। मानलो कि यह वृत्त-चाप C से खींचो गई क्षैतिज रेखा को T विन्दु पर काटता है। सरलतापूर्वक समझ में आजाता है कि CD = CT, अब CT की लम्बाई नापने पर देखा गया कि CT = इकाई का प्रायः 7·4 गुना।



∴ निर्णेय दूरी CD = CT = 14·8 फ़ुट (मोटे तौर से, approximately).

उदाहरण 4. A (3, 2), B (17, 2), और C (11, 9) विन्दुओं को अङ्कित करो और ABC त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो।



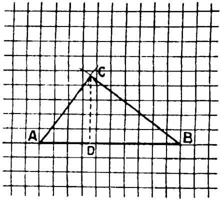
A, B, C अङ्कित किये गये तीनों विन्दुओं को परस्पर मिलाने से ABC त्रिभुज मिलता है। C विन्दु से AB सरल रेखा के ऊपर CD एक लम्ब डालो। A और B के बीच की दूरी = 14 (लम्बाई की) इकाई और लम्ब CD = 7 (लम्बाई की) इकाई।

$\therefore$ $\triangle$ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$. AB.CD
$= \frac{1}{2}$. 14.7 वर्ग इकाइयाँ
$= 49$ वर्ग इकाइयाँ।

परीक्षा पद्धति। ABC त्रिभुज के अन्तर्गत सम्पूर्ण वर्गों की संख्या गिनो। जिन सब वर्गों के ऊपर से त्रिभुज की तीनों भुजाएँ खींची गई हैं अर्थात् जो वर्ग आंशिक भाव से त्रिभुज के भीतर वर्तमान हैं उन सबके बीच से जिनका आधे या आधे से अधिक अंश त्रिभुज के अन्तर्गत है उनको सम्पूर्ण वर्ग मानकर उनकी संख्या निरूपित करो और जिनके आधे से अधिक भाग त्रिभुज के बाहर हैं उनकी गिनती न करो और उन्हें छोड़ दो। इस प्रकार की गणना के द्वारा जितने वर्ग मिलें वे ही त्रिभुज के क्षेत्रफल सूचक वर्ग इकाइयों की संख्या के समान होंगे।

उदाहरण 5. 5 इंच आधार पर 3 इंच और 4 इंच भुजावाला एक त्रिभुज खींचकर उसकी ऊँचाई इंच के सन्निकट दसवें भाग तक निकालो ।

छोटे वर्ग के दो वाहुओं को एक इंच के समान मानकर वर्गाङ्कित काग़ज़ की एक क्षैतिज रेखा पर A और B इस प्रकार लो कि उनके बीच की दूरी छोटे वर्ग के एक वाहु के 10 गुने के समान हो। यहाँ A को केन्द्र मानकर छोटे वर्ग के एक वाहु की छः गुनी लम्बाई को अर्द्ध-व्यास मानकर एक वृत्त-चाप खींचो और इसी तरह B विन्दु को केन्द्र और छोटे वर्ग के एक वाहु की आठ गुनी लम्बाई का अर्द्ध-व्यास लेकर एक दूसरा वृत्त-चाप खींचो। मानलो ये दोनों एक दूसरे को C विन्दु पर काटते हैं। अब AC, BC और AB को मिलाने से निर्णेय त्रिभुज बन जायगा। C विन्दु से AB सरल रेखा के ऊपर CD एक लम्ब खींचो और CD की लम्बाई निकाल लो।



D विन्दु से ऊपर की ओर गिनने से मालूम होगा कि DC सरल रेखा की लम्बाई छोटे वर्ग के एक वाहु की लम्बाई की प्रायः $4 \cdot 8$ गुनी है। इसलिए DC की सन्निकट लम्बाई $4 \cdot 8 \div 2$ इंच $= 2 \cdot 4$ इंच है।

यहाँ AC और BC दोनों रेखा एक दूसरी को लम्बरूप से काटती हैं।

प्रश्नावली 22.

1. बताओ कि निम्नलिखित विन्दुएँ किस किस पाद (Quadrant) में हैं:—

   (i) $x=1, y=-5$. (ii) $x=-3, y=-8$.

   (iii) $x=-2, y=5$. (iv) $x=-5, y=7$.

   (v) $x=12, y=-20$. (vi) $x=-13, y=-24$.

2. निम्नलिखित भुज-कोटि से युक्त विन्दुओं को अङ्कित करो:—

   (i) $x=3$ इंच, $y=5$ इंच। (ii) $x=4$ हाथ, $y=9$ हाथ।

   (iii) $x=2$ फ़ुट, $y=7$ इंच। (iv) $x=7$ गज़, $y=8$ हाथ।

3. वर्गाङ्कित काग़ज़ (Squared Paper) पर निम्नलिखित विन्दुओं को अङ्कित करोः—

$(0, 8), (5, 18), (-8, 9), (-11, -19), (18, -21)$.

4. $(8, -12), (8, 12), (8, -6), (8, 6)$ विन्दुओं को अङ्कित करके दिखाओ कि ये सब y-अक्ष के समानान्तर एक सरल रेखा पर स्थित हैं।

5. नीचे लिखे विन्दुओं को अङ्कित करोः—

(*i*) $(5, 0), (5, 5), (5, -1)$ और $(5, -4)$.

(*ii*) $(-4, 7), (0, 7), (3, 7)$ और $(6, 7)$.

दिखाओ कि ये सब क्रमशः y-अक्ष और x-अक्ष के समानान्तर दो सरल रेखाओं के ऊपर स्थित हैं। इन दोनों रेखाओं के परस्पर काटने से जो विन्दु प्राप्त हो उसका भुज-कोटि निकालो।

6. 8 इंच को लम्बाई की इकाई मानकर निम्नलिखित विन्दुओं को अङ्कित करोः—

$(1 \cdot 5, 2 \cdot 5); (-3 \cdot 5, 4 \cdot 8); (-2 \cdot 3, -3 \cdot 1), (7 \cdot 2, 6 \cdot 4)$.

7. $(-1, 2); (0, 3); (2, 5); (3, 6)$ विन्दुओं को अङ्कित करो और दिखाओ कि वे सब एक ऐसी सरल रेखा पर हैं जिससे दोनों अक्षों के साथ 45° का कोण बनता है।

8. A $(12, 11)$; B $(17, -1)$; C $(4, -7)$; D $(-7, -4)$; E $(-5, 6)$ विन्दुओं को मिलाने से ABCDE एक क्षेत्र बन गया। BD और AC सरल रेखाएँ जिस विन्दु पर एक दूसरी को काटती हैं वहाँ एक पेड़ है। उस पेड़ के भुज-कोटि निकालो।

9. निम्नलिखित विन्दुओं के स्थान अंकित करके उनकी दूरी निकालोः—

(*i*) $(2, 3)$ और $(5, 7)$ (*ii*) $(3, -7)$ और $(-1, 4)$.

(*iii*) $(-3, -5)$ और $(-5, 6)$.

10. $(-4, -4); (7, 7); (13, 13)$ विन्दुओं को अंकित करके दिखाओ कि वे सब एक ही सरल रेखा पर हैं।

11. 8 इंच लम्बाई की एक सरल रेखा का एक सिरा $(2, 3)$ विन्दु पर है। दूसरे सिरे की भुज 10 होने पर उसकी कोटि क्या होगी?

[A (2, 3) विन्दु को अंकित करो। OX के ऊपर दूसरे सिरे की भुज 10 के बराबर OP काट लो। P से OX के ऊपर एक लम्ब खींचो और A को केन्द्र मानकर 8 इंच का अर्द्ध-व्यास लेकर एक वृत्त खींचो। मान लो कि यह वृत्त पूर्वोक्त लम्ब को P_1 और P_2 पर काटता है। PP_1 और PP_2 ही निर्णेय कोटि हैं। इस उदाहरण में P_1 और P_2 दोनों ही विन्दु परस्पर मिल गये हैं।]

12. निम्नलिखित कौणिक विन्दुओंवाले क्षेत्रों में क्या विभिन्नता है:—

    (*i*) (−2, −1), (1, 0), (4, 3) और (1, 2).

    (*ii*) (2, −2); (8, 4); (5, 7) और (−1, 1).

13. निम्नलिखित विन्दुओं के मिलाने से बने हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाइयों में बताओ।

    (*i*) (0, 0), (0, 8), (12, 0).

    (*ii*) (2, 5), (2, 12), (9, 14).

14. (0, 0) और (6, 6) दोनों विन्दुओं के मिलाने से बनी हुई सरल रेखा को दोनों ओर बढ़ाओ और उस पर स्थित 9 भुजवाली विन्दु की कोटि और −12 कोटिवाली विन्दु का भुज निकालो।

15. निम्नलिखित प्रत्येक उदाहरण में तीनों विन्दुओं को अंकित करने के बाद उनको एक दूसरे से मिलाने से जो त्रिभुज बनें उनका क्षेत्रफल अलग अलग बताओ:—

    (*i*) (1, 3), (−5, 6) और (−2, −4).

    (*ii*) (0, 2), (3, 6) और (−7, −3).

    (*iii*) (4, 2), (−8, −3) और (−3, 5).

16. (15, 0) (18, 6), (10, 14) और (−14, 8) विन्दुओं को अंकित करो और उनको मिलाने से जो चतुर्भुज बने उसका क्षेत्रफल निकालो।

17. सिद्ध करो कि (2, 4), (2, 6) और $(2+\sqrt{3}, 5)$ विन्दुएँ 2 इकाई लम्बी बाहु की एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष विन्दु हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल क़रीब क़रीब कितना होगा बताओ।

18. $(-1, -2)$ और $(1, 8)$ विन्दुओं को मिलानेवाली रेखा को दोनों ओर बढ़ाओ और उसके ऊपर स्थित जिस विन्दु की कोटि -17 है उसका भुज और जिस विन्दु की भुज -3 है उसकी कोटि मालूम करो।

19. सिद्ध करो कि $(3, 1)$; $(6, -2)$; $(5, -7)$ और $(2, -4)$ विन्दु एक समानान्तर चतुर्भुज के शीर्ष विन्दु हैं। इस समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ।

20. सिद्ध करो कि $(4, -4)$; $(16, 8)$; $(10, 14)$ और $(-2, 2)$ एक आयत क्षेत्र (Rectangle) के शीर्ष विन्दु हैं। बताओ इस क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना होगा।

21. जिस वर्गाकार क्षेत्र के शीर्ष विन्दु $(3, 0)$; $(0, 3)$; $(-3, 0)$ और $(0, -3)$ हों उसके दोनों कर्णों (Diagonals) के छेदन-विन्दु के भुज-कोटि निकालो।

22. एक कमरे की लम्बाई $7 \cdot 5$ फ़ुट और चौड़ाई $4 \cdot 3$ फ़ुट है। उक्त कमरे के सम्मुख कोणों की दूरी यथासम्भव सूक्ष्म भाव से निकालो।

23. एक आदमी घोड़े पर सवार होकर किसी स्थान से पहले $5 \cdot 6$ मील पूर्व की ओर गया। तत्पश्चात् $3 \cdot 4$ मील उत्तर की ओर गया। बताओ यात्रा-स्थान से वह कितनी दूरी पर है?

24. एक खूँटे में एक गाय बँधी है। वह 60 फ़ुट अर्द्धव्यास के वृत्त के अन्दर हर जगह चर सकती है। यदि उक्त खूँटे से किसी बेड़े की निकटतम दूरी 30 फ़ुट हो, तो बताओ उस बेड़े के बग़ल बग़ल कितनी दूरी तक वह गाय चर सकती है।

विविध प्रश्नावली II.

I.

1. $(2x+y)^2-(2x-y)^2-(2x)^2$ को सरल करो।

2. यदि $P \equiv (a+b)^2$, $Q \equiv (a-b)^2$ और $R \equiv (a^2-b^2)$ हो, तो $PQ-R^2$ का मान बताओ।

3. यदि $(6p^2-5pq-6q^2)$ अंडे $2p-3q$ बक्सों में बराबर बराबर रक्खे जावें, तो बताओ हरएक बक्स में कितने अंडे आवेंगे ?

4. हल करो:—(i) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=2+\frac{x}{4}$.

(ii) $3(x+2)=x+16$.

5. मेरे पास a रुपये हैं। उनमें से b रुपये हमने राम को दे दिये और बचे हुए रुपयों को c भिखारियों में बराबर बराबर बाँट दिया। बताओ प्रत्येक भिखारी को कितने पैसे मिले।

6. किसी त्रिभुज का एक कोण उसके शेष दो कोणों के योग का आधा है। यदि बाद वाले दोनों कोणों का अन्तर 12° हो, तो प्रत्येक कोण का परिमाण बताओ।

II.

1. $(3x+4y)(3x-4y)$ में से $(2x-3y)$ और $(2x+3y)$ दोनों के वर्गों के योग को घटाओ। यदि $x=6y$ हो, तो अन्तरफल का मान बताओ।

2. हल करो:—(i) $x-2=\frac{2}{3}(x+2)$ (ii) $2x+\frac{3}{4}=3\left(x-\frac{1}{12}\right)$.

3. $a=5, b=2$ होने पर a^3-b^3 और $(a-b)$ का मान बताओ।

4. निम्नलिखित गुणनफलों को जोड़ो:—
$(x+1)(x-2)$, $(x+2)(x-3)$ और $(x+3)(x-4)$.

5. किसी संख्या के वर्ग और उसी संख्या के दूने के वर्ग के अन्तर को उसी संख्या द्वारा प्रकट करो।

6. यदि $x=3$ द्वारा $3x^2-ax+9=0$ समीकरण सिद्ध हो, तो a का मान बताओ।

III.

1. $x=5$ और $y=3$ होने पर x^2+y^2, $(x-y)^2$ और $(x+y)(x-y)$ का मान बताओ।

2. $5x-[3y-\{4x-(5y-\overline{4x+6y})\}]$ को सरल करो।

3. 35 रुपये A, B और C में इस प्रकार बाँटो कि A की अपेक्षा B को 3 रुपये और B की अपेक्षा C को 2 रुपये अधिक मिलें।

4. हल करोः—

(i) $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x=5+\frac{x}{3}$. (ii) $5(2x-7)=12-3(4x-19)$.

5. तीन ऐसी संलग्न विषम संख्याएँ बताओ जिनका योग 129 हो।

6. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ सूत्र की सहायता से $(49)^2$ का मान निकालो।

IV.

1. सरल करोः—

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-\frac{x}{6}\right)\div\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right).$$

2. यदि $p=8$, $q=4$, $r=3$ और $t=1$ हो, तो $(p-q)r-t$ और $p-q(r-t)$ का मान बताओ और विकोष्ठिकरण करके दोनों राशियों को लिखो।

3. $2x=y^2$ और $xy=a$ होने पर a का मान y द्वारा प्रकट करो और y का मान a द्वारा प्रकट करो।

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल करोः—

(i) $3(x-1\cdot2)-\frac{1}{5}(3x-4\cdot4)=4$.

(ii) $\cdot4x+\cdot7x-1\cdot4=\cdot35x+\cdot85$.

5. x और $3y$ के योग को $3y$ से x जितना बड़ा हो उससे गुणा करो और गुण्य, गुणक तथा गुणनफल में $x=3$ और $y=1$ मानकर गुणनफल को प्रमाणित करो।

6. 45 के ऐसे दो खंड करो कि पहले खंड को 2 से भाग देने पर प्राप्त भागफल और दूसरे खंड को 4 से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल समान हों।

V.

1. नीचे लिखे हुए व्यंजकों को सरल रूप में परिवर्तित करोः—
   (i) $a - \{2a + (3a - 4a)\} - 5a - [6a - \{(7a + 8a) - 9a\}]$.
   (ii) $\frac{2x+5y}{4} - \left(\frac{3x-y}{6} + \frac{x+2y}{8}\right)$.

2. $t = x + 1$ होने पर, $2t^2 - 3t + 1$ का मान सरल आकार में प्रकट करो। $x = 3$ मान से यह सिद्ध करो कि लब्धिफल शुद्ध हुआ है।

3. हल करोः—(i) $1 \cdot 7x - 2 \cdot 3x + 4 \cdot 9 = 8 \cdot 4 - 1 \cdot 1x$.
   (ii) $5 - 3(1 - 2x) = 11 - 4(6 - x)$.

4. A $(-4, 3)$ और B $(8, -6)$ दो विन्दु हैं। इनको मिलानेवाली सरल रेखा के मध्य-विन्दु का भुज-कोटि निकालो। इस विन्दु को केन्द्र मानकर 5 इकाई के अर्द्धव्यास से एक वृत्त खींचो। बताओ यह AB सरल रेखा को किस किस विन्दु पर काटेगा।

5. $12x^2y^3 - 8x^3y^2$ को $4x^2y^2$ से भाग दो और भागफल में $x + y$ और $x^2 - xy + y^2$ के गुणनफल को जोड़ो।

6. यदि $x = 3a^2p^3$ और $y = 2ap^2$ हो, तो सिद्ध करो कि a और p के साथ $\frac{ay^3}{x^2}$ के मान का कोई सम्बन्ध नहीं है।

VI.

1. $(5, 2)$ और $(x, -2)$ दोनों विन्दुओं को मिलानेवाली सरल रेखा x-अक्ष को $(2, 0)$ विन्दु पर काटती है। चित्र खींचकर x का मान निकालो और सर्व-सम (Congruent) त्रिभुज की सहायता से लब्धिफल को प्रमाणित करो।

2. $a = 3, b = 2$ होने पर $(3a + 2b)^2$ और $9a^2 - 4b^2$ का मान बताओ।

3. हल करो :—(i) $\cdot 3(\cdot 4x - \cdot 9) = \cdot 5(\cdot 2x + \cdot 7)$.
   (ii) $\frac{1}{4}(2x + 5) - \frac{1}{6}(x + 4\frac{1}{2}) = \frac{1}{5}(x + 3\frac{1}{2})$.

4. $A(3, 4)$, $B(5, -1)$, $C(-2, -4)$ और $D(-6, 2)$ विन्दुओं को क्रमशः मिलाओ तो एक बग़ीचे का नक़्शा बन जायगा। छोटे वर्ग की 5 बाहुओं के सम ा लम्बाई की इकाई मानकर वर्गाङ्कित काग़ज़ (Squared Paper) पर नक़्शा खींचो। AC और BD के छेदन-विन्दु पर एक कृत्रिम झरना है; यह झरना जिस स्थान पर हो उसका भुज-कोटि निकालो।

5. $x-y=2$ और $xy=15$ होने पर x^3-y^3 का मान बताओ।

6. ABCD समानान्तर चतुर्भुज के दोनों करण P विन्दु पर काटते हैं; यदि B, C और P विन्दुओं के भुज-कोटि क्रमशः $(-2, 5)$, $(6, -1)$ और $(2, -2)$ हों तो A और D के स्थान-विन्दु निकालो।

VII.

1. $x^{2n}+x^n+1$ को x^n-1 से गुणा करो।

2. $(x+2)(x+8)-(x+4)^2$ को सरल करो।

3. $(3, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -4)$ और $(3, -4)$ चारों विन्दुओं को क्रमशः मिलाने पर जो क्षेत्र बनता है, एक इंच के दशांश को लम्बाई की इकाई मानकर उसका मान बताओ।

4. हल करो :—

   (i) $2(x-2)-\frac{1}{6}(5-x)=8\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}x.$

   (ii) $\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0.$

5. बीजगणित के सूत्र की सहायता से 125×75 को दो वर्गों के अन्तर के रूप में प्रकट करो।

6. सिद्ध करो कि—

   $(a+1)(a-1)-(b+1)(b-1)-(a+b)(a-b)=0.$

———:o:———

नवाँ अध्याय

कठिन जोड़ और बाकी

98. अनुच्छेद 42 और 43 में जो नियम बताये गये हैं वे केवल ऐसे गुणकों के सम्बन्ध में प्रयोग किये जाते हैं जो कि पूर्ण राशियाँ होती हैं। परन्तु भिन्न गुणक तथा आक्षरिक गुणकों के लिए भी उनको काम में लाना चाहिए।

ऐसी मिश्र राशियों को जोड़ने की प्रक्रिया पर विचार करने से पहले जिनके गुणक भिन्न (Fractional Co-efficients) हों, निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना आवश्यक है:—

(1) अङ्कगणित में जिस प्रकार $\frac{3+4}{5}$ को $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ के रूप में लिखा जाता है, उसी प्रकार बीजगणित में भी $\frac{x+y}{3}$ को $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$ के रूप में लिखा जासकता है। इसलिए $\frac{1}{3}(x+y)$, $\frac{x+y}{3}$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$, $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y$ एक ही राशि के भिन्न-भिन्न रूप हैं।

(2) प्रत्येक भिन्न को एक राशि समझना चाहिए। इसलिए किसी भिन्न के अंश और हर के बीच में जो रेखा होती है उसे हम कोष्ठ के रूप में भी समझ सकते हैं।

जैसे, $-\frac{2-x}{5} = -\frac{1}{5}(2-x) = -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}x$,

और $-\frac{x+5}{9} = -\frac{1}{9}(x+5) = -\frac{1}{9}x-\frac{5}{9}$

उदाहरण 1. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$, $\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y$ और $-x+y$ का योगफल निकालो।

तीनों व्यंजकों को एक के नीचे एक इस प्रकार रक्खो कि उनमें से हर एक के x से बने हुए समस्त पद एक सीध में और y से बने हुए समस्त पद एक सीध में पड़ें। तत्पश्चात् जोड़ने की क्रिया करो।

इसलिए, $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ $\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y$ $-x+y$ $-\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y$	योगफल में, x का गुणक $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ और -1 का बीजगणितीय योगफल अर्थात् $-\frac{1}{4}$; और y का गुणक $-\frac{1}{3}+1$ अर्थात् $\frac{2}{3}$.

इसलिए निर्णेय योगफल $=-\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y$.

उदाहरण 2. जोड़ो:—

$$\begin{array}{r}\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}c\\ \frac{1}{4}b-\frac{5}{6}c\\ \frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b+\frac{5}{12}c\\ -\frac{1}{6}a\qquad+\frac{1}{4}c\\ \hline \frac{5}{6}a+\frac{1}{12}b+\frac{1}{12}c\end{array}$$

टीका—दूसरे व्यंजक में a से बना हुआ कोई पद नहीं है। इसी प्रकार चौथे व्यंजक में b से बना हुआ कोई पद नहीं है। इसलिए उनके स्थान ख़ाली रक्खे गये हैं। परन्तु भिन्न-भिन्न पंक्तियों की समानता को स्थायी रखने के लिए उपर्युक्त दोनों शून्य स्थान 0 गुणक से युक्त a और b के द्वारा भरे जासकते हैं क्योंकि ऐसा करने से दोनों व्यंजकों के मान में किसी प्रकार का अन्तर नहीं पड़ता।

उदाहरण 3. $\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}ax$, $\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{6}ax-\frac{3}{5}x^2$, $\frac{2}{5}x^2+\frac{5}{8}ax-\frac{2}{9}a^2$ इन तीनों राशिमालाओं को जोड़ो और $a=3$, $x=2$ होने पर प्राप्त योगफल का मान बताओ।

इन राशिमालाओं को ऊपर नीचे लिखने से हरएक राशिमाला में जितने भी सजातीय पद हैं उनको इस प्रकार लिखो कि वे सब एक ही पंक्ति में पड़ें। तत्पश्चात् नीचे लिखी हुई विधि से योग की क्रिया सिद्ध करलो:—

$$\begin{array}{r}\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{8}ax-\frac{3}{4}x^2\\ \frac{1}{2}a^2+\frac{5}{6}ax-\frac{3}{5}x^2\\ -\frac{2}{9}a^2+\frac{5}{8}ax+\frac{2}{5}x^2\\ \hline \frac{17}{18}a^2+\frac{13}{12}ax-\frac{19}{20}x^2\end{array}$$

योगफल का संख्यात्मक (Numerical) मान

$$=\frac{17}{18}\times 3^2+\frac{13}{12}.3.2-\frac{19}{20}\times 2^2$$
$$=\frac{17}{18}\times 9+\frac{13}{12}\times 6-\frac{19}{20}\times 4$$
$$=\frac{17}{2}+\frac{13}{2}-\frac{19}{5}=11\frac{1}{5}.$$

प्रश्नावली 23.

जोड़ो :--

1. $x-\frac{1}{3}y,\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y,\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y.$

2. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b,\ \frac{2}{3}b-a,\ \frac{3}{4}a-b,\ \frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b.$

3. $p-\frac{1}{2}q+\frac{1}{3}r,\ q-\frac{1}{2}r+\frac{1}{3}p,\ r-\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}q.$

4. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}xy-\frac{2}{3}y^2,\ \frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}xy,\ \frac{1}{2}xy-\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}y^2,\ -\frac{2}{3}y^2-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}xy.$

5. $\frac{3}{5}ab-\frac{4}{21}ab^2-\frac{3}{2}a^2b,\quad \frac{3}{2}ab^2+\frac{2}{3}a^2b-\frac{4}{7}ab,\quad \frac{5}{6}a^2b-\frac{7}{10}ab+\frac{5}{14}ab^2.$

6. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z+1,\quad 7-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z,\quad \frac{3}{4}z-9-\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}y,\ y+2x+1-2z,\ \frac{1}{6}x-y+3.$

7. $x^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{3}w^2,\ y^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{3}w^2,\ z^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}w^2,\ w^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}z^2.$

8. $3z^3-\frac{1}{3}yz+\frac{1}{2}xy,\quad 2x^3+3y^3-z^3,\quad -2y^3-z^3-\frac{1}{4}zx+\frac{5}{8}xy,\ \frac{2}{3}yz-x^3-\frac{7}{8}zx,\ \frac{13}{8}zx-\frac{1}{3}yz-\frac{4}{3}xy.$

9. $\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{5}x,\ -\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x^3+\frac{1}{7}x-\frac{4}{5}x^4,\ \frac{1}{10}x+\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{5}x^3+\frac{4}{7}x^4,\ -\frac{4}{5}x-\frac{5}{7}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3.$

10. $a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c-\frac{1}{4}d,\quad b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}c-\frac{1}{4}d,\quad c-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}d,\ d-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c.$

11. $a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{5}d,\ -\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+d,\ \frac{1}{4}d-\frac{1}{5}b+c-a$ तथा $\frac{1}{6}a-\frac{1}{5}d+b-\frac{2}{3}c$ को जोड़ो, और $a=2,\ b=4\frac{8}{15},\ c=8,\ d=2\frac{2}{9}$ हो तो योगफल का मान बताओ।

12. सरल करो:— $\frac{1}{4}(3x+2y)-\frac{1}{3}(2x-3y)+\frac{1}{12}(7x-y).$

99. नीचे भिन्न भिन्न प्रकार के और भी कई उदाहरण दिये गये हैं। इन प्रक्रियाओं को विशेष रूप से ध्यान में रखने पर प्रश्नों के हल करने की विधि भली भाँति समझ में आजायगी।

उदाहरण 1. $\frac{3}{4}(x+y)-\frac{7}{8}(x-y)$, $-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{8}(x-y)$ और $\frac{5}{8}(x-y)+\frac{3}{8}(x+y)$ का योगफल निकालो और जो फल आवे उसको सरल करो।

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}(x+y)-\frac{7}{8}(x-y) \\ -\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{8}(x-y) \\ \frac{3}{8}(x+y)+\frac{5}{8}(x-y) \\ \hline \frac{5}{8}(x+y)+\frac{1}{8}(x-y) \end{array}$$

यहाँ $(x+y)$ और $(x-y)$ से युक्त दोनों पद दो विजातीय पद माने गये हैं।

योगफल $=\frac{5}{8}(x+y)+\frac{1}{8}(x-y)$

$=\frac{5}{8}x+\frac{5}{8}y+\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}y$

$=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y.$

टीका—जोड़ने की क्रिया सिद्ध करने से पहले विकोष्ठिकरण करने पर प्रत्येक व्यंजक में जो x और y के गुणक हों उन्हें एकत्र करके अलग अलग रखना होता है। इसकी अपेक्षा पूर्वोक्त नियम के अनुसार करना अधिक सुविधाजनक है।

उदाहरण 2. $px+ay$, $qx+by$ और $rx+cy$ को जोड़ो।

राशियों को ऊपर-नीचे इस प्रकार रक्खो कि भिन्न भिन्न राशियों के सजातीय पद एक ही सीध में पड़ें। इसके बाद जोड़ने की क्रिया करो।

$$\begin{array}{r} px+ay \\ qx+by \\ rx+cy \\ \hline (p+q+r)x+(a+b+c)y \end{array}$$

$\therefore$ निर्णेय योगफल $=(p+q+r)x+(a+b+c)y.$

उदाहरण 3. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$, $4a^3b-10a^2b^2+6ab^3+4b^4$, $4a^2b^2-4ab^3-3b^4$ और $2ab^3-6b^4$ का योगफल निकालो।

यहाँ जितने भी व्यंजक हैं उन सबको पहले a अक्षर के घात के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाया गया है। तत्पश्चात् निम्नलिखित रूप से एक के नीचे एक रखकर जोड़ने की क्रिया सिद्ध की गई है:—

$$\begin{array}{rrrrr}
a^4 & -4a^3b & +6a^2b^2 & -4ab^3 & +b^4 \\
 & +4a^3b & -10a^2b^2 & +6ab^3 & +4b^4 \\
 & & +4a^2b^2 & -4ab^3 & -3b^4 \\
 & & & 2ab^3 & -6b^4 \\
\hline
a^4 & & & & -4b^4
\end{array}$$

$\therefore$ निर्णेय योगफल $= a^4 - 4b^4$.

उदाहरण 4. $a^2x+b^2y+c^2z$, $ax+by+cz$, $x+y+z$ और $ayz+bzx+cxy$ का योगफल बताओ।

यहाँ यह देखने में आता है कि पहले तीन व्यंजकों में x, y और z के केवल प्रथम घात वर्त्तमान हैं और वे सब पद परस्पर सजातीय हैं। चौथे व्यंजक में x, y और z ये तीनों राशियाँ वर्त्तमान तो हैं परन्तु इनका कोई भी पद पहले तीन व्यंजकों के किसी पद का सजातीय नहीं है। ऐसी अवस्था में नीचे लिखी रीति से लिखकर योगफल निकालो:—

$$\begin{array}{l}
a^2x+b^2y+c^2z \\
ax+by+cz \\
x+y+z \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +ayz+bzx+cxy \\
\hline
(a^2+a+1)x+(b^2+b+1)y+(c^2+c+1)z+(ayz+bzx+cxy)
\end{array}$$

उदाहरण 5. $2(a+b)x-3(a-b)y$, $-3(a+b)x+5(a-b)y$ और $8(a+b)x-6(a-b)y$ को जोड़ो। $a=2$ और $b=3$ हो, तो इस योगफल का मान बताओ।

यहाँ आक्षरिक गुणक मिश्रपद हैं। इसलिए विकोष्ठिकरण के बिना ही सरलतापूर्वक योगफल निकाला जासकता है:—

$$\begin{array}{r}
2(a+b)x-3(a-b)y \\
-3(a+b)x+5(a-b)y \\
8(a+b)x-6(a-b)y \\
\hline
7(a+b)x-4(a-b)y
\end{array}$$

$\therefore$ निर्णेय योगफल $=7(a+b)x-4(a-b)y$

योगफल का निर्णेय मान $=7(2+3)x-4(2-3)y$

$=35x+4y.$

उदाहरण 6. $(p+q)x^2+(q+r)xy+(r+p)y^2$, $3(p+q)x^2-2(q+r)xy+4(r+p)y^2$ और $(2q+3r-p)xy-(4r+3p+q)y^2-(3p+2q+r)x^2$ को जोड़ो।

पदों को सजाकर निम्नलिखित रीति से योगफल निकाला जाता है:—

$$\begin{array}{lll} (p+q)x^2 & +(q+r)xy & +(r+p)y^2 \\ 3(p+q)x^2 & -2(q+r)xy & +4(r+p)y^2 \\ \underline{-(3p+2q+r)x^2} & \underline{+(2q+3r-p)xy} & \underline{-(4r+3p+q)y^2} \\ (\ p+2q-r)x^2 & +(\ q+2r-p)xy & +(\ r+2p-q)y^2 \end{array}$$

यहाँ x^2 का गुणक $=(p+q)+3(p+q)-(3p+2q+r)$
$= p+2q-r;$

xy का गुणक $=(q+r)-2(q+r)+(2q+3r-p)$
$=q+2r-p.$

y^2 का गुणक $=(r+p)+4(r+p)-(4r+3p+q)$
$=r+2p-q,$

$\therefore$ निर्णय योगफल $=(p+2q-r)x^2+(q+2r-p)xy$
$+(r+2p-q)y^2.$

उदाहरण 7. सरल करो:— $\dfrac{x+3}{3}+\dfrac{5-x}{6}+\dfrac{3x-1}{12}.$

दी हुई राशिमाला $=\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}(5-x)+\frac{1}{12}(3x-1)$
$=\frac{1}{3}x+1+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}$
$=(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4})x+(1+\frac{5}{6}-\frac{1}{12})$
$=\frac{5}{12}x+\frac{7}{4}.$

विकल्प प्रक्रिया:—इस राशिमाला को तीन साधारण भिन्नों के समूह के रूप में मानकर साधारण भिन्न के जोड़ने की भी क्रिया की जासकती है। 3, 6 और 12 तीनों हरों का ल० स० अ० 12 द्वारा गुणा करने पर ज्ञात होता है कि दी हुई राशिमाला

$$=\frac{4(x+3)+2(5-x)+(3x-1)}{12}$$
$$=\frac{(4x-2x+3x)+(12+10-1)}{12}$$
$$=\frac{5x+21}{12}=\frac{5}{12}x+\frac{21}{12}$$
$$=\frac{5}{12}x+\frac{7}{4}.$$

टीका—पहले विद्यार्थियों को ऊपर बतलाई गई रीति से कोष्ठों का प्रयोग करना उचित है; अन्यथा $-\frac{x-5}{6}$ आदि स्थानों में ग़लती हो सकती है ।

प्रश्नावली 24.

जोड़ो :—

1. $3(a+x)-4(a-x)$, $-2(a+x)+3(a-x)$, $5(a+x)-2(a-x)$.
2. $4(x+y)-5(x-y)$, $-(x+y)+6(x-y)$, $8(x+y)-3(x-y)$.
3. $\frac{4}{5}(a-2b)+\frac{3}{4}(a+b)$, $-(a-2b)-\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{5}(a-2b)+\frac{1}{4}(a+b)$.
4. $\frac{1}{2}(2y+\frac{3}{4}x)+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}y-x)$, $\frac{3}{8}(2y+\frac{3}{4}x)-\frac{3}{5}(\frac{1}{3}y-x)$, $\frac{1}{6}(2y+\frac{3}{4}x)-\frac{5}{12}(\frac{1}{3}y-x)$.
5. $\frac{4}{5}(p+q)-\frac{1}{3}(p-q)$, $-(p+q)+\frac{1}{6}(p-q)$, $\frac{7}{5}(p+q)+\frac{2}{3}(p-q)$.
6. $px-qy$, $(p-q)x+ry$, $(p-2q)x-(r-q)y$.
7. $px^2+ax+qx^2-bx$, $qx^2+bx+rx^2-cx$, $rx^2+cx+px^2-ax$.
8. $(y+z-2x)a+(q+r-2p)b$, $(z+x-2y)a+(r+p-2q)b$, $(x+y-2z)a+(p+q-2r)b$.
9. $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z$, $(b-c)x+(c-d)y+(d-b)z$, $(c-d)x+(d-e)y+(e-c)z$.
10. ax^3+bx^2+cx+d, bx^3+cx^2+dx+a, cx^3+dx^2+ax+b.
11. $3(a+b)x-2(a-b)y$, $-2(a+b)x+6(a-b)y$, $7(a+b)x-5(a-b)y$.
12. $4(x^2+y^2)+2ab(x^2-y^2)-3$, $-2(x^2+y^2)-5ab(x^2-y^2)+9$, $3(x^2+y^2)-2ab(x^2-y^2)-5$, $6(x^2+y^2)+7ab(x^2-y^2)-11$.
13. $3a-2(x-y)a^2+4a^3$, $5a+3(x-y)a^2-6a^3$, $-2a+8(x-y)a^2+7a^3$, $7a+12(x-y)a^2-9a^3$, $-10a+4(x-y)a^2+8a^3$.
14. $9x^2y^2+\frac{3}{4}(x^2-y^2)+\frac{2}{3}x-xy$, $\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{3}{4}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x-\frac{5}{6}xy$, $-4x^2y^2-\frac{5}{8}(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x+2xy$ और $-5x^2y^2-\frac{7}{12}(x^2-y^2)+\frac{2}{11}xy$.

15. $(5a^3+3b^3)x^3+(3a^2-4b^2)x^2+(4a-5b)x+2$, $(3a^3-4b^3)x^3+(5a^2-6b^2)x^2+(6a-7b)x+3$ और $(2a^3-7b^3)x^3+(8b^2-7a^2)x^2+(13b-5a)x+4$.

सरल करो :—

16. $\frac{x-5}{3}+\frac{x+7}{5}$.

17. $\frac{x-6}{7}+\frac{x-3}{3}$.

18. $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-3}{4}-\frac{3}{8}$.

19. $\frac{1}{6}(y+4)-\frac{y}{3}+\frac{1}{12}(y-4)$.

20. $\frac{2a-3}{9}-\frac{a+3}{6}+\frac{5a+8}{12}$.

21. $\frac{a-b}{2}-\frac{2a+b}{3}+\frac{a+2b}{4}$.

22. $\frac{3x-1}{8}-\frac{2x-3}{5}+\frac{x-6}{4}+\frac{1}{2}$.

100. घटाने की रीति ।

पहले बतलाया जा चुका है कि घटाना (बाक़ी) जोड़ने की ही एक विपरीत प्रक्रिया है और जब कभी किसी धन-राशि को घटाना होता है, तो उसका परम मान (Absolute Value) घटाया जाता है और जब कभी किसी ऋण-राशि को जोड़ना होता है तब उसके परम मान को जोड़ना होता है। इसलिए इससे सरलता-पूर्वक ज्ञात होता है कि जब किसी राशि में से दूसरी राशि घटानी होती है तो दूसरी राशि का चिह्न बदलकर पहली राशि में जोड़ देना ही यथेष्ट होता है।

जैसे, $a-(+b)=a-b$.

$a-(-b)=a+b$.

टीका 1—जब बड़ी संख्या के बाद ऋण का एक चिह्न लगा दिया जाय और उसके बाद छोटी संख्या लिखी जाय, तो उससे उन दोनों के अङ्कगणित के अङ्कों का अन्तर प्रकट होता है; किन्तु जब दो संकेतों का मान अज्ञात होता है, तो उनका अन्तर (Difference) उन दोनों संकेतों के बीच में एक '$\sim$' चिह्न रखकर प्रकट किया जाता है; जैसे, $a\sim b$ द्वारा a और b के अन्तर का बोध होता है किन्तु a और b में से कौनसी संख्या बड़ी है यह निर्दिष्ट नहीं हो पाता।

a और b का मान चाहे कुछ भी क्यों न हो, बीजगणित में $a-b$ के द्वारा सदा ही a और b के अन्तर का बोध होगा।

टीका 2—धन राशि अथवा ऋण-राशि दोनों ही के स्थानापन्न (Substitution) करने में किसी भी अक्षर का व्यवहार किया जासकता है। इस कारण किसी पद के पूर्व $+$ चिह्न रहने पर वह धन-राशि और $-$ चिह्न रहने पर ऋण-राशि नहीं भी हो सकता। जिस राशि के बदले में अक्षर व्यवहार में लाया गया हो उसके सम्बन्ध में जबतक यह न मालूम हो कि यह धन-राशि या ऋण-राशि है तबतक निश्चित रूप से यह नहीं कहा जासकता कि यह पद धन है या ऋण।

टीका 3—a और b इन दोनों राशियों का बीजगणित सम्बन्धी अन्तर $a-b$ यदि धन हो, तो a राशि b से बड़ी कहलावेगी और $a-b$ के ऋण होने पर a राशि b से छोटी कहलावेगी। यह बात विशेष रूप से स्मरण रखनी होगी कि जिन राशियों में ऋण का चिह्न होता है उनके अक्षर के क्रम में परिवर्तन नहीं किया जाता। बात यह है कि $a-b$ और $b-a$ के द्वारा एक ही राशि नहीं प्रकट होती।

101. बहुपद व्यंजकों का अन्तर (Subtraction of Compound Expressions).

कल्पना करो कि x में से $y+z$ को घटाना है। $y+z$ को एक साथ न घटाकर यदि हम पहले y को घटावें और जो कुछ अन्तरफल आवे उसमें से फिर z को घटावें, तो वही फल प्राप्त होगा जो कि x में से y और z के योगफल को घटाने से प्राप्त होता। इसलिए निर्णय अन्तर $x-y-z$ है, किन्तु $y-z$ को जब x में से घटाना होगा तो पहले x में से y को घटावेंगे; तब ज्ञात होगा कि घटाई जानेवाली राशि $y-z$ की अपेक्षा z अधिक घटाई जाचुकी है। कारण यह है कि $y-z$ की अपेक्षा y राशि बड़ी है, और उनका अन्तर z है; इसलिए निर्णय अन्तर x में से y का अन्तर है अर्थात् $x-y$ की अपेक्षा z अधिक है। इसलिए यह $x-y+z$ है।

यहाँ यह बात देखने में आती है कि जब एक राशिमाला में से किसी दूसरी राशिमाला को घटाना होता है तब राशिमाला के प्रत्येक पद का चिह्न परिवर्तित करके पूर्वोक्त राशि में जोड़ देते हैं।

निम्नलिखित नियम को ध्यान में रखना आवश्यक है :—

नियम—जब दो बहुपद व्यंजकों का अन्तर निकालना होता है तब जिस व्यंजक में से घटाना होता है उसके नीचे घटाये जानेवाले व्यंजक को इस प्रकार रखना चाहिए कि दोनों ही के सजातीय पद एक ही सीध में पड़ें। तत्पश्चात् घटाये जानेवाले व्यंजक के हरएक पद के चिह्न परिवर्तित करके ऊपरवाले सजातीय पदों में उन्हें जोड़ देना चाहिए।

टीका 1—बीजगणित में भी बहुपद व्यंजकों (मिश्र राशियों) का घटाना अङ्कगणित के बहुपद व्यंजकों के घटाने की क्रिया से मिलता-जुलता है।

टीका 2—ऊपर लिखे हुए घटाये जानेवाले व्यंजक के चिह्नों को परिवर्तित करने की क्रिया मानसिक की जाती है।

उदाहरण 1. $3a+4b+6c$ में से $2a-3b+5c$ को घटाओ।

सजातीय पदों के अङ्कों के समान सजाने पर ज्ञात होता है कि—

$$\begin{array}{r} 3a+4b+6c \\ 2a-3b+5c \\ \hline a+7b+c \end{array}$$

विकल्प क्रियाः—निर्णय योगफल

$$\begin{aligned} &=(3a+4b+6c)-(2a-3b+5c) \\ &=3a+4b+6c-2a+3b-5c \\ &=(3a-2a)+(4b+3b)+(6c-5c) \\ &=a+7b+c. \end{aligned}$$

उदाहरण 2. $3x^2-2xy+7y^2$ में से $2x^2-5xy+6y^2+z^2$ को घटाओ।

$$\begin{array}{r} 3x^2-2xy+7y^2 \\ 2x^2-5xy+6y^2+z^2 \\ \hline x^2+3xy+y^2-z^2 \end{array}$$

प्रथम पंक्ति में $3x^2$ में $-2x^2$ को मन ही मन जोड़कर इनका योगफल x^2 लिखा गया। दूसरी पंक्ति में $-2xy$ और $+5xy$ का योगफल $+3xy$ और तीसरी पंक्ति में $7y^2$ और $-6y^2$ का योगफल y^2 लिखा गया। अन्त वाली पंक्ति में ऊपर कोई पद न होने के कारण z^2 को ही चिह्न परिवर्तित करके उसे नीचे रख दिया गया।

प्रश्नावली 25.

घटाओः—

1. $a+b$ में से $a-b$, a^2-b^2 में से a^2+b^2, x^3+y^3 में से $-x^3-y^3$ और $x-y$ में से $-x+y$.

2. $8a-9b$ और $12a-15b$ हरएक में से $4a-3b$.

3. $a+b-c$ में से $a-b+c$ और $x-4y+2z$ में से $2x+3y-z$.

4. $xy-2yz+3zx$ में से $5xy-3zx$ और $a^2-2ax+x^2+3$ में से a^2+x^2.

5. $a^4+a^3+a^2+a$ में से a^3+a^2+a+1.

6. $ax+2by-3cz$ में से $ax+cz-by$.

7. $2+3x^2-4x^3+3x^5-x$ में से $x+1-x^2-x^3+3x^4-4x^5$.

8. $-x^3-2y^3+5z^3$ में से $3xyz-2x^3-3y^3+4z^3$.

9. $a+b-c$ में से $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c$.

10. $-x^2+\frac{1}{3}xy-2y^2+yz-z^2$ में से $x^2+xy-y^2+yz-2z^2$.

11. सरल करोः— $x+(x-y)-(-x+y)$.

12. सरल करोः— $(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}xy-\frac{1}{3}y^2)-(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy)$.

निम्नलिखित राशियां में से पहली में कितना जोड़ने से दूसरी प्राप्त होगी ?

13. $a-b, a$.   14. $x+y, y$.

15. $p^2-q^2+2pq-q^3$, $p^2-4pq+2q^3$.

16. $9x^4-6x^3y+4x^2y^2-2$ में से कितना घटाने पर $x^4-7x^3y-4x^2y^2$ शेष रहेगा ?

17. $4a-5b+6c$ में से $a-b+c$, $2a+3b-c$, $-a-b-c$ और $-2a+3b+4c$ के योगफल को घटाओ।

18. 1 में से $3x^2-4x-5$ और 0 में से $3x-2x^2+4$ घटाओ और दोनों अन्तरफलों को जोड़ो।

19. $F(x) \equiv x^3+x^2-7$ और $K(x) \equiv 3x^3-x^2+x$ होने पर, $F(x)-K(x)$ का मान बताओ ।

20. $A \equiv 2a^2+3ab-b^2$ और $B \equiv a^2-3ab+b^2$ होने पर नीचे लिखी राशियों का मान बताओः—

(*i*) $A+B$. (*ii*) $A-B$. (*iii*) $A-2B$.

यदि $f(x) \equiv 5-x$ हो, तो निम्नलिखित राशियों का मान बताओः—

21. $f(5)$. 22. $f(x-5)$. 23. $f(5+x)$.

102. नीचे और कई प्रकार के उदाहरण दिये गये हैं:—

उदाहरण 1. $(c+a)x+(a+b)y+(b+c)z$ में से $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$ को घटाओ ।

$$(c+a)x+(a+b)y+(b+c)z$$
$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$$
$$(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z$$

उदाहरण 2. ax^3+bx^2+cx+d में से bx^3+cx^2+dx+e को घटाओ ।

$$ax^3+bx^2+cx+d$$
$$bx^3+cx^2+dx+e$$
$$(a-b)x^3+(b-c)x^2+(c-d)x+(d-e)$$

उदाहरण 3. $\frac{5}{8}(x+y)a-\frac{3}{8}(x-y)b-\frac{1}{2}c$ में से $\frac{1}{2}(x+y)a+\frac{3}{4}(x-y)b+\frac{1}{8}c$ को घटाओ ।

$$\frac{5}{8}(x+y)a-\frac{3}{8}(x-y)b-\frac{1}{2}c$$
$$\frac{1}{2}(x+y)a+\frac{3}{4}(x-y)b+\frac{1}{8}c$$
$$\frac{1}{8}(x+y)a-\frac{9}{8}(x-y)b-\frac{5}{8}c$$

इन सब अवस्थाओं में घटाने की क्रिया सम्पन्न करने के पहले चिकोष्ठि-करण करने पर घटाने की क्रिया और भी जटिल होजाती है ।

प्रश्नावली 26.

1. $4x(a-b)+3(a^2-b^2)$ में से $3(a^2-b^2)+2x(a-b)$ को घटाओ।

2. $x(a+b)-3(b+c)y+4(c-2a)z$ में से $5(a+b)x-4(b+c)y-2(c-2a)z$ को घटाओ।

3. $\frac{5}{8}(2a+3b)-\frac{4}{9}(6a+b)$ में से $\frac{1}{8}(2a+3b)-\frac{5}{18}(6a+b)$ को घटाओ।

4. $6(x^2+y^2)+3(x+y)+2$ में से $4(x^2+y^2)-5(x+y)-2$ को घटाओ।

5. $11a^2b^2(a-b)-10x^2y^2(a^2+b^2)+7ab(a^3-b^3)$ में से $5a^2b^2(a-b)+6x^2y^2(a^2+b^2)-2ab(a^3-b^3)$ को घटाओ।

6. $(p+q-r)xy+(q+r-p)yz+(r+p-q)zx$ में से $(p-q+r)xy+(q-r+p)yz+(r-p+q)zx$ को घटाओ।

7. $(2a^2-3ab+2b^2)x^2-(2b^2-3bc+2c^2)y^2+(2c^2-3ca+2a^2)z^2$ में से $(a^2-3ab+2b^2)x^2-(b^2-3bc+2c^2)y^2+(c^2-3ca+2a^2)z^2$ को घटाओ।

8. सरल करो:— $\frac{1}{12}(5x-6)+\frac{1}{9}(3x+8)-\frac{1}{3}(x-7)+\frac{5}{18}$.

9. यदि $F(x)\equiv(p+q)x+a(q+r)$ और $K(x)=(q+r)x+a(r+p)$, तो $F(x)-K(x)$ का मान बताओ।

103. जोड़ने और घटाने के कुछ सरल प्रश्न (Easy Problems in Addition and Subtraction).

जोड़ने और घटाने के बहुत से सरल प्रश्न सातवें अध्याय में बताये गये समीकरण की सहायता से सरलतापूर्वक हल किये जासकते हैं।

स्मरण रक्खो कि इस प्रकार के प्रश्नों को हल करते समय निर्णय अज्ञात राशि को x द्वारा सूचित करना होता है। बाद को प्रश्नों की शर्तों को सङ्केतों की सहायता से बीजगणित की भाषा में व्यक्त करने पर x से युक्त एक समीकरण प्राप्त होता है। इस समीकरण का मूल ही दिये हुए प्रश्न का हल है।

उदाहरण 1. किसी संख्या के 12 गुने में 3 जोड़ने पर 147 होता है। बताओ वह संख्या कौनसी है ?

मानलो निर्णेय संख्या x है। उस अवस्था में उस संख्या का 12 गुना $= 12x$.

इसलिए प्रश्न की शर्तों के अनुसार, $12x + 3 = 147$;

पक्षान्तर करने से $12x = 147 - 3 = 144$;

दोनों पक्षों को 12 से भाग देने पर, $x = 144 \div 12 = 12$;

$\therefore$ निर्णेय संख्या $= 12$.

उदाहरण 2. 20 नींबू 2 लड़कियों में इस तरह बाँटो कि एक लड़की को दूसरी का तिगुना मिले।

मानलो कि दूसरी लड़की को x नींबू मिले, तो पहली लड़की को $3x$ नींबू मिलेंगे।

$\therefore$ प्रश्न की शर्तों के अनुसार, $x + 3x = 20$,

अथवा, $4x = 20$; $\therefore x = 5$.

$\therefore$ पहली लड़की को 15 और दूसरी को 5 नींबू मिलेंगे।

उदाहरण 3. एक आयतप्रकार क्षेत्र की लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगनी है। उस क्षेत्र की परिमिति यदि 12 इंच हो तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

मानलो कि उस आयताकार क्षेत्र की चौड़ाई x इंच है; इसलिए उसकी लम्बाई $2x$ इंच है। अतः उस क्षेत्र की परिमिति अर्थात् उसकी चारों भुजाओं की लम्बाई का योग

$= (x + 2x + x + 2x)$ इंच $= 12$ इंच।

$\therefore 6x = 12$; या $x = 2$;

$\therefore$ क्षेत्र की चौड़ाई $= 2$ इंच, और लम्बाई $= 4$ इंच।

परिमिति $= (2 + 4 + 2 + 4)$ इंच

$= 12$ इंच।

उदाहरण 4. ऐसी दो संख्याएँ बताओ जिनका योग 27 और अन्तर 3 हो ।

मानलो कि दोनों में से छोटी संख्या x है, तो बड़ी संख्या $x+3$ है ।

$\therefore$ दोनों संख्याओं का योग $=x+(x+3)=27$, या $2x+3=27$;

पक्षान्तर करने से $2x=27-3=24$; $\quad \therefore x=12$.

$\therefore$ दोनों संख्याएँ 12 और $12+3$ अर्थात् 15 हैं ।

$\therefore$ निर्णित समाधान का प्रमाण—

$$12+15=27;\ 15-12=3.$$

प्रश्नावली 27.

1. किसी आदमी की आयु के 6 गुने और 4 गुने का जोड़ 150 होता है, तो उसकी आयु बताओ ।
2. वह कौनसी संख्या है जिसके 8 गुने में 13 जोड़ने से 69 प्राप्त होगा ?
3. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई की चौगुनी है जबकि परिमिति 100 गज़ है । उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ ।
4. वह कौनसी संख्या है जिसके आधे को उसमें जोड़ने से 9 आवेगा ?
5. दो संख्याओं का योग 35 और अन्तर 1 हो, तो उन संख्याओं को बताओ ।
6. दो संख्याओं का योग 38 है, यदि उनमें से छोटी संख्या के 3 गुने में बड़ी संख्या का 5 गुना जोड़ दिया जाय तो 154 होजाता है, बताओ वे दोनों संख्याएँ कौन-कौनसी हैं ?
7. दो संख्याओं का योग 100 है, और उनमें से बड़ी संख्या छोटी संख्या के 3 गुने से 20 अधिक है, तो उन संख्याओं को बताओ ।
8. वह कौनसी संख्या है जो अपने पाँचवें भाग से 8 अधिक है ?
9. 78 को तीन ऐसे भागों में बाँटो कि पहला भाग दूसरे भाग से 5 और तीसरे भाग से 13 अधिक हो ।
10. 150 को ऐसे दो भागों में बाँटो कि एक भाग दूसरे भाग के दो-तिहाई के समान हो ।

11. एक संख्या 75 से जितनी कम है उसको और उसके दूने को मिलाने से 45 से जितना अधिक होता है वे दोनों परस्पर समान हों, तो बताओ वह संख्या कौनसी है।

12. 105 रु० को A, B और C में इस प्रकार बाँटो कि A को B से 15 रु० और B को C से 24 रु० अधिक मिलें।

13. दो ऐसी संलग्न सम संख्याएँ बताओ जिनमें से बड़ी संख्या का पाँचवाँ भाग छोटी संख्या के सातवें भाग से 2 अधिक हो।

14. एक थैली में जितने रुपये हैं उनके चौथाई और पाँचवें भाग का जोड़ 9 रुपये है, तो बताओ थैली में कुल कितने रुपये हैं।

15. एक घोड़ा और एक गाड़ी का मूल्य 940 रु० है और घोड़े का मूल्य गाड़ी के मूल्य का 3 गुना है। हरएक का मूल्य अलग अलग बताओ।

104 विकोष्ठिकरण (Removal of Brackets).

यह पहले ही बतलाया जाचुका है कि कोष्ठ के भीतर जितने पद होते हैं वे सब एक राशि के रूप में माने जाते हैं; जैसे, $(2x-3y)-(x-4y)$. इस राशिमाला में $2x-3y$ और $x-4y$ ये दो पद कोष्ठों के भीतर हैं; इनसे यह सूचित हो रहा है कि केवल $x-4y$ राशि को $2x-3y$ राशि में से घटाना है।

किसी राशिमाला का विकोष्ठिकरण करते समय निम्नलिखित नियमों का पालन करना होगा :—

(1) कोष्ठ से पहले + चिह्न होने पर कोष्ठ हटाया जासकता है। परन्तु इस प्रकार कोष्ठ के हटा दिये जाने पर कोष्ठ के भीतर के सभी पदों के चिह्न पूर्ववत् बने रहेंगे; उनमें किसी प्रकार का परिवर्त्तन नहीं होगा।

(2) कोष्ठ के पहले − चिह्न होने पर भी कोष्ठ हटाया जासकता है किन्तु विकोष्ठिकरण के बाद कोष्ठ के भीतर के सभी पदों के चिह्नों को परिवर्तित कर देना पड़ेगा, अर्थात् + चिह्न को − चिह्न में और − चिह्न को + चिह्न में बदलकर रखना होगा;

जैसे, $a-b+(c+d-e)=a-b+c+d-e.$

$a-b-(c+d-e)=a-b-c-d+e.$

कोष्ठ के भीतर की राशिमाला को केवल एक ही पद के रूप में स्वीकार करना पड़ता है इसलिए कोष्ठ के पहले जब कोई गुणक होता है तो कोष्ठ के

भीतर की राशिमाला के सभी पदों को उस गुणक से गुणा करके रखना पड़ता है। (अनु० 112 देखो।)

जैसे, $a(b+c)-a(b-c)=(a\times b+a\times c)-(a\times b-a\times c)$

$$=ab+ac-ab+ac$$

$$=2ac.$$

टीका—भिन्न के अंश में यदि एक से अधिक पद हों तो अंश और हर के बीच की रेखा को रेखा-कोष्ठक मानते हैं और कोष्ठ को तोड़ने के लिए जिस नियम का अनुसरण किया जाता है उसी नियम के अनुसार यह रेखा भी हटाई जाती है;

जैसे, $x-\dfrac{y+z}{2}=x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z.$

उदाहरण 1. विकोष्ठिकरण करके सरल करो :—

$$y-(2x-5y)-(4y+x).$$

दी हुई राशिमाला $=y-2x+5y-4y-x$

$$=y+5y-4y-2x-x$$

$$=2y-3x.$$

उदाहरण 2. सरल करो :—

$$3(x+y-z)-2(x-y+z)+(y+z-x).$$

दी हुई राशिमाला $=3x+3y-3z-2x+2y-2z+y+z-x$

$$=3x-2x-x+3y+2y+y-3z-2z+z$$

$$=0x+6y-4z$$

$$=6y-4z.$$

105. भिन्न प्रकार के कोष्ठों का विकोष्ठिकरण।

पहले ही बतलाया जाचुका है कि निम्नलिखित चार प्रकार के कोष्ठ काम में लाये जाते हैं:—

(1) लघु कोष्ठक (Round Brackets)　( )， जैसे, $a-(b+c)$,

(2) धनु कोष्ठक (Curved Brackets)　{ }， जैसे, $x-\{y+z\}$,

(3) गुरु कोष्ठक (Square Brackets)　[ ]， जैसे, $p-[q-r]$,

(4) रेखा कोष्ठक (Bar or Vinculum)　——; जैसे, $m-\overline{l+n}$.

ऐसे भी बहुत से स्थल हैं जहाँ एक प्रकार के कोष्ठ के भीतर अन्य प्रकार के भी कोष्ठों को रखने की आवश्यकता पड़ा करती है । इन सब स्थलों में सबसे भीतरवाले कोष्ठ से विकोष्ठिकरण की क्रिया आरम्भ करना ही सुविधाजनक होता है । प्रत्येक कोष्ठ का विकोष्ठिकरण करते समय विकोष्ठिकरण के सभी नियमों का पालन करना आवश्यक होगा ।

टीका—सबसे पहलेवाले कोष्ठ से भी विकोष्ठिकरण की क्रिया आरम्भ की जाती है किन्तु सबसे भीतरवाले कोष्ठ से आरम्भ करना ही साधारणतः अधिक सुगम होता है ।

उदाहरण 1. सरल करोः— $12a-(4a-3b-2c)$.

$$\begin{aligned}12a-(4a-3b-2c) &= 12a-(4a-3b+2c)\\ &= 12a-4a+3b-2c\\ &= 8a+3b-2c.\end{aligned}$$

उदाहरण 2. सरल करोः—$10a-6[4a+3\{x+a-2(x-a+b)\}]$

दिया हुआ व्यंजक $= 10a-6[4a+3\{x+a-2(x-a-b)\}]$

$$\begin{aligned}&= 10a-6[4a+3\{x+a-(2x-2a-2b)\}]\\ &= 10a-6[4a+3\{x+a-2x+2a+2b\}]\\ &= 10a-6[4a+3\{3a+2b-x\}]\\ &= 10a-6[4a+9a+6b-3x]\\ &= 10a-6[13a+6b-3x]\\ &= 10a-78a-36b+18x\\ &= 18x-68a-36b.\end{aligned}$$

अथवा, सबसे बाहरवाले कोष्ठ से आरम्भ करने पर व्यंजक

$$\begin{aligned}&= 10a-24a-18\{x+a-2(x-a+b)\}\\ &= -14a-18x-18a+36(x-a+b)\\ &= -32a-18x+36x-36a+36b\\ &= -32a+18x-36a-36b\\ &= 18x-68a-36b.\end{aligned}$$

प्रश्नावली 28.

सरल करोः—

1. $-(-x)$. 2. $-\{-(-x)\}$. 3. $-\{-(+x)\}$.

4. $-\{+(-x)\}$. 5. $-[-\{-(-x)\}]$.

6. $-[-\{+(-x)\}]$. 7. $-[-\{-(+x)\}]$.

8. $a-b+c$. 9. $a-(b-c)$. 10. $a-(-b+c)$.

11. $a-\{b-(c-d)\}$. 12. $a^2-(2ab-b^2)-[a^2-(2ab+b^2)]$.

13. $x^2-y^2+[x^2+xy-(x^2-y^2)+y^2]$.

14. $2a-[3a+b-(a-4c)+\{3a-(b-\overline{c-2b})\}]$.

15. $x-[3y-\{2x-y-(3x-\overline{2y-2x}-3y)\}]$.

16. $x-2\{2x-(x-y-3)\}+4\{3x-2(y-2+x)\}$.

17. $1-a-(1-a+a^2)-\{1-(a-a^2+a^3)\}$
$-[1-\{a-(a^2-\overline{a^3+a^4})\}]$.

18. $2x-[2-(x-2-x)+\{x+(2-x+2)\}]$.

19. $x-[x-\{x-(x-x-1)\}]=5$ होने पर x का मान बताओ।

20. x का मान कितना होने पर, $3x-[1+x+\{1-(1+\overline{1-x})\}]$ 17 होगा ?

21. सरल करोः— $4x+[3x-\{5y-2x-3y-16y\}-6y]-[6y-\{5x-(3y-4x)+8y\}+5x]$; और $x=1$, $y=2$ होने पर व्यंजक का मान बताओ।

22. $\sqrt{3x}$, $\sqrt{(3x)}$ और $\sqrt{3}\,x$ में क्या भेद है ?

23. $+[+\{+(-x)\}]-[-\{+[-(-x)]\}]$ को सरल करो।

24. सरल करोः—

(i) $\frac{6x+8}{4}-\frac{27x-36}{6}-\frac{12-42x}{9}$.

(ii) $\frac{25x-10}{5}-\left(\frac{6-9x}{3}-\frac{7-21x}{7}\right)$.

106. कोष्ठों का लगाना (Insertion of Brackets).

विकोष्ठिकरण अर्थात् कोष्ठों के तोड़ने के सम्बन्ध में जो कुछ कहा गया है उससे अनायास ही अनुमान हो जाता है कि कोष्ठिकरण के नियम विकोष्ठिकरण के नियमों के विपरीत हैं। इसलिए कोष्ठिकरण के सम्बन्ध में भी नीचे लिखे दो नियम ध्यान में रखना आवश्यक है:—

नियम 1—कोष्ठ के पहले + चिह्न रखकर दो या दो से अधिक पदों का कोष्ठिकरण किया जासकता है। कोष्ठिकरण के समय पदों के चिह्नों में किसी प्रकार का भी परिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं पड़ती।

नियम 2—कोष्ठ के पहले − चिह्न रखकर कितने भी पदों का कोष्ठिकरण किया जासकता है, परन्तु कोष्ठिकरण के समय सभी पदों के चिह्न परिवर्तित कर देने की आवश्यकता पड़ेगी।

टीका—व्यंजक में वर्तमान पदों का भिन्न-भिन्न प्रकार से कोष्ठिकरण किया जासकता है। जिन पदों का कोष्ठिकरण करना हो, उनमें कोई साधारण गुणनखंड होने पर गुणनखंड को पदों से अलग करके कोष्ठ के पहले रक्खा जाता है।

जैसे, $3x-15=3(x-5)$; $4ax^2-12axy=4ax(x-3y)$

उदाहरण 1. $ax-bx+cx-ay+by-cy$ राशिमाला।

$$(ax-bx)+(cx-ay)+(by-cy),$$

अथवा, $(ax-bx+cx)-(ay-by+cy)$,

या, $x(a-b+c)-y(a-b+c)$,

या, $a(x-y)-b(x-y)+c(x-y)$ इत्यादि रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 2. बाहर (i) धन और (ii) ऋण चिह्न रखकर $x+x^3-2xa^2-2x^3b^2$ राशिमाला में वर्तमान x के समघातों को एक-एक कोष्ठ में रक्खो। राशिमाला को x के घात के अनुसार आरोह क्रम से सजाने पर देखा जाता है कि,

(i) दी हुई राशिमाला $=x-2xa^2+x^3-2x^3b^2$
$=(x-2xa^2)+(x^3-2x^3b^2)$
$=x(1-2a^2)+x^3(1-2b^2)$

फिर (ii) दी हुई राशिमाला $=-2a^2x+x-2x^3b^2+x^3$
$=-x(2a^2-1)-x^3(2b^2-1)$.

प्रश्नावली 29.

साधारण गुणनखंड को बाहर रखकर निम्नलिखित राशियों में से हर-एक का कोष्ठिकरण करो:—

1. $3x+12y$. 2. $5ax-25ab$. 3. $ab-b^2$. 4. a^2x+ax^2.

5. $2a^2b-4ab+2ab^2$. 6. $4x^2-8x^2y+12x^2y^2$.

7. $3a^3-6a^2b+3ab^2$. 8. $x^2-ax-bx$.

9. $7a^3b+14ab^3-21a^2b^2$. 10. $x^2y-5xy+3xy^2$.

निम्नलिखित प्रत्येक उदाहरण में x और y के समघातों के गुणकों का कोष्ठिकरण करो:—

11. $x^2+ax+bx$ 12. $y^2+ay-by$.

13. $x^3-2ax^3-5bx^3$. 14. $ax-ay-bx-by-cx+cy$.

15. $a^2x^2+2ax+b^2y^2-c^2x^2-cx-a^2y^2$.

16. $x^2-2xy+y^2$ राशि में वर्तमान अन्त के दो पदों को भिन्न-भिन्न उपायों से कोष्ठों में रक्खो।

17. $ax+bx+cx-px^2-qx^2-rx^2$ राशि में वर्तमान अन्त के तीन पदों का कोष्ठिकरण करो:—

निम्नलिखित दोनों उदाहरणों में शून्य स्थानों की पूर्त्ति करो।

18. $5x-6 \quad (\qquad) - (3-2x)$.

19. $9x^2-8xy+3y^2-6x^2+7xy+(\qquad)$.

निम्नलिखित दोनों राशिमालाओं के अन्त के तीन पदों को बाहर (i) धन का चिह्न और (ii) ऋण का चिह्न रखकर उनको एक एक कोष्ठ में रक्खो :—

20. $a-b+c-d+e$ 21. $x^3-6xy+5xy^2-2y^3$.

22. निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में x के समघातों को बाहर (i) धन का चिह्न और (ii) ऋण का चिह्न रखकर अलग अलग कोष्ठ में रक्खो:—

(i) $3x^3-mx^3-6x^2+nx^2$. (ii) $2x^4+px^3-qx^4+rx^3-3x^3$.

(iii) $ax^3+5x^2-6x+qx-cx^2-x^3$.

——:○:——

दसवाँ अध्याय

कठिन गुणन और भाग

107. गुणन का अर्थ (Meaning of Multiplication).

किसी संख्या को x द्वारा गुणा करने का क्या अर्थ है, अब हम इसकी व्याख्या करते हैं।

तुम जानते हो कि अङ्कगणित में किसी राशि को किसी पूर्ण संख्या से गुणा करते हैं। इस पूर्ण संख्या से गुणा करने का अभिप्राय यही होता है कि उसमें जितनी इकाइयाँ होती हैं उतने बार उस राशि को जोड़ते हैं; और इस प्रकार जो जोड़ आता है वह गुणनफल के बराबर होता है। उदाहरणार्थ $3\times4=3+3+3+3$. किन्तु भिन्नांशों के साथ गुणा करने में और ही क्रिया होती है। इस दशा में गुणा की परिभाषा निम्न होजाती है:—

एक संख्या को दूसरी संख्या द्वारा गुणा करने पर गुणक 1 का जो अंश हो गुण्य का वही भाग ले लेते हैं।

उदाहरणार्थ $\frac{3}{4}$ को लेलीजिए। $\frac{3}{4}$ का मतलब यही है कि 1 के 4 भाग किए गये और उन 4 भागों में से 3 लेलिये गये। इसी प्रकार यदि हम a को $\frac{3}{4}$ से गुणा करें तो इसके भी अर्थ यही हैं कि a के 4 भाग किये गये और उनमें से 3 ले लिये गये।

$$\therefore\quad a\times\tfrac{3}{4}=a\times\tfrac{1}{4}+a\times\tfrac{1}{4}+a\times\tfrac{1}{4}$$
$$=\tfrac{1}{4}a+\tfrac{1}{4}a+\tfrac{1}{4}a=\tfrac{3}{4}a;$$

अर्थात्, a के चार बराबर भाग किये गये और उनमें से 3 बराबर भाग लेलिये गये।

अब a चाहे पूर्णांक के बदले में हो या भिन्नांश के बदले में, क्रिया सर्वत्र एक सी ही होगी। यदि a भिन्नांश हो, जैसे $\frac{1}{2}$ हो तो,

$$\tfrac{1}{2}\times\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{3}{8}.$$

यह उपर्युक्त नियम केवल धनात्मक संख्याओं के गुणन में प्रयुक्त होता है। ऋणात्मक संख्याओं अथवा परस्पर विपरीत संख्याओं के गुणन में एक विशेष नियम काम देता है जो निम्न है:—

यदि गुण्य और गुणक राशियों के प्रथम में समान चिह्न हों तो गुणनफल के आदि में धन + चिह्न होगा, यदि विपरीत चिह्न हों तो ऋण-चिह्न होगा।

इसलिए a या b किन्हीं दो धन या ऋण पूर्ण संख्या या भग्नांशों के गुणा करने में चिह्नों का प्रयोग इसी प्रकार होगा,

$$(+a)\times(+b)=+ab$$
$$(+a)\times(-b)=-ab$$
$$(-a)\times(-b)=+ab$$
$$(-a)\times(+b)=-ab.$$

अभिप्राय यह हुआ कि दो सदृश चिह्न होने पर गुणनफल में धन (+) चिह्न आयेगा और असदृश चिह्न होने पर ऋण (−) चिह्न आयेगा।

टीका—जहाँ 2 राशियों का गुणनफल 'एक' हो वहाँ एक राशि को दूसरी राशि का विपरीत राशि (Reciprocal) या 'उलटा' कहते हैं। उदाहरणार्थ $a\times b=1$ होने पर a और b परस्पर विपरीत राशियाँ कहलाती हैं। a का विपरीत $\frac{1}{a}$.

108. नियम।

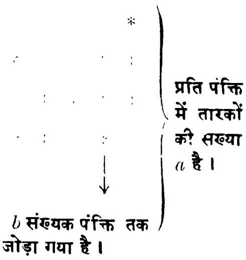
राशियों के गुणा करने में गुण्य और गुणक राशियों को आगे पीछे या अदल-बदल करने से कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता। उदाहरणार्थ $a\times b$ का अर्थ है $b\times a$ और दोनों का गुणनफल एक ही होता है।

अतएव $a\times b=b\times a=ab;$

इस प्रयोग को और भी स्पष्ट करने के लिए यह भी कर सकते हैं कि एक पंक्ति में a संख्या के तारक चिह्न रक्खो और इसी रूप से b संख्या की पंक्ति लगाओ। तारक चिह्नों का जैसा चित्र हम आगे दे रहे हैं उसी के अनुसार एक के नीचे और इसी राशि को स्थापित करो।

यहाँ प्रत्येक पंक्ति में 'a' संख्यक तारक हैं और इस प्रकार 'b' संख्यक पंक्तियाँ होने के कारण तारकों की कुल संख्या 'a' को 'b' बार जोड़ने से प्राप्त होगी अर्थात् $a \times b$.

फिर प्रत्येक स्तम्भ में तारकों की संख्या 'b' है और कुल स्तम्भों की संख्या 'a' होने से तारकों की कुल संख्या 'b' से 'a' बार जोड़ने से प्राप्त होगी अर्थात्, $b \times a$.



इसलिए 'a' और 'b' संख्यक पंक्ति तक 'b' धन पूर्ण संख्या होने से

$$a \times b = b \times a.$$

अब a और b दोनों ही धन भिन्नांश होने पर उपर्युक्त प्रमाणानुसार, $a = \frac{m}{n}$ और $b = \frac{p}{q}$, इस स्थान पर m, n, p और q में से हर एक धन और पूर्ण संख्या हैं। अब गुणा की परिभाषा के अनुसार

$$a \times b = \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\text{और } b \times a = \frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{p \times m}{q \times n} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

किन्तु m, n, p और q प्रत्येक को पूर्ण संख्या धन कहने पर उपर्युक्त प्रमाणानुसार $m \times p = p \times m$ और $n \times q = q \times n$ अर्थात् $\frac{m \times p}{n \times q} = \frac{p \times m}{q \times n}$; अतएव a और b धन भग्नांश होने पर $a \times b = b \times a$.

इसी प्रकार a और b दोनों धन राशि होने पर, $a \times b = b \times a$

तीसरे, यदि a और b में से एक धन और दूसरी ऋण-राशि हो या दोनों ही ऋण-राशियाँ हों तो पहले मानलो कि $a = x$ और $b = -y$ इस स्थान पर x और y दोनों ही धन हैं।

इसी प्रकार $a \times b = x \times (-y) = -(xy) = -(yx) = (-y) \times x = b \times a$.

फिर मानलो कि $a=-x$ और $b=-y$; यहाँ पर x और y दोनों ही धन-राशि हैं। ऐसा होने पर $a\times b=(-x)(-y)=xy=yx=(-y)(-x)=b\times a$.

इससे सिद्ध हुआ कि a और b का मान सदैव $a\times b=b\times a$.

109. गुणन का क्रम-विनिमय नियम (Commutative Law).

सिद्ध करो कि a, b और c चाहे किसी भी मान से युक्त क्यों न हों,

$$\mathbf{c\times(ab)=c\times a\times b.}$$

अर्थात् किसी संख्या को किन्हीं और दो संख्याओं से पृथक् पृथक् गुणा करने पर या उस संख्या को उन संख्याओं के गुणनफल से गुणा करने में एक ही फल आता है, कुछ भी भेद नहीं पड़ता।

पहले मानलो कि a और b दोनों पूर्ण और धनात्मक संख्याएँ हैं।

यहाँ a संख्यक c को एक पंक्ति में रखकर उसी प्रकार b संख्यक पंक्ति इस प्रकार लिखो कि जितने भी c हों, वे एक के नीचे एक हों, जैसे—

$c \quad c \quad c \quad c.$ ...... 'c' की संख्या प्रत्येक पंक्ति में 'a'.
$c \quad c \quad c \quad c.$ ......
$c \quad c \quad c \quad c.$ ......
....
....

इसी प्रकार 'b' संख्या की पंक्ति।

प्रत्येक पंक्ति में 'c' की संख्या a, और इसी प्रकार 'b' संख्यक पंक्तियाँ होने के कारण c को कुल संख्या $=ab$, इसलिए जितने भी 'c' हैं उन सब का योग $=c\times(ab)$.

अब प्रत्येक पंक्ति में 'c' का योग $=c\times a$ इसी प्रकार 'b' संख्यक की समस्त पंक्ति में 'c' का कुल योग $=$ 'b' संख्यक $(c\times a)=c\times a\times b$. इसमें यह देखा जाता है कि a और b दोनों पूर्ण धन राशियाँ होने पर

$$c\times a\times b=c\times(ab)$$

अब पूर्व कही हुई क्रिया को अनुमान प्रमाण किया जाय, तो 'a' और 'b' इनका मान कोई भिन्नांश या ऋण-राशि होने पर $c\times a\times b=c\times(ab)$,

इसी प्रकार 'a', 'b' और 'c' का मान यही क्यों न हो,

$$c \times a \times b = c \times (ab);$$

और,

$$cab = c \times (ab) \qquad bac = b \times (ac)$$
$$= (ab) \times c \qquad = (ac) \times b$$
$$= abc, \qquad = acb;$$

$\therefore \quad abc = cab = acb = bac$ इत्यादि;

इससे यह सिद्धान्त निकला कि किसी गुणनफल के अन्तर्गत गुणनखण्डों के क्रम परिवर्त्तन करने से गुणनफल के मान में कोई फ़र्क़ नहीं आता।

इसी नियम को गुणन का विनिमय-नियम कहते हैं।

सूचना—यद्यपि गुणनफल के गुणनखण्डों को किसी भी क्रम में लिख सकते हैं, तथापि साधारण संख्या-वाचक गुणनखण्डों को प्रथम रक्खा जाता है और आक्षरिक गुणनखण्डों को वर्णमाला के क्रमानुसार लिखा जाता है।

नियम—किसी गुणनफल के गुणनखण्डों को किसी भी क्रम में लिख सकते हैं। यथा—

$$abcd = a \times b \times c \times d = (ab) \times (cd)$$
$$= a \times b \times (cd) = a \times (bc) \times d \text{ इत्यादि।}$$

इसे गुणन का संयोग-नियम (Associative Law) कहते हैं।

110. घातों का गुणन (Multiplication of Powers).

उपपाद्य—यह सिद्ध करना है कि, m और n पूर्ण संख्याएँ होने पर

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

अर्थात्, एक ही अक्षर के दो घातों के गुणनफल का सूचक गुणनखण्डों के घातांकों के योग के समान होता है। उपर्युक्त उदाहरण में m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

अतएव $a^m = a \times a \times a \times a \times a \ldots\ldots$ m संख्यक गुणनखण्डों तक,

इसी प्रकार, $a^n = a \times a \times a \times a \times a \ldots\ldots$ n संख्यक गुणनखण्डों तक;

$\therefore \quad a^m \times a^n = (a.a.a.a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ m संख्यक गुणनखण्डों तक)

$\times (a.a.a.a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ n संख्यक गुणनखण्डों तक);

$= a.a.a.a.a \ldots\ldots\ldots (m+n)$ संख्यक गुणनखण्डों तक

$= a^{m+n}$.

इस तरह के गुणन का नाम घातांक-नियम (Index Law) है ।

टीका 1—$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$;

क्योंकि $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}$.

अर्थात्, एक ही राशि के विभिन्न घात के गुणनफल का घातांक उसके गुणनखण्ड समूह के घातांकों के योग के समान होता है ।

टीका 2—m और n धन पूर्ण संख्या होने पर,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

क्योंकि, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times a^m \ldots \ldots$ n संख्यक गुणनखण्डों तक

$= a^{m+m+m+m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ n गुणनखण्ड तक;

$= a^{mn}$.

इसी प्रकार $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$; $\therefore$ $(a^m)^n = (a^n)^m$.

उदाहरण 1. $(x^4)^3 = x^4 \times x^4 \times x^4 = x^{4+4+4} = x^{12}$;

और $(x^3)^4 = x^3 \times x^3 \times x^3 \times x^3 = x^{3+3+3+3} = x^{12}$;

$\therefore$ $(x^4)^3 = (x^3)^4$.

उदाहरण 2. सरल करो:— $a^{x+1} \cdot a^{x+2}$.

$a^{x+1} \cdot a^{x+2} = a^{(x+1)+(x+2)} = a^{2x+3}$.

111. घातांक नियम का प्रसार (Extension of the Index Law).

उपपाद्य—यह सिद्ध करना है कि n पूर्ण धन संख्या होने पर

$$(ab)^n = a^n \times b^n.$$

यहाँ पर $(ab)^n = ab \times ab \times ab \ldots\ldots\ldots\ldots$ n संख्यक गुणनखण्डों तक,

$= (a \times a \times a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ n संख्यक गुणनखण्डों तक)

$\times (b \times b \times b \ldots\ldots$ n संख्यक गुणनखण्डों तक)

$= a^n \times b^n$.

साधारण रूप में (Generally), $(abc\ldots\ldots)^n = a^n \times b^n \times c^n \times \ldots\ldots$,

अर्थात्, किसी गुणनफल का n-वाँ घात उसीके गुणनखण्डों के n-वें घात के गुणनफल के बराबर होता है ।

टीका—किसी ऋण-राशि का विषम-घात ऋण, किन्तु सम-घात धन होता है ।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि $(-xy)^2 = x^2y^2$.

$$(-xy)^2 = (-xy)\times(-xy) = (xy)\times(xy)$$
$$= x^{1+1}\times y^{1+1} = x^2y^2.$$

उदाहरण 2. सरल करो :— $(x^2y^3)^2$.

$$(x^2y^3)^2 = x^2y^3\times x^2y^3 = x^2\times x^2\times y^3\times y^3$$
$$= x^{2+2}\times y^{3+3} = x^4\times y^6$$
$$= x^4y^6.$$

प्रश्नावली 30.

गुणनफल बताओ :—

1. $(-x)\times(-x^2)\times(-x^3)$. 2. $-x^2\times(-x^3)\times(-x)^2$.

3. $2x^2\times3x^3\times4x^4$. 4. $3x^n\times5x^{2n}\times7x^{3n}$.

सरल करो :—

5. $(a^{x+1})^{x+2}$. 6. $(a^2b^3)^4$. 7. $(p^2)^4(q^3)^3$.

8. $(a+b)^5.(a+b)^3$. 9. $[(x+y)^3]^6$. 10. $[-(a+b)^2]^3$.

11. $[(x-y)^m]^n$. 12. $a^2.a^3.a^4.$. 13. $(x^ay^b)^3$.

14. $(-ab)^3$. 15. $(a^2bc^3)^4$. 16. $(-3x^2y^3z^4)^6$.

$a=1$, $b=2$, $x=3$, $y=4$ होने पर निम्नलिखित राशिओं का मान बताओ :—

17. $3abxy$. 18. $5a^2b^3xy$. 19. $(a^2-b^2)x-aby$.

20. $(ax-by)(ax+by)$. 21. $a^2b(x+y)-ab^2(x-y)$.

112. किसी द्विपद राशि का एकपद राशि से गुणन ।

a, b और c का मान जो कुछ भी हो, यह सिद्ध करना है

$$\mathbf{a(b+c)=ab+ac.}$$

A. मानलो कि a तो एक पूर्ण धन संख्या है और b तथा c कोई राशियाँ हैं। ऐसा होने पर,

$$a(b+c)=(b+c)+(b+c)+\dots\dots a \text{ संख्यक पद तक}$$
$$=(b+b+b\dots\dots a \text{ संख्यक पद तक})$$
$$+(c+c+c\dots\dots a \text{ संख्यक पद तक})$$
$$=ba+ca=ab+ac.$$

उपनियम। दोनों को a द्वारा विभाजित करने पर

$$b+c=\frac{ab+ac}{a}=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}.$$

$\therefore$ यदि p और q कोई राशियाँ हों और r एक पूर्ण धन संख्या हो, तो इस दशा में

$$\frac{p+q}{r}=\frac{p}{r}+\frac{q}{r}.$$

B. यदि a एक भिन्न धन संख्या हो, इस दशा में मानलो, $a=\frac{m}{n}$. अब m और n दोनों ही पूर्ण धन संख्याएँ हैं।

इस अवस्था में, $a(b+c)=\frac{m}{n}(b+c)=m\times\frac{b+c}{n}=\frac{m(b+c)}{n}$

$$=\frac{mb+mc}{n}=\frac{mb}{n}+\frac{mc}{n}$$
$$=\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c=ab+ac.$$

इसी प्रकार a कोई भी पूर्ण संख्या क्यों न हो, सिद्ध होगया कि

$$a(b+c)=ab+ac.$$

C. यदि a एक पूर्ण या भिन्नांश, ऋण संख्या $(-x)$ हो, इस दशा में

$$a(b+c)=(-x)(b+c)=-\{x(b+c)\}$$
$$=-(xb+xc)=-xb-xc$$
$$=(-x)b+(-x)c$$
$$=ab+ac.$$

इसी प्रकार a, b और c इनका मान कुछ भी क्यों न हो, सदैव

$$\mathbf{a(b+c)=ab+ac.}$$

इसे गुणन का विकलन नियम (Distributive Law) कहते हैं।

टीका 1— $\because \quad b-c=b+(-c),$

$$\therefore \quad a(b-c)=a\times[b+(-c)]$$
$$=ab+a(-c)$$
$$=ab-ac.$$

टीका 2— उपर्युक्त सिद्धान्त की सहायता से सिद्ध किया गया कि

$$a(b+c+d+\dots\dots\dots)=ab+ac+ad+\dots\dots\dots$$

इस प्रकार ज्ञात होता है कि किसी बहुपद राशि को किसी एक पद वाली राशि द्वारा गुणा करने में बहुपद राशि के प्रत्येक पद को अलग-अलग एकपद राशि से गुणा करके जोड़ देने से अभीष्ट गुणनफल आजाता है।

उदाहरण 1. $(x+2y-3z)$ को $4xyz$ से गुणा करो।

$$(x+2y-3z)\times 4xyz=x\times 4xyz+2y\times 4xyz-3z\times 4xyz$$
$$=4x^2yz+8xy^2z-12xyz^2.$$

उदाहरण 2. सरल करो:— $x^2(2x-3)+2x(3x-4)-5(x-3)$.

अब, $x^2(2x-3)=2x^3-3x^2,$

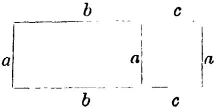
$$2x(3x-4)=6x^2-8x,$$
$$5(x-3)=5x-15;$$

$\therefore$ दी हुई राशिमाला $=(2x^3-3x^2)+(6x^2-8x)-(5x-15)$

$$=2x^3+3x^2-13x+15.$$

113. ज्यामितिक-परिचय।

नीचे हम गुणन के विकलन नियम को एक ज्यामितिक चित्र द्वारा स्पष्ट कर रहे हैं।



किसी आयत की लम्बाई $b+c$ और चौड़ाई a होने पर उसका क्षेत्रफल $=a(b+c)$ होगा। किन्तु इस चित्र से साफ़ ज़ाहिर होता है कि इसे यदि ab और ac दो चित्रों में पृथक-पृथक् समझ लें तो—

$$a(b+c)=ab+ac.$$

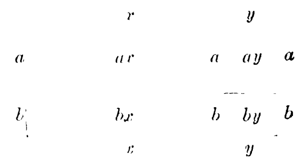
114. दो द्विपद राशियों का गुणनफल ।

सिद्ध करो कि $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by.$

इसलिए द्विपद राशियों के अर्थों के विचार से $(a+b)(x+y)$, $a+b$ और x इनका गुणनफल $a+b$ और y के गुणनफल के योग के बराबर होता है ।

$$\therefore \quad (a+b)(x+y)=(a+b)x+(a+b)y$$
$$=ax+bx+ay+by.$$

ज्यामितिक उदाहरण । उक्त फल को इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं । दिये हुए आयत क्षेत्र की लम्बाई $x+y$ है, और चौड़ाई $a+b$ है । इस अवस्था में क्षेत्रफल $(a+b)(x+y)$ होगा । पर चित्र द्वारा यह आयत क्षेत्र चार आयत क्षेत्रों से मिलकर बना हुआ ज्ञात होता है । अतः यह मान लिया गया कि इन चारों आयतों का क्षेत्रफल क्रमशः ax और ay, bx और by है ।



$$\therefore \quad (a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by.$$

टीका 1— $\because \quad a-b=a+(-b)$, और $c-d=c+(-d)$,

$$\therefore \quad (a-b)(c-d)=\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$$
$$=ac+(-b)c+a(-d)+(-b)(-d)$$
$$=ac-bc-ad+bd=ac-ad-bc+bd.$$

टीका 2—साधारण रूप से $(a+b+c+\ldots)(x+y)$.

$$=(a+b+c\ldots)x+(a+b+c\ldots)y$$
$$=(ax+bx+cx+\ldots)+(ay+by+cy+\ldots).$$

उदाहरण । x^2-xy को $x+2$ से गुणा करो—

$$(x^2-xy)(x+2)=x^2(x+2)-xy(x+2)$$
$$=x^3+2x^2-x^2y-2xy.$$

प्रश्नावली 31.

निम्नलिखित गुणनफलों का निर्णय करो :—

1. $2a^2(x+y)$.
2. $x(x^2-2xy+y^2)$.
3. $4x^2(x^2-4x+7)$.
4. $a^4b^4c^4(a^3b^2c+ab^4)$.
5. $3x^2(x^n-2x+1)$.
6. $x^n y(x^n+y-1)$.
7. $(abcd)^2(a+b+c+d)$.

निम्नलिखित द्विपद राशियों का गुणनफल ज्ञात करो :—

8. $(2-x)(x-4)$.
9. $(3+2x)(5x-1)$.
10. $(a-5)(x+8)$.
11. $(3x^2y-3)(21x^2y-7)$.
12. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$.

गुणनफल निकालो :—

13. $(a+b+c)(a+b)$.
14. $(a+b-c)(a-b)$.
15. $(xy+yz+zx)(xy-yz)$.
16. $(x^2+y^2+z^2)(x-y)$.

सरल करो :—

17. $3x^2(x-2)-2x(x^2-5)$.
18. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$.
19. $(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)$.
20. $(x^2-y^2)(a^2-b^2)+(y^2-z^2)(b^2-c^2)+(z^2-x^2)(c^2-a^2)$.

115. दो बहुपद (Polynomial) राशियों का गुणन ।

किसी बहुपद राशि का दूसरी बहुपद राशि से गुणा करने में एक के प्रत्येक पद को दूसरे के प्रत्येक पद से गुणा करके जोड़ने से अभीष्ट गुणनफल प्राप्त होजाता है । अर्थात्,

$$(a+b+c+\ldots)\times(m+n+p\ldots)$$
$$=am+an+ap+\ldots\ldots+bm+bn+bp+\ldots\ldots$$
$$+cm+cn+\ldots\ldots$$

अब $m+n+p+\ldots$ के लिए M लिखने पर

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+\ldots)\times(m+n+p+\ldots) &= (a+b+c+\ldots\ldots)M \\
&= aM+bM+cM+\ldots\ldots \\
&= a(m+n+p+\ldots)+b(m+n+p+\ldots) \\
&\qquad +c(m+n+p+\ldots)+\ldots \\
&= am+an+ap+\ldots+bm+bn+bp+\ldots \\
&\qquad +cm+cn+cp+\ldots
\end{aligned}
$$

उदाहरण। $(x+y+z)$ को $(a+b+c)$ से गुणा करो।

$$
\begin{aligned}
(x+y+z)\times(a+b+c) &= ax+ay+az+bx+ \\
&\qquad by+bz+cx+cy+cz.
\end{aligned}
$$

116. व्यावहारिक प्रक्रिया।

किसी बहुपद राशि को अन्य बहुपद राशि से गुणा करने के लिए निम्नलिखित तरीक़ा आसान होता है :—

उदाहरण 1. x^2-xy+y^2 को x^2+xy-y^2 द्वारा गुणा करो।

$$
\begin{array}{lll}
x^2-xy+y^2 & & \\
x^2+xy-y^2 & & \\
\hline
x^4-x^3y+x^2y^2 & & \\
\quad +x^3y-x^2y^2+xy^3 & & \\
\qquad\qquad -x^2y^2+xy^3-y^4 & & \\
\hline
x^4 \qquad\quad -x^2y^2+2xy^3-y^4 & &
\end{array}
$$

प्रक्रिया—गुणक राशि को गुण्य राशि के नीचे रखकर इसके नीचे एक रेखा खींचो। प्रथम गुण्य राशि के पदों को गुणक के प्रथम पद x^2 द्वारा गुणा करो और गुणनफल को रेखा के नीचे रक्खो। फिर गुण्य राशि को गुणक के द्वितीय पद $+xy$ द्वारा गुणा करके गुणनफल को प्रथम गुणनफल

के नीचे एक पंक्ति में इस प्रकार रक्खो जिससे सजातीय पद एक पंक्ति में पड़ें। तत्पश्चात् गुण्य राशि के पदों को गुणक राशि के तृतीय पद $-y^2$ से गुणा करके गुणनफल को तृतीय पंक्ति में इस प्रकार रक्खो कि सजातीय पद पूर्व की भाँति एक ही पंक्ति में रहें। अब तीनों पंक्तियों के आंशिक गुणनफलों को पंक्ति क्रम से जोड़कर योगफल को गुणनफल-समूह के नीचे-वाली रेखा के नीचे रक्खो। यही योगफल अभीष्ट गुणनफल होगा।

टीका—ऊपर के उदाहरण में गुण्य और गुणक दोनों ही साधारण अक्षर x के अवरोहक्रम से लिखे गये हैं। फलतः विभिन्न पंक्तियों के सजातीय पद एक ही पंक्ति में पड़ते हैं।

इसी प्रकार किसी बहुपद राशि को दूसरी बहुपद राशि से गुणा करने में निम्नलिखित नियमों का पालन करते हैं:—

I. गुण्य और गुणक दोनों राशियों को इनके मध्य स्थित किसी साधारण अक्षर के आरोहक्रम या अवरोहक्रम के अनुसार सजाओ।

II. गुणक राशि को गुण्य राशि के नीचे लिखकर पहले उदाहरण में बतलाये हुए उपाय से गुणन की क्रिया करो।

उदाहरण 2. $a^3+b^3-a^2b+ab^2$ को a^2+b^2-ab से गुणा करो।
गुण्य और गुणक दोनों को a के अवरोहक्रम से सजाकर,

$$\text{गुण्य} = a^3 - a^2b + ab^2 + b^3$$
$$\text{गुणक} = a^2 - ab + b^2$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{गुण्य में } a^2 \text{ से गुणा करने से गुणनफल} & = & a^5 - a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 \\
\text{,,} \quad -ab \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & = & \quad\;\; - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 \\
\text{,,} \quad +b^2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & = & \qquad\qquad\quad a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + b^5 \\
\hline
\text{सम्पूर्ण गुणनफल} & = & a^5 - 2a^4b + 3a^3b^2 - a^2b^3 \qquad + b^5
\end{array}$$

टीका—इस उदाहरण में गुण्य तृतीय घात की (of the third degree) समघाती (Homogeneous) राशिमाला, गुणक द्वितीय घात की समघाती राशिमाला और गुणनफल एक पंचम घात की समघाती राशिमाला है। साधारणतः दो समघाती राशियों का गुणनफल भी एक समघाती राशि होती है।

उदाहरण 3. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ राशि को $a+b+c$ से गुणा करो।

गुण्य और गुणक दोनों को a के अवरोह क्रम से सजाओ।

$$\text{गुण्य} = a^2-ab-ac+b^2+c^2-bc$$

$$\text{गुणक} = a+b+c$$

$$\begin{array}{lllllll}
a \text{ द्वारा गुणनफल} = a^3 - a^2b - a^2c + ab^2 + ac^2 - abc & & & & & \\
b \quad ,, \quad ,, & +a^2b & -ab^2 & -abc+b^3+bc^2-b^2c & & \\
c \quad ,, \quad ,, & +a^2c & -ac^2-abc & -bc^2+b^2c & & \\
 & & & & +c^3 \\
\hline
\text{सम्पूर्ण गुणनफल} = a^3 & & & -3abc+b^3 & +c^3
\end{array}$$

इस फल को साधारणतः $a^3+b^3+c^3-3abc$ लिखते हैं।

117. संलग्न गुणनफल (Continued Product).

तीन अथवा उनसे अधिक राशियों का गुणनफल निकालते समय प्रथम उनमें से किसी दो राशियों का गुणनफल निकालते हैं। फिर इस गुणनफल को अवशिष्ट एक राशि से गुणा करते हैं। उसके बाद फिर अन्य राशि द्वारा करते हैं। इसी प्रकार जितनी राशियाँ होती हैं सबसे क्रमशः गुणा करते जाते हैं।

उदाहरण 1. $a+b$, $a-b$, और a^2+b^2 इनका संलग्न गुणनफल निकालो।

यहाँ पहले $a+b$ और $a-b$ इनका गुणनफल निकाल कर फिर इस गुणनफल को a^2+b^2 से गुणा करना होगा; अतएव,

$$\begin{array}{lll}
(i)\ a+b & \qquad & (ii)\ a^2-b^2 \\
\quad a-b & & \quad a^2+b^2 \\
\quad a^2+ab & & \quad a^4-a^2b^2 \\
\quad\quad -ab-b^2 & & \quad\quad +a^2b^2-b^4 \\
\hline
\quad a^2 \quad -b^2 & & \quad a^4 \quad -b^4
\end{array}$$

$\therefore$ निर्णेय गुणनफल $= a^4-b^4$.

उदाहरण 2. $x+y$, $x-y$ और $x^4-x^2y^2+y^4$ का संलग्न गुणनफल निकालो।

$x+y$ और $x-y$ का गुणनफल $=x^2-y^2$; x^2-y^2 और $x^4-x^2y^2+y^4$ का परस्पर गुणन करने से

$$\begin{array}{r}x^4-x^2y^2+y^4\\ \underline{x^2-y^2}\\ x^6-x^4y^2+x^2y^4\\ \underline{-x^4y^2+x^2y^4-y^6}\\ x^6-2x^4y^2+2x^2y^4-y^6\end{array}$$

$\therefore$ गुणनफल $=x^6-2x^4y^2+2x^2y^4-y^6$.

118. भिन्न गुणक (Fractional Co-efficients).

यदि गुण्य तथा गुणक दोनों में भिन्न गुणक होते हैं, तो गुणकों को अङ्कगणित के नियमानुसार गुणा करते हैं। अन्यान्य अवस्थाओं में ऊपर बतलाये हुए नियमों के अनुसार क्रिया करते हैं।

उदाहरण 1. $x^3-\frac{1}{2}x^2y-3y^3$ को $2x^2-\frac{1}{8}y^2$ से गुणा करो।

$$\begin{array}{l}x^3-\frac{1}{2}x^2y-3y^3\\ \underline{2x^2-\frac{1}{8}y^2}\\ 2x^5-x^4y-6x^2y^3\\ \qquad\qquad+\frac{1}{16}x^2y^3-\frac{1}{8}x^3y^2+\frac{3}{8}y^5\\ \hline 2x^5-x^4y-\frac{95}{16}x^2y^3-\frac{1}{8}x^3y^2+\frac{3}{8}y^5\end{array}$$

119. मिश्र गुणक और कोष्ठों का व्यवहार।

यदि किसी राशिमाला में मिश्र गुणक होते हैं, तो प्रायः कोष्ठों को ठीक-ठीक रखकर गुणन-क्रिया सम्पन्न की जाती है अथवा पदों को सुविधाजनक रीति से लघु कोष्ठ में रखकर गुणन-क्रिया को अधिक सरल कर लिया जाता है। यह बात निम्नांकित उदाहरण से स्पष्ट होजायगी:—

उदाहरण। $x^2-xy-xz+y^2-yz+z^2$ को $x+y+z$ से गुणा करो।

गुणय को $x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2)$ इस रूप में और गुणक को $x+(y+z)$ इस रूप में लिखकर गुणन कार्य पूरा करो।

$$\begin{array}{l}
x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2)\\
\underline{x+(y+z)}\\
x^3-(y+z)x^2+(y^2-yz+z^2)x\\
\quad\quad (y+z)x^2-(y^2+2yz+z^2)x+(y+z)(y^2-yz+z^2)\\
\hline
x^3 \quad\quad\quad -3xyz \quad\quad\quad +y^3+z^3
\end{array}$$

अब x का गुणक $(y^2-yz+z^2)-(y^2+2yz+z^2)=-3yz$;

और $(y+z)(y^2-yz+z^2)=y^3+z^3$; [अनु० 75.

$\therefore$ निर्णय गुणनफल $=x^3+y^3+z^3-3xyz.$

टीका—अनु० 116 में वर्णित क्रिया की उपर्युक्त उदाहरण से तुलना करने पर स्पष्ट ज्ञात होता है कि कोष्ठों के स्थापन द्वारा गुणन-क्रिया को बहुत सरल किया जासकता है।

120. एक साधारण पद-विशिष्ट किसी संख्यक द्विपद राशि का गुणनफल।

साधारण गुणन-क्रिया द्वारा देखा जाता है कि

$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$

यह साधारण पद विशिष्ट तीन द्विपद राशियों के गुणनफल निकालने का एक साधारण क़ायदा है कि कोष्ठों को ठीक ठीक रखकर किसी साधारण पद विशिष्ट किसी संख्यक द्विपद राशि का गुणनफल सरलता से निकाला जासकता है।

उपर्युक्त गुणनफल के चारों पद निम्नलिखित रूप में गठित हैं:—

(1) प्रथम पद, प्रत्येक द्विपद राशि के साधारण पद का घन होता है।

(2) द्वितीय पद, इस साधारण पद का वर्ग और अपने-से चिह्न युक्त तीन द्वितीय पदों के योग के गुणनफल के बराबर होता है।

(3) तृतीय पद, द्वितीय पदों के, अपने-से चिह्न युक्त प्रत्येक दो को लेकर गुणा करने पर जो गुणनफल पाया जाय उसका योग और साधारणपद के गुणनफल के बराबर है ।

(4) चौथे पद में, स्वकीय चिह्न युक्त तीन द्वितीय पद का गुणनफल होता है ।

साधारणतः सब जगह एक साधारण पद विशिष्ट किसी संख्यक द्विपद राशि का गुणनफल निकाला जाता है; गुणनफल संलग्न पदों का यथाक्रम निम्न क्रम में गठित किया जाता है:—

(1) जितने गुणनखण्ड गुणनफल के प्रथम पद हों उक्त साधारण राशि के उतने ही घात होते हैं ।

(2) दूसरा पद, साधारण पद का अव्यवहित परवर्ती घात और स्वकीय चिह्न युक्त द्वितीय पदों के योग के गुणनफल के समान होता है ।

(3) तृतीय पद, साधारण राशि का अव्यवहित परवर्ती घात और द्वितीय पद समूह का स्वकीय चिह्न युक्त प्रत्येक दो के गुणनफल के योग के गुणनफल के बराबर होता है ।

(4) चतुर्थ पद, साधारण राशि का अव्यवहित परवर्ती घात और द्वितीय पद समूह का स्वकीय चिह्न युक्त प्रत्येक तीन के गुणनफल के योग के गुणनफल के बराबर होता है ।

(5) शेष पद, स्वकीय चिह्न युक्त द्वितीय पदों के गुणनफल के समान ।

(6) गुणनफल के पदों की संख्या गुणनखण्डों की संख्या की अपेक्षा एक '1' अधिक होती है ।

सिद्धान्त—अब निम्नलिखित सिद्धान्त आसानी से समझ में आजाँयगेः—

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x-c)=x^3+(a+b-c)x^2+(ab-bc-ca)x-abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3$$
$$+(ab+bc+ac+ad+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+bcd+cda+adb)x+abcd.$$

प्रश्नावली 32.

गुणा करो :—

1. $a^4 - a^2x^2 + x^4$ को $a^2 + x^2$ से।
2. $4a^2 + 6ab + 9b^2$ को $2a - 3b$ से।
3. $\frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{2}{3}y^2$ को $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$ से।
4. $\frac{1}{2}a^2 - 3a + \frac{3}{4}$ को $\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}$ से।
5. $x^2 - y^2 + z^2$ को $x^2 + y^2 - z^2$ से।
6. $a^2 - ab + b^2$ को $a^2 + ab + b^2$ से।
7. $x^4 + x^2 + 1$ को $x^4 - x^2 + 1$ से।
8. $x + 2y + 3z$ को $2x - 5y + z$ से।
9. $\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}ax$ को $\frac{2}{3}ax + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}a^2$ से।
10. $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ को $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2$ से।
11. $a^2 + x^2 - ax + 5$ को $a^2 - x^2 + ax - 5$ से।
12. $1 - x + x^2 - x^3$ को $1 + x + x^2 + x^3$ से।
13. $xy^2 + yx^2 - yz^2 - z^2x$ को $x^2 + yz - xy - zx$ से।

निम्नलिखित राशियों का संलग्न गुणनफल निकालो :—

14. $a - x,\ a^2 - x^2,\ a^3 - x^3$
15. $a - x,\ a + x,\ a^2 + x^2,\ a^4 + x^4$.
16. $x - 1,\ x - 2,\ x - 3,\ x - 4$.
17. $a^2 + ab + b^2,\ a^2 - ab + b^2,\ a^4 - a^2b^2 + b^4$.
18. $a + x,\ (a^2 - ax + x^2),\ (a - x),\ (a^2 + ax + x^2)$.
19. $x - y,\ x^2 + xy + y^2,\ x^3 + y^3,\ x^6 + y^6$.
20. $(a + b + c),\ (a - b + c),\ (a + b - c)$ और $(-a + b + c)$.

सरल करो :—

21. $(a^2 + ab + b^2)(a + b) - (a^2 - ab + b^2)(a - b)$.
22. $(a^m + b^m)(a^m - b^m)(a^{2m} + b^{2m})$.
23. $(a^{2m} - 2a^m b^m + b^{2m})(a^{2m} + 2a^m b^m + b^{2m})$.

121. विश्लिष्ट गुणक-प्रणाली (Method of Detached Co-efficients).

यदि गुण्य और गुणक दोनों राशिमालाओं के पद एक ही अक्षर के भिन्न भिन्न घातवाले हों अथवा दोनों दो अक्षरों की समघातिक राशिमाला हों, तो उक्त पदों के घात छोड़कर केवल उनके विश्लिष्ट गुणकों को यथाक्रम लिखकर गुणन क्रिया संक्षेप की जाती है। यहाँ दस-दस के घात निकाल कर किसी संख्या के अङ्क द्वारा अङ्कगणित की भाँति प्रकट करते हैं। पहले दोनों राशिमालाओं को उनमें दिये हुए साधारण अक्षर के आरोहक्रम या अवरोहक्रम के अनुसार रख लेते हैं। यह बात नीचे दिये हुए उदाहरणों द्वारा स्पष्ट हो जायगी :—

उदाहरण 1. x^3-3x^2+2x-4 को $x+2$ से गुणा करो।

$$\begin{array}{l} x^3-3x^2+2x-4 \\ x+2 \\ 1-3+2-4 \\ \quad +2-6+4-8 \\ 1-1-4+0-8 \end{array}$$

ऊपर की पंक्तियों के प्रत्येक पद में x के उपयुक्त घात करके निकाला हुआ गुणनफल $=x^4-x^3-4x^2-8$.

टीका—गुणनफल में x-युक्त कौन पद नहीं है इसका स्थान एक शून्य-गुणक द्वारा दिखाया जाता है। इसी प्रकार यदि दिये हुए पदों का कोई घात देखना हो, तो उसके स्थान पर अङ्कगणित के नियम की भाँति 0 रखते हैं।

उदाहरण 2. $2x^4-4x^2+5x-3$ को x^2+2x+6 से गुणा करो।

गुण्य पदों में से x^3 द्वारा घटित जो पद नहीं हैं उसके स्थान को एक शून्य द्वारा पूर्ण कर देते हैं। इस प्रकार,

$$\begin{array}{lllllll} 2x^4 & +0.x^3 & -4x^2 & +5x & -3 & & \\ x^2+2x+6 & & & & & & \\ 2 & +0 & -4 & +5 & -3 & & \\ & +4 & +0 & -8 & +10 & -6 & \\ & & +12 & +0 & -24 & +30 & -18 \\ \hline 2x^6 & +4x^5 & +8x^4 & -3x^3 & -17x^2 & +24x & -18 \end{array}$$

टीका—यदि गुणक में कोई पद निकालना होता है तो उसके स्थान पर शून्य रख देते हैं। इससे आंशिक गुणनफल में एक पंक्ति में सब गुणक ही शून्य हो जाते हैं। ऐसे स्थान पर आंशिक गुणनफलों के बदले के गुणकों की पंक्ति के दाहिनी ओर एक के बदले में दो स्थान हटाकर रखते हैं।

122. अङ्कगणित और बीजगणित की गुणन क्रियाओं में सादृश्य।

ऊपर कही हुई विश्लिष्ट गुणक-प्रणाली से सरलता से जाना जासकता है कि अङ्कगणित और बीजगणित की गुणनक्रियाओं में सादृश्य है।

उदाहरण। 523 को 34 से गुणा करो।

523 संख्या $5\times10^2+2\times10+3$ के बराबर और 34, $3\times10+4$ के बराबर है। निम्नलिखित उपाय से गुणनफल निकाला जासकता है:—

I.
$$\begin{array}{llll}
 & 5.10^2+ & 2.10+ & 3 \\
 & & 3.10 & +4 \\
\hline
15.10^3+ & 6.10^2+ & 9.10 & \\
 & 20.10^2+ & 8.10+ & 12 \\
\hline
15.10^3+ & 26.10^2+ & 17.10+ & 12
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ गुणनफल} &= 15.10^3+(2.10+6)10^2+(1.10+7)10+(1.10+2)\\ &=15.10^3+2.10^3+6.10^2+1.10^2+7.10+1.10+2\\ &=17.10^3+7.10^2+8.10+2=17782,\end{aligned}$$

$10=x$ लिखने से क्रिया निम्नलिखित होगी :—

II.
$$\begin{array}{llll}
 & 5x^2+ & 2x+ & 3 \\
 & & 3x & +4 \\
\hline
15x^3+ & 6x^2 & +9x & \\
 & 20x^2+ & 8x & +12 \\
\hline
15x^3+ & 26x^2+ & 17x+ & 12
\end{array}$$

अतएव देखा जाता है कि I और II प्रक्रियाएँ दो सम्पूर्ण समान हैं। प्रथम में 523×34, और दूसरी में $(5x^2+2x+3)(3x+4)$ गुणनफल मिला। साधारण रूप से 523 को 34 से गुणा करने में पहला उपाय ही ठीक रहता है। केवल 10 के घात समूह लेने होते हैं।

123. गुणन से बना हुआ साधारण समीकरण।

उदाहरण। किसी संख्या को उसकी अपेक्षा 1 अधिक संख्या से गुणा करने में गुणनफल उस संख्या के वर्ग से 3 अधिक होता है। बताओ वह संख्या क्या है।

मानलो कि अभीष्ट संख्या x है; इससे 1 अधिक संख्या $x+1$ होगी।

x का वर्ग $=x^2$.

$\therefore$ प्रश्नानुसार $x\times(x+1)=x^2+3$ या $x^2+x=x^2+3$;

दोनों ओर से x^2 निकालने पर

$x=3$ अभीष्ट संख्या।

साफ़ प्रकट होता है कि $3\times4=12=9+3=3^2+3$.

प्रश्नावली 33.

विश्लिष्ट गुणक प्रणाली द्वारा निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में प्रथम राशि को दूसरी राशि से गुणा करो:—

1. $x^2+x+2,\ 2x+1.$ 2. $3x^2-4x+5,\ 4x-5.$

3. $2x^2-4x+3,\ x^2-3x+1.$ 4. $6a^2-2ab+3b^2,\ 2a+3b.$

निम्न समीकरणों को हल करो:—

5. $(x+6)(x-6)=x(x-4).$ 6. $x(2x-3)=2x^2-9.$

7. $(x+2)(x+3)=(x-1)(x+9).$

8. $(x^2+4x+4)(x+1)=x^2(x+5)+7(x+2).$

9. $(x^2-x+1)(x+1)+x=(x+2)(x^2-2x+4).$

10. किसी संख्या को उस संख्या से 2 कम संख्या द्वारा गुणा करने पर गुणनफल उस संख्या के वर्ग की अपेक्षा 4 कम होता है, तो बताओ वह संख्या क्या है।

11. एक संख्या को उसकी क्रमिक संख्या से गुणा करने पर गुणनफल उस संख्या के वर्ग की अपेक्षा 4 अधिक होता है, तो वह संख्या क्या है?

12. किसी संख्या के 4 गुने में से 3 निकालने पर बाक़ी उस संख्या के दो गुने से 5 अधिक होता है। बताओ वह कौनसी संख्या है।

13. तीन संलग्न संख्याओं में से पहली x है, तो तीनों का गुणनफल बताओ।

14. A और B में 33 रुपये इस प्रकार बाँटो कि A को B से दुगना मिले।

15. $3x^2+2x+1$ को $2x+7$ से गुणा करो और 321 और 27 के गुणनफल से उसकी समानता दिखाओ।

124. भाग का अर्थ (Meaning of Division).

भाग गुणा की विकल्प रीति है अर्थात् भाग ऐसी रीति है जिससे गुणन की प्रक्रिया नष्ट होजाती है; जैसे, '$\div x$'; इस प्रतीक से x से गुणन नष्ट होगया समझा जाता है अर्थात् $a\times x\div x=a$ यहाँ पर '$\div x$' चिह्न ने a के x द्वारा गुणन का फल नष्ट कर दिया।

एक संख्या a को दूसरी संख्या b से भाग देने पर मान लो एक तीसरी संख्या c प्राप्त होती है। इसको b द्वारा गुणन करने से वही a संख्या निकल आयगी क्योंकि संज्ञानुसार $a\div b\times b=a$ और यदि $a\div b=c$ होता है तो $c\times b=a$ होगा।

जिस राशि में भाग दिया जाता है उसे भाज्य (Dividend), जिससे भाग दिया जाता है उसे भाजक (divisor) और जो फल प्राप्त होता है उसे भजनफल (Quotient) कहते हैं। यदि भाज्य D, भाजक d और भागफल Q हो, तो $D\div d=Q$ अथवा $D=d\times Q$.

इस रूप में पूर्वोक्त प्रश्न में a भाज्य, b भाजक और c भागफल हैं। $a\div b$ को $\frac{a}{b}$ या a/b के रूप में लिखते हैं। $\frac{a}{b}$ में a को अंश (Numerator) और b को हर (Denominator) कहते हैं।

125. भाग के उदाहरण।

(i) सिद्ध करना है कि

$$\mathbf{a \div b \div c = a \div bc.}$$

$$(a \div b \div c) \times bc = \{(a \div b) \div c\} \times c \times b$$
$$= [\{(a \div b) \div c\} \times c] \times b$$
$$= (a \div b) \times b \qquad \text{[परिभाषानुसार]}$$
$$= a.$$

∴ दोनों को bc से भाग देने पर

$$(a \div b \div c)bc \div bc = a \div bc,$$

या, $$a \div b \div c = a \div bc.$$

अर्थात् किसी राशि को अन्य दो राशियों द्वारा एक के बाद दूसरे से भाग करना और उस राशि को इन दोनों राशियों के गुणनफल द्वारा भाग करना एक ही है। दोनों अवस्थाओं में एक ही भजनफल आता है।

इस प्रकार, $a \div b \div c \div d = a \div b \div cd = a \div bcd.$

टीका—$a \div b \div c = a \div c \div b$, क्योंकि दोनों पक्ष $= a \div (bc)$.

(ii) सिद्ध करना है कि

$$\mathbf{a \div b = a \times \frac{1}{b}.}$$

परिभाषानुसार, $1 \div b \times b = 1$, या $\frac{1}{b} \times b = 1.$

किन्तु, $a \div b \times b = a;$

∴ $a \div b \times b \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$, या $a \div b \times (b \times \frac{1}{b}) = a \times \frac{1}{b};$

इसलिए, $a \div b = a \times \frac{1}{b}.$

अर्थात् किसी एक राशि को दूसरी एक राशि से भाग करने पर जो भजनफल प्राप्त होता है वही पहली राशि को दूसरी राशि के व्युत्क्रम (Reciprocal) द्वारा गुणन करने पर भी प्राप्त होगा।

(iii) सिद्ध करना है कि

$$\mathbf{a \div b \times c = a \times c \div b.}$$

$$a \div b \times c = a \times \frac{1}{b} \times c = a \times c \times \frac{1}{b}$$
$$= a \times c \div b.$$

उपर्युक्त फलों से यह स्थिर होता है कि गुणा और भाग के चिह्नों से युक्त संकेतों के पास-पास होने पर गुणा के चिह्न से युक्त और भाग के चिह्न से युक्त संकेत किसी भी क्रम से लिखे जासकते हैं ।

टीका—कुछ गुणा और भाग के चिह्नों से युक्त संकेत पास-पास रहने पर उन्हें केवल एक भाग के चिह्न में सीमित किया जासकता है ।

जैसे, $a\div b\times c\div d\div e\times f=a\times c\times f\div b\div d\div e=acf\div bde$.

126. कोष्ठक के पहले '×' और '÷' चिह्न ।

कोष्ठक के भीतर केवल गुणा या भागयुक्त चिह्न होने पर विकोष्ठिकरण करने पर यदि बाहर गुणा है तो भीतर के किसी चिह्न का परिवर्तन नहीं किया जाता, किन्तु यदि कोष्ठक के पूर्व ÷ चिह्न होता है तो भीतर के चिह्नों को पलट दिया जाता है, अर्थात् '×' को '÷' और '÷' को '×' के चिह्नों में बदलना पड़ता है ।

अतएव $a\times(b\div c)=a\times b\div c$ और $a\div(b\div c)=a\div b\times c$;

इसी प्रकार $a\times(b\times c)=a\times b\times c$ और $a\div(b\times c)=a\div b\div c$.

साधारणतः $a\times(b\div c\times d\div\ldots)=a\times b\div c\times d\div\ldots$

और $a\div(b\div c\times d\div\ldots)=a\div b\times c\div d\times\ldots$

उदाहरण । $5\times(4\times6\div3)=5\times(24\div3)=5\times8=40$,

और $5\times4\times6\div3=20\times6\div3=120\div3=40$.

पुनः $72\div(4\times6\div3)=72\div(24\div3)=72\div8=9$,

और $72\div4\div6\times3=18\div6\times3=3\times3=9$.

127. भाग-चिह्न सम्बन्धी नियम ।

भाग गुणा की विकल्प प्रक्रिया है । दोनों क्षेत्रों में चिह्न सम्बन्धी एक ही नियम लगता है, अर्थात् समचिह्न '+' और विषमचिह्न '−' होता है ।

$\because\ (+a)\times(+b)=+ab,\quad\therefore\ (+ab)\div(+b)=+a$,

$\because\ (+a)\times(-b)=-ab,\quad\therefore\ (-ab)\div(-b)=+a$,

$\because\ (-a)\times(+b)=-ab,\quad\therefore\ (-ab)\div(+b)=-a$,

$\because\ (-a)\times(-b)=+ab,\quad\therefore\ (+ab)\div(-b)=-a$.

128. भाग का सूत्रक नियम।

इससे पूर्व बतलाया गया है कि यदि एक राशि के किसी घात में उस राशि के दूसरे घात से भाग किया जाय तो भाज्य के घाताङ्क से भाजक का घाताङ्क निकाल लेने पर भागफल का घाताङ्क निकल आता है।

$\because$ m और n धन, पूर्णराशि होने पर $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

$\therefore$ $a^{m+n} \div a^m = a^{m+n-m} = a^n$.

यदि $m+n=p$ हो, तो $a^p \div a^m = a^{p-m}$, और $p > m$.

अथवा p और q धन, पूर्णराशि होने से

$a^p \div a^q = a^{p-q}$; यहाँ p, q की अपेक्षा बड़ी है;

और $a^p \div a^q = \dfrac{1}{a^q \div a^p} = \dfrac{1}{a^{q-p}}$; यहाँ p, q से छोटी है।

इसी प्रकार, $a^5 \div a^3 = a^{5-3} = a^2$; $a^4 \div a^5 = \dfrac{1}{a^{5-4}} = \dfrac{1}{a}$ इत्यादि।

टीका—$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$.

129. एकपदी राशि में दूसरी एकपदी राशि का भाग देना।

पूर्व अध्यायों में बतलाये हुए नियमानुसार किसी एकपद राशि का दूसरी एकपदी राशि में भाग दिया जासकता है। निम्नलिखित नियम से भागफल ज्ञात किया जासकता है:—

नियम—चिह्न सम्बन्धी नियमों के अनुसार प्रथम भागफल का चिह्न निरूपण करो; फिर भाज्य के अङ्कगुणकों में भाजक के अङ्कगुणकों का भाग करो और भजनफल के अङ्कगुणक निकालो; फिर भाज्य और भाजक में से उनके साधारण गुणनखण्डों को निकाल दो। इस रूप से निकाली हुई राशि ही भागफल होगी।

उदाहरण। $32x^6y^5z^{12}$ को $-8x^4y^3z^8$ से भाग दो।

$$32x^6y^5z^{12} \div (-8x^4y^3z^8)$$
$$= -(32 \div 8) \times (x^6 \div x^4) \times (y^5 \div y^3) \times (z^{12} \div z^8)$$
$$= -4 \times x^2 \times y^2 \times z^4 = -4x^2y^2z^4.$$

अथवा, $\dfrac{32x^6y^5z^{12}}{-8x^4y^3z^8} = -4x^{6-4}y^{5-3}z^{12-8} = -4x^2y^2z^4$.

130. एक बहुपद व्यंजक में दूसरे बहुपद व्यंजक का भाग ।

$\because \quad (a\div m+b\div m+c\div m+\ldots\ldots)\times m$

$$=a\div m\times m+b\div m\times m+c\div m\times m+\ldots\ldots$$

$$=a+b+c+\ldots\ldots,$$

$\therefore \quad (a+b+c+\ldots)\div m=(a\div m)+(b\div m)+(c\div m)+\ldots\ldots$

अर्थात् एक बहुपद व्यंजक में दूसरे बहुपद व्यंजक का भाग करने पर भाज्य के प्रत्येक पद में भाजक के प्रत्येक पद द्वारा भाग करते हुए जो आंशिक भागफल प्राप्त होते हैं उनके वैजिक कुल योग के समान पूर्ण भागफल (भजनफल) होता है ।

उदाहरण 1. $6a^4-2a^3b+a^2b^2$ को $3a^2$ से भाग दो ।

$$\frac{6a^4-2a^3b+a^2b^2}{3a^2}=\frac{6a^4}{3a^2}-\frac{2a^3b}{3a^2}+\frac{a^2b^2}{3a^2}$$

$$=2a^2-\tfrac{2}{3}ab+\tfrac{1}{3}b^2.$$

प्रश्नावली 34.

भाग करो:—

1. $-\frac{3}{8}p^4q^2r^5$ को $-\frac{1}{4}p^2q$ से ।
2. $-66x^4y^6z^6$ को $-1\frac{1}{5}x^2y^3z^4$ से ।
3. $105a^{10}b^9c^5x^2-140a^7b^6c^8x^4$ को $35a^5bcx^2$ से ।
4. $-3a^4b^2c^5$ और $-4ab^4c^2$ के गुणनफल को $5a^2b^3c^3$ से ।
5. $-6x^2y^2z^2$ को कितने से गुणा करें कि गुणनफल $3x^2y^5z^4$ हो ।
6. सरल करो:—

   $(x+y)^9\div(x+y)^6,\quad (a-b)^7\div(a-b)^5,$

   $(ax+by)^6\div(ax+by)^2.$

भाग करो:—

7. $25ax-15a^2x^2+5ax^3$ को $5ax$ से ।
8. $-\frac{1}{5}x^3yz+\frac{1}{4}xy^3z-\frac{1}{3}xyz^3$ को $-\frac{1}{6}xyz$ से ।

9. $8a^4y^2z-12a^2y^4z^2-16ay^3z^4$ को $4ay^2z$ से।

10. निम्नलिखित भाग-क्रियाएँ करो:—

$$\frac{(a^2+b)^5}{a^2+b};\quad \frac{(x^2+y^2)^5}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{(ax+by+cz)^{2n+1}}{(ax+by+cz)^{n+1}}.$$

11. भाज्य $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}xy-\frac{1}{5}zx$, भागफल $-\frac{2}{3}x$, भाजक बताओ।

12. भाज्य $12x^3y^2-6x^2y^3-3xy^4$, भाजक $-3xy$; भागफल बताओ।

131. एक बहुपद व्यंजक (Polynomial) को दूसरे एक बहुपद व्यंजक से भाग करना।

अङ्कगणित में इस प्रकार के भागों में लम्बे भाग की क्रिया की जाती है। यहाँ निम्न उदाहरण से क्रिया अच्छी तरह समझ में आजायगी:—

उदाहरण। $x^2-2xy+y^2$ को $x-y$ से भाग करो।

यहाँ पर $x^2-2xy+y^2$ को x^2-xy और $-xy+y^2$, इन दो खण्डों में विभक्त कर सकते हैं। अब सम्पूर्ण व्यंजक में $x-y$ से भाग देने पर जो आंशिक भागफल दोनों का होगा वह उनके वैजिक योग के बराबर होगा।

यहाँ x^2-xy, अर्थात् $x(x-y)$ को $x-y$ से भाग करने से x आता है, और दूसरे खण्ड $-xy+y^2$ अर्थात् $-y(x-y)$ को $x-y$ से भाग करने से $-y$ आता है।

अतएव $x^2-2xy+y^2$ को $x-y$ से भाग करने पर सम्पूर्ण भागफल $x-y$ होगा।

इस रीति का व्यावहारिक रूप यह है:—

$$\begin{array}{r l}
x-y)\ x^2-2xy+y^2\ (x-y & \\
\underline{x^2-xy\qquad} & \\
-xy+y^2 & \\
\underline{-xy+y^2} & \\
\end{array}$$

उक्त प्रक्रिया में पहले भाजक में जितने पद हैं भाज्य में से उतने ही पद लेते हैं और भाज्य के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग देकर भागफल का पहला पद निकालते हैं। यहाँ भागफल का प्रथम पद $=x^2\div x=x$

फिर इस भागफल x द्वारा भाजक को गुणा करके गुणनफल x^2-xy को भाज्य में से घटाते हैं। $-xy+y^2$ शेष रहेगा। इसे दूसरा भाज्य समझ कर $x-y$ द्वारा भाग करते हैं। फिर पहले की भाँति आगे चलने पर $-y$ भागफल प्राप्त होगा। यही सम्पूर्ण भागफल का द्वितीय पद है।

दूसरी बार भाग करने पर कुछ शेष नहीं बचता; अतएव $x-y$ ही सम्पूर्ण भागफल है। यदि दूसरी बार भाग करने पर कुछ शेष बच जाता, तो उसे तीसरा भाज्य मानकर फिर वही क्रिया की जाती और जबतक कि भाग देने को कोई राशि शेष न रहे वही क्रिया करते चले जाओ।

132. भाग के नियम।

ऊपर जो कुछ कहा गया है उससे भाग करने के निम्नलिखित नियम प्राप्त होते हैं:—

(1) भाज्य व भाजक में दिये हुए किसी साधारण अक्षर के घातों के अवरोह-क्रम या आरोह-क्रम के अनुसार इन दोनों को रखो।

(2) भाज्य के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग करो। इस प्रकार प्राप्त फल को भागफल का प्रथम पद मानो।

(3) सम्पूर्ण भाजक को भागफल के इस प्रथम पद से गुणा करो और गुणनफल को भाज्य में से घटाओ।

(4) अन्तरफल को नया भाज्य मानकर पूर्व नियमानुसार क्रिया करो और जब तक कोई शेषफल न रहे, तब तक इस प्रक्रिया को जारी रक्खो।

(5) घटाने की सुविधा के लिए सजातीय पदों को एक ही पंक्ति में रखो।

उदाहरण 1. $x^4-4x^2+12x-9$ को x^2+2x-3 से भाग करो।

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x-3)\ x^4+0x^3-4x^2+12x-9\ (x^2-2x+3 \\
x^4+2x^3-3x^2\qquad\qquad\qquad\qquad \\
-2x^3-x^2+12x\qquad\qquad \\
-2x^3-4x^2+6x\qquad\qquad \\
3x^2+6x-9 \\
3x^2+6x-9
\end{array}
$$

पहले यह देखना है कि x^4 के बादवाला x^3 वाला पद नहीं है; इस कारण विद्यार्थियों को x^3 के स्थान में एक शून्य रखकर पूरा कर लेना चाहिए।

भाजक में तीन पद हैं; अतः भाज्य में से तीन पद लेने चाहिए। भागफल का प्रथम पद $(x^4 \div x^2) = x^2$. भाज्य के उक्त तीन पदों में से x^2 और भाजक x^2+2x-3 के गुणनफल को घटा देने से $-2x^3-x^2$ शेष बचते हैं। भाज्य में से $+12x$ पद उतार कर $-2x^3-x^2$ के साथ रखकर $-2x^3-x^2+12x$ को दूसरे भाज्य के रूप में लिखो। भागफल का द्वितीय-पद $-2x$, इस दूसरे भाज्य में से $-2x$ और भाजक x^2+2x-3 के गुणनफल को घटा देने से $3x^2+6x$ शेष बचते हैं। अब मूल भाज्य के -9 पद को $3x^2+6x$ के साथ रखकर $3x^2+6x-9$ व्यंजक को तीसरे भाज्य के रूप में लिखो और इसमें से भागफल के तृतीय पद $+3$ और भाजक x^2+2x-3 के गुणनफल को घटाओ। अब कुछ भी शेष नहीं बचता।

अतएव सम्पूर्ण भागफल $= x^2-2x+3$.

टीका—प्रत्येक घटाने की क्रिया के बाद भाज्य के समस्त शेष पदों को एक-साथ उतारने की आवश्यकता नहीं है। केवल प्रयोजनीय पदों को उतारना चाहिए।

उदाहरण 2. $a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc$ को $ab+bc+ac$ से भाग करो।

यहाँ भाज्य और भाजक दोनों को उनमें दिये हुए किसी साधारण अक्षर के घातों के आरोह या अवरोह-क्रम के अनुसार नहीं लिखा गया है। अतः ऐसे प्रश्नों की क्रिया निम्न प्रकार से की जाती है:—

$$
\begin{array}{l|l|l}
ab+ac+bc & a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+3abc+b^2c+bc^2 & a+b+c \\
 & a^2b+a^2c \qquad\qquad\qquad +abc & \\
\hline
 & \qquad ab^2+ac^2+2abc+b^2c & \\
 & \qquad ab^2 \qquad\quad +abc+b^2c & \\
\hline
 & \qquad\quad ac^2+abc \qquad\qquad +bc^2 & \\
 & \qquad\quad ac^2+abc \qquad\qquad +bc^2 & \\
\end{array}
$$

$\therefore$ भागफल $= a+b+c$.

उदाहरण 3. $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$ को $1+3x-5x^2$ से भाग करो ।

$$1+3x-5x^2 \,\Big)\, 1+x-8x^2+19x^3-15x^4 \,\Big(\, 1-2x+3x^2$$
$$1+3x-5x^2$$
$$-2x-3x^2+19x^3$$
$$-2x-6x^2+10x^3$$
$$3x^2+9x^3-15x^4$$
$$3x^2+9x^3-15x^4$$

उदाहरण 4. x^6-y^6 को $x-y$ से भाग करो ।

$$x-y \,\Big)\, x^6-y^6 \,\Big(\, x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$$
$$x^6-x^5y$$
$$x^5y-y^6$$
$$x^5y-x^4y^2$$
$$x^4y^2-y^6$$
$$x^4y^2-x^3y^3$$
$$x^3y^3-y^6$$
$$x^3y^3-x^2y^4$$
$$x^2y^4-y^6$$
$$x^2y^4-xy^5$$
$$xy^5-y^6$$
$$xy^5-y^6$$

133. लम्बे भाग से समानता ।

उक्त उदाहरणों से स्पष्ट प्रकट होता है कि इन सब उदाहरणों की क्रिया अङ्कगणित के लम्बे भाग-जैसी है । एक उदाहरण द्वारा यह समानता स्पष्ट होजायगी ।

672 को 32 से भाग करो ।

$$(i)\quad 32 \,\Big)\, 672 \,\Big(\, 21 \qquad\qquad (ii)\quad 3.10+2 \,\Big)\, 6.10^2+7.10+2 \,\Big(\, 2.10+1$$
$$64 \qquad\qquad\qquad 6.10^2+4.10$$
$$32 \qquad\qquad\qquad 3.10+2$$
$$32 \qquad\qquad\qquad 3.10+2$$

(i) इसमें अङ्कगणित की क्रिया दिखलाई गई है और (ii) में बीजगणित रूप में भाग करके दिखलाया गया है ।

यदि (*ii*) में 10 के स्थान पर x लिखा जाय, तो इसका निम्न रूप होगा:—

$$
\begin{array}{l}
3x+2)\,6x^2+7x+2\,(2x+1 \\
\quad\quad\;\; \underline{6x^2+4x} \\
\quad\quad\quad\quad\;\; 3x+2 \\
\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{3x+2}
\end{array}
$$

बीजगणित में भी $6x^2+7x+2$ को $3x+2$ से इसी प्रकार भाग देते हैं। $2x+1$ भागफल हुआ।

अतः देखा जाता है कि बीजगणित में भाग के समय जो क्रिया की जाती है वह अङ्कगणित के लम्बे भाग की क्रिया के सिवाय और कुछ नहीं है।

टीका—अङ्कगणित में (*i*) में प्रदर्शित संक्षेप क्रिया का अवलंबन किया जाता है, किन्तु बीजगणित में ऐसा करना सम्भव नहीं है। इस पृथकता का कारण दोनों की लेखनप्रणालियों की भिन्नता है।

134. विश्लिष्ट गुणकप्रणाली द्वारा भागहार (Method of Detached Co-efficients).

प्रक्रिया (*ii*) से प्रकट होता है कि यदि भाज्य व भाजक दोनों कोई एक ही अक्षरवाले व्यंजक हों अथवा दोनों अक्षरों के समघातिक व्यंजक हों, तो गुणा की भाँति भाग-क्रिया भी विश्लिष्ट गुणक-प्रणाली द्वारा संक्षेप करली जाती है। सब जगह भाज्य तथा भाजक को एक ही क्रम में रख लेते हैं।

उदाहरण 1. $x^4-x^3-3x^2+x+2$ को x^2-3x+2 से भाग दो।

$$
\begin{array}{l}
1-3+2)\,1-1-3+1+2\,(1+2+1 \\
\quad\quad\quad\;\; \underline{1-3+2} \\
\quad\quad\quad\quad\;\; 2-5+1 \\
\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{2-6+4} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 1-3+2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{1-3+2}
\end{array}
$$

निर्णय भागफल $=x^2+2x+1$.

उदाहरण 2. $x^6+y^6-2x^3y^3$ में x^2+y^2-2xy का भाग दो।

यहाँ पर भाज्य और भाजक दोनों को x के घातों को निम्न क्रमानुसार रखकर भाज्य के ख़ाली स्थानों को शून्य द्वारा पूरा किया जाता है।

$$
\begin{array}{l}
1-2+1)\,1+0+0-2+0+0+1\,(1+2+3+2+1 \\
\qquad\qquad 1-2+1 \\
\qquad\qquad\quad 2-1-2 \\
\qquad\qquad\quad 2-4+2 \\
\qquad\qquad\qquad 3-4+0 \\
\qquad\qquad\qquad 3-6+3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2-3+0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2-4+2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1-2+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1-2+1
\end{array}
$$

∴ निर्णेय भागफल $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.

प्रश्नावली 35.

भाग दोः—

1. $2x^3-x^2-x-3$ में $2x-3$ का।
2. $6x^3+x^2-11x+21$ में $3x-7$ का।
3. $a^2+a^4+a^6$ में a^2+a+1 का।
4. $x^4-y^4+a^4+2a^2x^2$ में $x^2-y^2+a^2$ का।
5. $x^4+x^3-16x-4-9x^2$ में $4+x^2+4x$ का।
6. $y^4-y^3-16y+16$ में y^2-16 का।
7. $2x^4+9x-12-5x^3-7x^2$ में $1-x+x^2$ का।
8. $7x^3-10x^2+x^4-3+25x$ में $x+x^2-3$ का।
9. $6x^5-17x^4+12x^3-66x^2+72x-72$ में $2x^2-3x+6$ का।
10. x^4+4y^4 में $x^2-2xy+2y^2$ का।
11. $2a^2-5a-6a^4+9a^3+3$ में $3a^2-a+1$ का।
12. $1-32x^5-128x^7$ में $1-2x+4x^2$ का।
13. $x^5-61x-60$ में x^2-2x-3 का।
14. $x^4+7x^2+13x+6$ में x^2-x+3 का।

15. $3x^2-4y^2-3z^2-4xy+8zx+8yz$ में $x-2y+3z$ का ।

16. $3-x^2-4x^3-14x+x^4$ में $3+x^2+x$ का ।

17. $1-a^2-b^2+a^2b^2$ में $1+a+b+ab$ का ।

18. $1-16a^4$ में $8a^3+4a^2+2a+1$ का ।

19. $4x-1+2x^5-x^2+x^4-7x^3$ में x^3+1-3x का ।

20. $a+b+a^5+b^5$ में $a+b$ का ।

21. $x^3+8y^3-27z^3+18xyz$ में $x+2y-3z$ का ।

22. $x^3+y^3+3xy-1$ में $x+y-1$ का ।

23. $2x^5-7x^4-2x^3+18x^2-3x-8$ में x^3-2x^2+1 का ।

24. $x^6-5x^5+5x^4+2x^2+5x-2$ में $x-2-2x^2+x^3$ का ।

विश्लिष्ट गुणन-प्रणाली द्वारा भाग करो :—

25. $6x^4-x^3+4x^2+5x-6$ में $3x^2+x-2$ का ।

26. $3-9x+2x^2+5x^3-7x^4+2x^5$ में $1-3x+x^2$ का ।

27. $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ में $1+x^2+x^4$ का ।

28. x^3-27 में x^2+3x+9 का ।

29. $3a+9b+6c$ में $a+3b+2c$ का भाग दो और 396 तथा 132 का भाग प्रक्रिया सहित सम्बन्ध दिखाओ ।

135. भिन्न-गुणक ।

गुणकों के भिन्न (Fraction) होने पर अङ्कगुणकों के नियमों का प्रयोग करना चाहिए ।

उदाहरण । $\frac{1}{3}x^4-\frac{11}{12}x^3+\frac{41}{8}x^2-\frac{23}{4}x+6$ को $\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1$ द्वारा भाग दो ।

$$
\begin{array}{l}
\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1\Big)\ \frac{1}{3}x^4-\frac{11}{12}x^3+\frac{41}{8}x^2-\frac{23}{4}x+6\ \Big(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+6 \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \underline{\frac{1}{3}x^4-\frac{5}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{1}{2}x^3+\frac{37}{8}x^2-\frac{23}{4}x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{4}x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4x^2-5x+6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{4x^2-5x+6}
\end{array}
$$

$\therefore$ निर्णय भागफल $=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+6$.

136. कोष्ठों का व्यवहार ।

गुणकों के आक्षरिक होने पर अनेक स्थानों में कोष्ठों के प्रयोग से क्रिया संक्षिप्त होजाती है और भागफल निकालने में कुछ सुगमता होती है ।

उदाहरण । $x^3-(a+p)x^2+(q+ap)x-aq$ में $x-a$ का भाग दो ।

$$
\begin{array}{l}
x-a\,)\,x^3-(a+p)x^2+(q+ap)x-aq\,(\,x^2-px+q \\
\qquad\quad x^3-ax^2 \\
\qquad\qquad\quad -px^2+(q+ap)x \\
\qquad\qquad\quad -px^2+apx \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad qx-aq \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad qx-aq
\end{array}
$$

प्रश्नावली 36.

भाग दोः—

1. $5a^2x^2-\frac{1}{5}$ में $ax-\frac{1}{5}$ का ।
2. $x^2-xy+\frac{3}{16}y^2$ में $x-\frac{1}{4}y$ का ।
3. $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{12}a-1$ में $\frac{2}{3}a-1$ का ।
4. $\frac{1}{3}x^2+\frac{17}{18}x+\frac{2}{3}$ में $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ का ।
5. $\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{12}x^2y+\frac{1}{18}xy^2-\frac{1}{27}y^3$ में $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$ का ।
6. $\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{27}$ में $3a+2$ का । 7. $x^4-\frac{1}{81}y^4$ में $x-\frac{1}{3}y$ का ।
8. $\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{27}y^3+\frac{1}{64}z^3-\frac{1}{8}xyz$ में $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z$ का ।
9. $a^6+\frac{1}{27}b^6$ में $a^2+ab+\frac{1}{3}b^2$ का ।
10. $\frac{3}{4}x^5-4x^4+\frac{77}{8}x^3-\frac{43}{4}x^2-\frac{33}{4}x+27$ में $\frac{1}{2}x^2-x+3$ का ।
11. $apx^3+(bp+aq)x^2+(cp+bq)x+qc$ में $px+q$ का ।
12. $x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$ में $x^2+(b+c)x+bc$ का ।
13. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$ में $a+b+c$ का ।
14. $x^4+(b^2-2ab-a^2)x^2+b^4$ में $x^2-(a+b)x+b^2$ का ।

15. $x^3+y^3+(p+1)xy(x+y)$ में $x^2+pxy+y^2$ का।

16. $x^4+2ax^3+(a^2+b+c)x^2+(ab+ca)x+bc$ में x^2+ax+b का।

17. $x^4-(2a+1)x^2+2a^2x-a^4+a^2$ में $x^2-a^2+(x-a)$ का।

18. भाज्य और भागफल क्रमशः $9x^5-x^3-12x^2-50$ और $3x^2-2x+5$ हैं, तो भाजक बताओ।

19. दो व्यंजकों का गुणनफल $3x^2+6y^2+2z^2+11xy+7yz+7zx$ और उनमें से एक $3x+2y+z$; तो दूसरा व्यंजक बताओ।

137. असम्पूर्ण भाग (Inexact Division).

भाग करते समय कभी कभी ऐसा होता है कि अन्त का अन्तरफल भाजक की अपेक्षा छोटा होता है जिससे आगे भाग नहीं किया जासकता। ऐसी अवस्था में भाज्य भाजक द्वारा पूर्णतया विभक्त नहीं हो सकता वरन् भाग-क्रिया के बाद शेष रह जाता है। अतः अङ्कगणित के नियमानुसार ऐसे स्थान पर भजनफल को पूर्ण भजनफल नहीं मानते, आंशिक मानते हैं। शेष को अंश और भाजक को हर मानकर उसको भिन्न बना लेते हैं और इस भिन्न को भागफल के साथ जोड़ देते हैं। इस प्रकार भागफल पूरा होजाता है। ऐसी अवस्था में भाग-क्रिया को **असम्पूर्ण भागफल** (Inexact Division) कहते हैं।

भाज्य के सबसे अन्त के अंश जिसको भाजक द्वारा भाग नहीं कर सकते उसको **भागशेष** (Remainder) कहते हैं।

अतएव यदि D भाज्य, d भाजक, Q भागफल और R भागशेष हो, तो

$$D=d\times Q+R.$$

$\therefore$ दोनों पक्षों में d से भाग करने पर

$$D\div d=Q+\frac{R}{d};$$

अर्थात् सम्पूर्ण भागफल, आंशिक भागफल Q और भागशेष $\frac{R}{d}$ दोनों का योगफल होता है।

उदाहरण 1. $6x^2+7x+5$ को $2x+1$ से भाग दो।

यहाँ दोनों राशिमालाओं को x के घात के नीचे लिखे क्रमानुसार रख लेते हैं।

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x+1 & 6x^2+7x+5 & 3x+2 \\
 & \underline{6x^2+3x} & \\
 & \quad 4x+5 & \\
 & \quad \underline{4x+2} & \\
 & \qquad 3 &
\end{array}
$$

यहाँ अन्त का अन्तरफल 3 है। इसे $2x+1$ द्वारा और भाग नहीं किया जासकता।

अतः आंशिक भागफल $3x+2$ और भागशेष 3;

$\therefore$ सम्पूर्ण भागफल $=(3x+2)+\dfrac{3}{2x+1}$.

टीका 1—स्पष्ट है कि भाग-क्रिया को समाप्त किये बिना आगे बढ़ने पर $\dfrac{3}{2x}$ भिन्न को भागफल का परवर्त्ती पद मानना होगा, इस प्रकार आगे बढ़ने पर भाग-क्रिया कभी समाप्त न होगी। इसलिए भाग का शेष, भाजक की अपेक्षा छोटे मान (of lower order) का होने पर भी अग्रसर होना सम्भव न होगा।

टीका 2—यदि राशिमाला को x के घात के आरोह-क्रम के अनुसार रखा जाय, तो भी भाग की क्रिया समाप्त नहीं होती; जैसे,

$$
\begin{array}{r|l|l}
1+2x & 5+7x+6x^2 & 5-3x+12x^2+\cdots \\
 & \underline{5+10x} & \\
 & \quad -3x+6x^2 & \\
 & \quad \underline{-3x-6x^2} & \\
 & \qquad\quad 12x^2 & \\
 & \qquad\quad \underline{12x^2+24x^3} & \\
 & \qquad\qquad -24x^3 & \\
 & \qquad\qquad \cdots &
\end{array}
$$

भागफल में असंख्य पद आते जायँ और भाग-क्रिया समाप्त न होती हो, तो किसी निर्दिष्ट स्थान तक भागफल निकालने के बाद क्रिया समाप्त कर देते हैं।

टीका 3—यद्यपि दोनों स्थानों पर भाज्य और भाजक एक ही रखा है तथापि आंशिक भागफल दोनों का एक ही नहीं होता, क्योंकि इसका सम्पूर्ण भागफल तो कुछ है नहीं। सम्पूर्ण भागफल क्रमशः $3x+2+\frac{3}{2x+1}$ और $5-3x+\frac{12x^2}{1+2x}$; इनमें प्रत्येक $\frac{6x^2+7x+5}{1+2x}$ के समान है।

उदाहरण 2. $1+x$ को $1-x$ से चार पद तक भाग दो।

$$
\begin{array}{l}
1-x\,)\,1+x\,(\,1+2x+2x^2+2x^3+\dots \\
1-x \\
\hline
2x \\
2x-2x^2 \\
\hline
2x^2 \\
2x^2-2x^3 \\
\hline
2x^3 \\
2x^3-2x^4 \\
\hline
2x^4
\end{array}
$$

आंशिक भागफल $=1+2x+2x^2+2x^3$ और शेष $=2x^4$.

$\therefore$ सम्पूर्ण भागफल $=1+2x+2x^2+2x^3+\frac{2x^4}{1-x}$.

प्रश्नावली 37.

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रथम राशि को द्वितीय राशि से भाग दो और शेष निकालोः—

1. $2x^3+8x^2-3x-15,\ x+4$.
2. $6x^4-x^3+3x^2+26x-5,\quad 2x^2-3x+5$.
3. $x^4-2x^3-12x^2+16x+22,\quad x^2-x-12$.

भाग करो और सम्पूर्ण भागफल निकालोः—

4. $2x^4+7x^3+12x^2+8x+4$ को x^2+3x+1 से।
5. x^4+x^2-x+3 को $x+7$ से।

भाग दो (भागफल चार पद तक):—

6. $1+2x$ को $1-3x$ से । 7. 1 को $1-x$ से ।

8. $1+x+x^2$ को $1+x$ से । 9. $1+2a+3a^2$ को $a-1$ से ।

10. भाजक x^2-x+1, भागफल $x-3$ और भागशेष $x+1$, तो भाज्य बताओ ।

11. भाज्य $x^3-20x+16$, भागफल $x+5$, भागशेष $2x+1$, तो भाजक बताओ ।

12. $x^3+2x^2+cx+18$ को $x+3$ से भाग दो । c का क्या मान है यदि शेष कुछ न हो ?

138. भाग सम्बन्धी प्रश्न ।

उदाहरण । एक नीबू का मोल 6 पाई और एक सेब का मोल 8 पाई हो, तो 4 नीबुओं के बदले कितने सेब मिल सकेंगे ?

मानलो कि 4 नीबुओं के बदले x सेब मिल सकते हैं ।

4 नीबुओं का मोल $=4\times 6$ पाइयाँ,

x सेबों का मोल $=8\times x$ पाइयाँ ।

प्रश्न की शर्त के अनुसार $8\times x=4\times 6$, इसलिए $x=\frac{4\times 6}{8}=3$,

$\therefore$ 4 नीबुओं के बदले 3 सेब मिलेंगे ।

प्रश्नावली 38.

1. यदि $5x=75$ हो, तो x का मान बताओ ।

2. x का क्या मान होने पर $(a+b)x=a^2+2ab+b^2$ होगा ?

3. यदि $3a^2x=12a^2$ हो, तो x का मान क्या होगा ?

4. $ax=a^3+a^2b$ हो, तो x का मान बताओ ।

5. $P=a^2+2ab+b^2$ और $Q=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $Px=Q$ हो, तो x का मान क्या होगा और $Px=-Q$ होने पर x का मान क्या होगा ?

6. एक व्यक्ति ने 2 आने में 3 नीबू की दर से कुछ नीबू लिये और इनके $\frac{1}{2}$ नीबू आने में 2 की दर से लिये । बताओ इनको मिलाकर वह किस भाव से बेचे कि उसे लागत से दुगना दाम मिले ?

विविध प्रश्नावली III.

I.

1. $1-(1-\overline{1-x})$, $2x-(4-3x)$ और $3-(-4x+5)$ को जोड़ो।
2. y की अपेक्षा x जितना अधिक है उसके चार गुने में से x और y का 3 गुना घटाओ।
3. $ax-by-cz+bx-cy+az$ राशिमाला को एक द्विपद और एक त्रिपद व्यंजक के रूप में लिखो।
4. $16x^2+2xy-5y^2$ को $3x-5\{y-(x+2y)\}$ से भाग दो।
5. किसी स्कूल में पहली कक्षा में x छात्र, दूसरी कक्षा में $2x-5$ छात्र, और अन्य कक्षाओं में $x-14$ छात्र हैं। स्कूल के कुल छात्रों की संख्या बताओ। यदि कुल छात्रों की संख्या 197 हो, तो x का मान बताओ।

II.

1. सरल करो:—

   $8a-[5\{4x-2(x-1)\}-4\{3x-2(x+1)\}+3a]$.
2. $8x^3-12x^2-11x+21$ में क्या जोड़ें कि योगफल $2x-3$ से बँट जाय ?
3. एक घोड़ा एक सप्ताह में $5x+7$ बुशल (Bushel) घास खा सकता है; $3x-2$ सप्ताह में उसके लिए कितनी घास चाहिये।
4. साधारण गुणन क्रिया न करके अन्य रीति से $x-2$, $2x+3$, $x+2$ और $2x-3$ का संलग्न गुणनफल निकालो।
5. दो राशियों का गुणनफल $\frac{1}{64}x^3-\frac{1}{27}y^3+\frac{1}{8}z^3+\frac{1}{8}xyz$ है और उनमें से एक $\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z$ है; दूसरी राशि बताओ।

III.

1. $a=1, b=2$ और $c=3$ होने पर,
$$\frac{a^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{b^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{c^2}{(a-b)(b-c)}$$ का मान बताओ।

2. $\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}y+\frac{3}{4}z$ और $y-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}z$ दोनों के योग में क्या जोड़ने से योगफल $x+y+z$ के बराबर होगा ?

3. $P=x^2-10x+21$, $Q=x^2+12x-27$; $x=3$ होने पर, P^2-Q^2 का क्या मान होगा ?

4. यदि $(x-2)(x+3)=x^2$ हो, तो $(x-4)(x-3)$ और $(x+2)(x-1)$ का मान क्या होगा ?

5. $a+2b+3c=0$ होने पर, $\frac{2c}{a+c}-\frac{a}{b+c}$ का संख्यात्मक (Numerical) मान बताओ ।

IV.

1. x का मान क्या होगा यदि, $(x+1)(x+2)$ राशि, $(x-3)(x+4)$ की अपेक्षा 16 अधिक हो ? सिद्ध करो कि x का कोई ऐसा मान नहीं हो सकता जिससे $(x-1)(x+5)$ राशि $(x-2)(x+6)$ की अपेक्षा 2 अधिक होजाय ।

2. $3+x^2$ को $2-x$ से गुणा करो और $x=1\cdot5$ होने पर, गुणनफल का मान बताओ ।

3. एक व्यापारी ने $1+x^2+x^4$ गाँठों में $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ मन पाट भेजा, तो प्रत्येक गाँठ में कितना पाट होगा ?

4. किस संख्या में x^2+x-1 का भाग देने पर, x^2-2x+1 भागफल और $x+1$ भाग-शेष होगा ?

5. परीक्षा द्वारा पूर्ण संख्याओं से बने हुए कुछ ऐसे विन्दु निकालो जिनके भुज-कोटि से $2y=3x$ समीकरण सिद्ध होता हो। प्रमाण करो कि उक्त विन्दु और मूल-विन्दु एक ही सरल रेखा में हैं ।

V.

1. $\frac{1}{4}(x-\frac{2}{3}y)+\frac{1}{3}(6y-5z)+\frac{1}{3}(12z-2x)$ को सरल करो ।

2. $(1, 4)$, $(4, 9)$ और $(9, 3)$ विन्दु एक ही त्रिभुज के शीर्ष होने पर सीमा कितनी होगी ?

3. $3x^2-2x+1$ और $2x^2+3x-1$, इन दोनों के गुणनफल में x^2 का गुणक बताओ ।

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल करोः—

$$(i)\ \frac{5}{9}x-2=\frac{5}{6}. \quad (ii)\ \frac{x}{5}-\left(\frac{x}{3}-7\right)=\frac{x}{4}-\left(\frac{x}{6}-35\right).$$

5. एक व्यक्ति किसी निर्दिष्ट स्थान से 5 मील उत्तर चलकर फिर दक्षिण की ओर 9 मील और तदुपरान्त फिर उत्तर की ओर 7 मील चला। बताओ यात्रा-स्थान से वह इस समय कितनी दूर है। लेखा-चित्र द्वारा प्रकट करो ।

VI.

1. $4x+6y+8z$ में $2x+3y+4z$ का भाग दो और 468 में 234 का भाग देकर उनके पारस्परिक सम्बन्ध को बताओ ।

2. $(3x-5y)(x-z)+z\{2x-z(3x-y)-y^2(x-z)\}$ व्यंजक को विकोष्ठिकरण करो । $x=1$, $y=0$ और $z=2$ होने पर इसका मान बताओ ।

3. $2x^4-6ax^3+(4a^2+ab-2b^2)x^2+3ab^2x-a^2b^2$ में $x^2-(2a-b)x-ab$ का भाग दो ।

4. एक कुत्ता प्रति दिन 24 घंटों में x घंटा सोता है । यदि कुत्ते के सोने के समय से 6 घंटे अधिक जागने का समय हो, तो बताओ कुत्ता कितने घंटे सोता है ।

VII.

अनु० 110 और अनु० 128 में गुणन और भाग के नियम धन-पूर्ण संख्या के सम्बन्ध में बतलाये गये हैं। छब्बीसवें अध्याय में किसी भी संख्या (धन, ऋण, पूर्ण या भिन्न) के सम्बन्ध में उक्त नियम दिखाये गये हैं। इस समय इतना समझ लेना काफी है कि गुणन और भाग के उक्त घाताङ्क नियम ऋण तथा भिन्न दोनों प्रकार की संख्याओं के लिए काम में लाये जा सकते हैं; जैसे, $x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}$, $x^{-\frac{1}{2}}\div x^{\frac{1}{3}}=x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{5}{6}}$ इत्यादि। ऋण और भिन्न घात युक्त खण्डों से मिली हुई राशियों के गुणन और भाग, धन और पूर्ण-घात युक्त राशियों के गुणन और भाग के समान क्रिया से ही किये जाते हैं। इसी प्रकार से निम्न प्रश्नों को हल करो।

गुणा करोः—

1. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ और $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

2 $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ और $x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}$.

3. $a^2-2a^{\frac{5}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}-a$ और $a-2a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}$.

4. $x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$ और $x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$.

5. $x+x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{5}}+y^{-1}$ और $x^{-1}+x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}}+y^{-1}$.

6. $1+2x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+x$ और $1-2x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-x$.

भाग करोः—

7. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ को $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ से।

8. $x-8$ को $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4$ से।

9. $a^{-1}-b^{-\frac{2}{3}}-4b^{-\frac{1}{3}}-4$ को $a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{3}}-2$ से।

10. $m^{\frac{28}{11}}-n^{\frac{8}{11}}$ को $m^{\frac{21}{11}}-m^{\frac{14}{11}}n^{\frac{2}{11}}+m^{\frac{7}{11}}n^{\frac{4}{11}}-n^{\frac{6}{11}}$ से।

11. $2x^{-4}+x^{-2}y^{-3}-y^{-6}-x^{-2}+5y^{-3}-6$ को $2x^{-2}-y^{-3}+3$ से।

ग्यारहवाँ अध्याय

सरल सूत्रावली

139. छठवें अध्याय में निम्नलिखित सूत्रों की विवेचना की गई है:—

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. अनु० 65.

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. अनु० 67.

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. अनु० 69.

(4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$. अनु० 71.

(5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=a^3+b^3+3ab(a+b)$. अनु० 73.

(6) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=a^3-b^3-3ab(a-b)$. अनु० 74.

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$. अनु० 75.

(8) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. अनु० 76.

इस अध्याय में कुछ और भी साधारण सूत्रों का दिग्दर्शन कराया जायगा।

140. सूत्र $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

$$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$$
$$=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c \qquad \text{अनु० 65.}$$
$$=a^2+2ab+b^2+c^2+2ac+2bc$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

उदाहरण 1. $2a-b+3c$ का वर्ग निकालो।

$$(2a-b+3c)^2=(2a)^2+(-b)^2+(3c)^2+2(2a)(-b)+2(2a)(3c)+2(-b)(3c)$$
$$=4a^2+b^2+9c^2-4ab+12ac-6bc.$$

उदाहरण 2. **सरल करोः—** $9x^2+4y^2+z^2-(3x-2y-z)^2$.

$$(3x-2y-z)^2=9x^2+4y^2+z^2-12xy-6xz+4yz;$$

अतः $9x^2+4y^2+z^2-(3x-2y-z)^2$

$$=9x^2+4y^2+z^2-12xy-6xz+4yz$$
$$+12xy+6xz-4yz-(3x-2y-z)^2$$
$$=(3x-2y-z)^2+12xy+6xz-4yz-(3x-2y-z)^2$$
$$=12xy+6xz-4yz.$$

प्रश्नावली 39.

निम्नलिखित के वर्ग निकालोः—

1. $a+b-c$.   2. $3x-2y+z$.   3. $p+2q-r$.

4. $a^2+b^2+c^2$.   5. $x+y+3$.   6. $a-b+2$.

सरल करोः—

7. $p^2+4q^2+r^2-(p-2q+r)^2$.

8. $(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$.

9. $(a+2b-3)^2-2(2ab-3a-6b)$.

10. $(x-2y+z)^2-2(xz-2xy-2yz)$.

11. $(3x^2-y-z)^2-(9x^4+y^2+z^2)$.

12. $(x^2+y^2+z^2)^2-(x^2-y^2+z^2)^2$.

13. $(3a+2b-5c)^2-(9a^2+4b^2+25c^2)$.

14. $(x^2+x-1)^2-2x(x^2-x-1)$.

15. $(x^3+y^3-z^3)^2-(x^6+y^6+z^6)$.

141. बहुपद व्यंजक का वर्ग।

तीन व उससे अधिक पदोंवाले व्यंजकों का वर्ग निकालने में अनु० 65 के सूत्र का बार-बार प्रयोग होता है। आगे दिये हुए उदाहरण से क्रिया स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण। $a+b+c+d$ का वर्ग निकालो।

$$(a+b+c+d)^2$$
$$=\{(a+b+c)+d\}^2$$
$$=(a+b+c)^2+d^2+2(a+b+c)d$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+d^2+2ad+2bd+2cd$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

अतएव किसी बहुपद व्यंजक का वर्ग निकालने में नीचे लिखा नियम काम में लाते हैं—

किसी बहुपद व्यंजक का वर्ग उसमें दिये हुए प्रत्येक पद के वर्ग के योगफल के साथ प्रत्येक पद को उसके बादवाले प्रत्येक पद द्वारा गुणा करके जो योगफल प्राप्त हो उसके दूने को जोड़ने से प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 40.

वर्ग निकालोः—

1. $a-b+c-d.$

2. $2x-y+z+u.$

3. $3x-2y+z-1.$

4. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b.$

142. सूत्र। $$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

दायाँ पक्ष $=\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab)-\frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab)=\frac{1}{4}(4ab)$
$=ab.$

उदाहरण 1. $4xy$ को दो वर्गों के अन्तर के रूप में दिखलाओ।

$$4xy=(2x)(2y)$$
$$=\left(\frac{2x+2y}{2}\right)^2-\left(\frac{2x-2y}{2}\right)^2$$
$$=(x+y)^2-(x-y^2).$$

उदाहरण 2. $(x+3)(x+5)$ को दो वर्गों के अन्तर के रूप में दिखलाओ ।

$$(x+3)(x+5) = \left\{\frac{(x+3)+(x+5)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x+3)-(x+5)}{2}\right\}^2$$
$$= \left(\frac{2x+8}{2}\right)^2 - \left(\frac{-2}{2}\right)^2$$
$$= (x+4)^2 - (-1)^2.$$

प्रश्नावली 41.

दो वर्गों के अन्तर के रूप में दिखलाओ:—

1. pq.
2. $a(a+2)$.
3. $(x+4)(x+6)$.
4. a^2b^2.
5. x.
6. $3x-2$.
7. x^3y^3.
8. $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{4})$.
9. $4a$.
10. a^2b.
11. $(x+2y)(x-2y)$.
12. $(a+3)(a-4)$.
13. $(a+1)(b-1)$.
14. $(x-7)(x+\frac{1}{7})$.
15. $(x+8)(x+4)$.

143. सूत्र । $(px+q)(rx+s) = prx^2+(ps+qr)x+qs$.

$$(px+q)(rx+s) = px(rx+s)+q(rx+s)$$
$$= prx^2+psx+qrx+qs$$
$$= prx^2+(ps+qr)x+qs.$$

उदाहरण 1. $(2x+3)(3x+5)$ का गुणनफल निकालो ।

$$(2x+3)(3x+5) = 2.3x^2+(2.5+3.3)x+3.5$$
$$= 6x^2+19x+15.$$

उदाहरण 2. $(4a-3)$ और $(5a+7)$ का गुणनफल निकालो ।

$$(4a-3)(5a+7) = 4.5a^2+\{4.7+5.(-3)\}a+7.(-3)$$
$$= 20a^2+13a-21$$

प्रश्नावली 42.

नीचे लिखे गुणनफलों को निकालो:—

1. $(2x+1)(x+1)$.
2. $(3x-4)(2x+5)$.
3. $(x+1)(2x-7)$.
4. $(3p-5)(2p-3)$.
5. $(2-p)(p-6)$.
6. $(3-x)(2x-9)$.
7. $(x^2+1)(2x^2-1)$.
8. $(2a^2+1)(a^2-1)$.
9. $(x+2)(4x-3)$.
10. $(7x-5)(2x+\frac{1}{2})$.
11. $(\frac{1}{2}a+3)(\frac{1}{3}a-2)$.
12. $(a^2-5)(2a^2+5)$.
13. $(3a^2+2)(2a^2-1)$.
14. $(a^3+1)(2a^3-1)$.
15. $(3x^3-1)(4x^3-5)$.

144. सूत्र। $\mathbf{(x+a)(x+b)(x+c)}$
$$\mathbf{=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.}$$

$\because\ (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab;$ अनु. 71.

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)(x+b)(x+c) &= \{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)\\ &= x^2(x+c)+(a+b)x(x+c)+ab\\ &\quad (x+c)\\ &= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x\\ &\quad +abc.\end{aligned}$$

अब पदों में x के घात समूह को निम्न क्रमानुसार सजाया जाता है।

उदाहरण 1. $(x+1)(x+2)(x+3)$ का गुणनफल लिखो।

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)\\ &= x^3+(1+2+3)x^2+(1.2+2.3+3.1)x+1.2.3\\ &= x^3+6x^2+11x+6.\end{aligned}$$

उदाहरण 2. $(x-a)(x-b)(x-c)$ का गुणनफल निकालो।

ऊपर के सूत्र में a, b और c के चिह्न बदलकर

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

ऊपर के सूत्र में x^2 का गुणक a, b और c के योगफल के बराबर है; x का गुणक a, b और c इनमें से प्रत्येक दो पदों के गुणनफल के योग के समान है और शेष पद a, b और c तीनों के गुणनफल के समान है।

प्रश्नावली 43.

गुणनफल निकालोः—

1. $(x+3)(x+4)(x+2)$.
2. $(x-1)(x+2)(x-5)$.
3. $(a-1)(a-3)(a-6)$.
4. $(m-3)(m+2)(m-7)$.
5. $(x-1)(x+3)(x-7)$.
6. $(x+2)(x-8)(x-3)$.
7. $(a-2)(a-4)(a-5)$
8. $(a-1)(a-2)(a-3)$.
9. $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$.
10. $(p+2)(p-3)(p+5)$.

145. सूत्र। $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$.

बायाँ पक्ष $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(bc+ca+ab)$
$=a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-3abc$
$-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)$ (गुणा करने से)
$=a^3+b^3+c^3-3abc$ (शेष पद घटाने पर)।

उदाहरण। $27x^3+8y^3+z^3-18xyz$ को $9x^2+4y^2+z^2-6xy-2yz-3zx$ से भाग दो।

$27x^3+8y^3+z^3-18xyz$
$=(3x)^3+(2y)^3+z^3-3(3x)(2y)z$
$=(3x+2y+z)(9x^2+4y^2+z^2-6xy-2yz-3zx)$,

$\therefore$ निर्णेय भागफल $=3x+2y+z$.

प्रश्नावली 44.

गुणनफल निकालोः—

1. $(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)$.
2. $(2a-3b+3c)(4a^2+9b^2+9c^2+6ab+9bc-6ac)$.
3. $(a+x-2)(a^2+x^2-ax+2a+2x+4$.

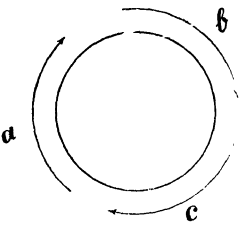
भाग दोः—

4. $x^3+8y^3-27z^3+18xyz$ में $x+2y-3z$ का।
5. $8m^3-27n^3+64p^3+72mnp$ में $4m^2+9n^2+16p^2+6mn+12np-8mp$ का।

146. चक्रीय क्रम (Cyclic Order).

अब हम यह दिखलाएँगे कि पहले बतलाये गये गुणा के सूत्रों की सहायता से किस प्रकार की कितनी विशेष विशेष राशियों के गुणनखण्ड निकाले जासकते हैं और कितने तादात्म्य सिद्ध किये जासकते हैं।

इस प्रकार के क्षेत्र में राशियों में a, b, c तीन अक्षर रहते हैं। तीनों अक्षरों को किसी वृत्त की परिधि के ऊपर निर्दिष्ट क्रम से दूर दूर लिखकर चक्राकार में सजाते हैं। उनमें से जिस एक अक्षर से आरम्भ करके एक ही दिशा में बढ़ जाने पर जिस क्रम के अनुसार उसको पढ़ा जाता है उसे 'चक्रीय क्रम' कहते हैं।



मानलो कि a, b, c तीन अक्षरों को किसी वृत्त की परिधि के ऊपर a से आरम्भ करके घड़ी की सूई की गति की अनुकूल दिशा में (चित्र में यह तीर-चिह्नों से दिखाया गया है) दूर दूर लिखते हैं। अब तीनों अक्षरों में से चाहे जिस किसी से आरम्भ होकर परिधि के ऊपर दिये तीर-चिह्नों के मार्ग से आगे बढ़ा जाय, तो अक्षरों में चक्रीय क्रम पाया जायगा। abc, bca, cab, इनमें से प्रत्येक चक्रीय क्रम के अनुसार लिखे गये हैं।

$b-c,\ c-a,\ a-b$ अन्तरों में भी a, b, c चक्रीय क्रम से लिखे गये हैं। किन्तु $a-b, a-c, b-c$ में अक्षर चक्रीय क्रम से नहीं हैं।

इसी प्रकार, bc, ca, ab इनके गुणनफलों में a, b, c चक्रीय क्रम से लिखे गये हैं। किन्तु bc, ac, ba में अक्षर चक्रीय क्रम से नहीं लिखे गये हैं।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$.

विकोष्ठिकरण करने ही से फल स्पष्ट होजाता है।

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$.

बायाँ पक्ष $=ab-ac+bc-ab+ca-cb=0$.

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$
$$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

कोष्ठों को तोड़ने से मालूम होगा कि तीनों राशिमाला एक ही पद विशिष्ट है ।

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$= bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$= -\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}.$$

विकोष्ठिकरण करने से ज्ञात होगा कि तीनों राशिमाला एक ही पद विशिष्ट हैं ।

यदि किसी राशिमाला के किसी एक पद के अक्षर-समूह को चक्रीय क्रम में परिवर्त्तन करके किसी दूसरे को पाया जाय तो उस राशिमाला को **प्रतिसम राशिमाला** (Symmetrical Expression) कहते हैं । ऊपर लिखे हुए उदाहरणों की समस्त राशिमालाएँ प्रतिसम हैं । उदाहरणार्थ $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ राशिमाला का $a^2(b-c)$ पद a, b, c को बदलकर यथाक्रम b, c, a लिखने से $b^2(c-a)$ पद के रूप में पाया जाता है ।

प्रश्नावली 45.

सिद्ध करो किः—

1. $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0.$

2. $3a(4x-5y)+4x(5y-3a)+5y(3a-4x)=0.$

3. $(a^2x^2-b^2y^2)+(b^2y^2-c^2z^2)+(c^2z^2-a^2x^2)=0.$

4. $x^2(2y+3z)+4y^2(3z+x)+9z^2(x+2y)$
$$=x(4y^2+9z^2)+2y(9z^2+x^2)+3z(x^2+4y^2).$$

5. $6pq(3p-2q)+2qr(2q-r)+3rp(r-3p)$
$$=3p(r^2-4q^2)+2q(9p^2-r^2)+r(4q^2-9p^2).$$

6. $(x+a)(y-z)+(y+a)(z-x)+(z+a)(x-y)=0.$

7. $(x+y+1)(x-y)+(y+z+1)(y-z)$
$$+(z+x+1)(z-x)=0.$$

8. $(px^2+q)(y^2-z^2)+(py^2+q)(z^2-x^2)$
$$+(pz^2+q)(x^2-y^2)=0.$$

147. सूत्र । $-(b-c)(c-a)(a-b)$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

साधारण गुणन-प्रक्रिया द्वारा देखा जाय तो,

$$-(a-b)(b-c)(c-a)=-(-a^2b+a^2c-b^2c+b^2a-c^2a+c^2b)$$
$$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

सूत्र का दायाँ पक्ष $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ अथवा $-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$ के बराबर, जैसा कि पहले सिद्ध किया गया है । [अनु० 146.]

उदाहरण 1. सरल करो:—

$$(b^2-c^2)(a+x)+(c^2-a^2)(b+x)+(a^2-b^2)(c+x)$$

राशिमाला $=(b^2-c^2)a+(b^2-c^2)x+(c^2-a^2)b+(c^2-a^2)x$
$$+(a^2-b^2)c+(a^2-b^2)x$$
$$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$$
$$+x(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a).$$

उदाहरण 2. सरल करो:— $(x^2+ax+a^2)(b^2-c^2)$
$$+(x^2+bx+b^2)(c^2-a^2)+(x^2+cx+c^2)(a^2-b^2).$$

राशिमाला $=(b^2-c^2)x^2+a(b^2-c^2)x+a^2(b^2-c^2)$
$$+(c^2-a^2)x^2+b(c^2-a^2)x+b^2(c^2-a^2)$$
$$+(a^2-b^2)x^2+c(a^2-b^2)x+c^2(a^2-b^2)$$
$$=x^2(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)$$
$$+x\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$$
$$+a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$$
$$=x(b-c)(c-a)(a-b).$$

148. सूत्र । $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$.

यह सूत्र साधारण गुणन-प्रक्रिया द्वारा सिद्ध किया जासकता है । यदि $E=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$ हो, तो

$$E+2abc=(a+b)(b+c)(c+a).$$

उदाहरण । सिद्ध करो कि,

$$(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)$$
$$+(x+y)^2(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

ऊपर के सूत्र में $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ लिखने से फल प्राप्त हो जायगा ।

149. सूत्र । $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

गुणन-प्रक्रिया द्वारा सरलता से उपर्युक्त सूत्र सिद्ध किया जासकता है । सूत्र को निम्न रूप में लिख सकते हैं:—

$$E+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

उदाहरण । सिद्ध करो कि,

$$(x+1)^2(y+z+5)+(y+2)^2(z+x+4)$$
$$+(z+3)^2(x+y+3)+3(x+1)(y+2)(z+3)$$
$$=(x+y+z+6)(xy+yz+zx+5x+4y+3z+11).$$

सूत्र को $a=x+1$, $b=y+2$, $c=z+3$ लिखने से उक्त फल पाया जायगा ।

150. सूत्र । $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$.

$\because$ $E+2abc=(a+b)(b+c)(c+a)$, अनु० 148.

और $E+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$, अनु० 149.

$\therefore$ $(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)$

$$=(E+3abc)-(E+2abc)=abc.$$

उदाहरण । सिद्ध करो कि,

$$(2y+z)(y^2+2yz-1)-2y(y+z+1)(y+z-1)=z(y^2-1).$$

मानलो कि $a=y+1,\ b=y-1,\ c=z;$

अथवा, $a+b+c=2y+z,\quad ab+bc+ca=y^2+2yz-1,$
$abc=z(y^2-1),\quad a+b=2y,$
$b+c=y+z-1,\quad c+a=y+z+1.$

उपर्युक्त सूत्र में a, b, c के बदले में ऊपर लिखे हुए मान को लिखने से इष्ट फल प्राप्त हो जायगा ।

151. सूत्र । $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)(ab+bc+ca)\\&=a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\\&\quad+2(a+b+c)(ab+bc+ca)\\&=a^3+b^3+c^3+\mathrm{E}+2(\mathrm{E}+3abc)\qquad \text{अनु. 149.}\\&=a^3+b^3+c^3+3(\mathrm{E}+2abc)\\&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)\qquad \text{अनु. 148.}\end{aligned}$$

उदाहरण । सिद्ध करो कि,

$$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)=0.$$

मानलो कि, $y-z=a,\ z-x=b,\ x-y=c;$

तो, राशिमालाएँ $=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$
$=(a+b+c)^3$
$=(y-z+z-x+x-y)^3=0.$

152. सूत्र । $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4).$

बायाँ पक्ष $=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c-(a-b)\}\{c+(a-b)\}$
$=(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b^2+2ab)$ अनु. 69.

$$= \{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$$
$$= 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$
$$= 4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2)$$
$$= 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

उदाहरण। सरल करोः $-(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4$
$$-2(z-x)^2(x-y)^2-2(x-y)^2(y-z)^2-2(y-z)^2(z-x)^2.$$

मान लो कि, $y-z=a,\ z-x=b,\ x-y=c$; तो $a+b+c=0.$

$\therefore$ राशिमाला $= a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$
$$= -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$
$$= 0 \quad [\because a+b+c=0.]$$

153. सूत्र। $\mathbf{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}$
$$\mathbf{=\tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.}$$

दायाँ पक्ष $=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$
$$=\tfrac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\}$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$$

उदाहरण। सिद्ध करो कि, $(y+z-x)^2+(z+x-y)^2+$
$$(x+y-z)^2-(y+z-x)(z+x-y)-(z+x-y)$$
$$(x+y-z)-(x+y-z)(y+z-x)=4(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

मान लो, $a=y+z-x,\ b=z+x-y,\ c=x+y-z$;

तो बायाँ पक्ष
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{4(y-z)^2+4(z-x)^2+4(x-y)^2\}$$
$[\because b-c=2(z-y)$ इत्यादि।]
$$=4.\tfrac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$$
$$=4(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

प्रश्नावली 46.

सिद्ध करो कि,

1. $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$.

2. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)=0$.

3. यदि $a=y+z-x$, $b=z+x-y$, $c=x+y-z$ हो, तो $a^3+b^3+c^3-3abc=4(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

4. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$.

5. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$.

6. $(ap+bq+cr)(ap+bq-cr)(bq+cr-ap)(cr+ap-bq)=2(a^2p^2b^2q^2+b^2q^2c^2r^2+c^2r^2a^2p^2)-(a^4p^4+b^4q^4+c^4r^4)$.

7. $(x+y-z)(xy-yz-zx)=(x+y)(y-z)(x-z)-xyz$.

8. $x^2(y+z)+y^2(z-x)-z^2(x-y)=2xyz-(y+z)(z-x)(x-y)$.

9. $(x^2+a^2-ax)(b^2-c^2)+(x^2+b^2-bx)(c^2-a^2)+(x^2+c^2-cx)(a^2-b^2)=-(b-c)(c-a)(a-b)x$.

10. $(yz+zx-xy)(x-y)+(zx+xy-yz)(y-z)+(xy+yz-zx)(z-x)=2(y-z)(z-x)(x-y)$.

11. $a(a+1)(a+2)(a+3)=(a^2+3a+1)^2-1$.

12. $(x+y)^3-(x-y)^3-8y^3=3(x+y)^2(x-y)-3(x-y)^2(x+y)$.

13. $(x+y)(x-y)^3=x^3(x-2y)-y^3(y-2x)$.

14. $(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)+(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$.

15. $(a+1)^2+(b-1)^2+(a+b)^2=2(a+1)(a+b)+2(b-1)(a+b)-2(a+1)(b-1)$.

16. $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)$
$-(a-b)(b-c)=\frac{1}{2}\{(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2$
$+(c+a-2b)^2\}.$

17. $2(x^4+y^4+z^4)+(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$
$=(x^2+y^2+z^2)^2.$

18. $(a+b+c)^3=(a+1)^3+(b-1)^3+c^3+3(b+c-1)$
$(c+a+1)(a+b).$

19. $(a+b+1)(b+c)(c+a-1)+a(b+1)(c-1)=(a+b+c)$
$\{a(b+1)+(b+1)(c-1)+a(c-1)\}.$

20. $\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$
$-(b-1)(c-1)-(c-1)(a-1)-(a-1)(b-1).$

——:o:——

बारहवाँ अध्याय

सरल गुणनखण्ड (Factor) और तादात्म्य (Identity)

154. यदि कोई व्यंजक दो या दो से अधिक व्यंजकों के गुणनफल के समान हो, तो उन शेषोक्त व्यंजकों को पहले व्यंजक के गुणनखण्ड या उत्पादक कहते हैं। गुणनखण्डीकरण (Factorization) बीजगणित की एक अत्यन्त आवश्यक क्रिया है।

155 निरीक्षण द्वारा गुणनखण्ड निकालना।

किसी व्यंजक या राशिमाला के विभिन्न पदों में एक साधारण गुणनखंड रहने पर वही राशि समस्त व्यंजक या राशिमाला का साधारण गुणनखण्ड होगा। गुणनखण्ड एक पद (Monomial) या बहुपद (Polynomial) हो सकता है।

उदाहरण 1. $abx-cxy$ के गुणनखण्ड निकालो ।

यहाँ पर दोनों पदों में x मौजूद है । अतः व्यंजक $=x(ab-cy)$. अतः x और $ab-cy$ व्यंजक के दो गुणनखंड हैं ।

उदाहरण 2. $pq^2x+abq^2-mq^2n$ के गुणनखंड निकालो ।

$$\text{व्यंजक} = q^2(px+ab-mn).$$

उदाहरण 3. $a^2(b+c)+b^2(b+c)+c^2(b+c)$ के गुणनखंड निकालो ।

$b+c$ राशि समस्त पदों में वर्त्तमान है;

इसलिए व्यंजक $=(b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

प्रश्नावली 47.

गुणनखंड निकालो :—

1. $am-bm$. 2. x^2y+xy^2. 3. $pqr-pq^2s$.
4. $a^2xy+ax^2y-axy^2$. 5. $2m^3n^2-4m^2n^2+6m^2n^3$.
6. $a^2(x+y)+b^2(x+y)+c^2(x+y)$.
7. $p^2(2a+3c)+3a(2a+3c)+2b(2a+3c)$.
8. $(a^2-bc)x^2+(a^2-bc)y^2-(a^2-bc)z^2$.
9. $a^3(x-y)+b^3(x-y)+2xy(x-y)$.
10. $a^2p-a^2q+abp-abq+b^2p-b^2q$.

सरल करो :

11. $x(a+b-c)+x(a-b+c)+x(b+c-a)$.
12. $abc(y-z)+abc(z-x)+abc(x-y)$.
13. $x^2(b^2+c^2)+x^2(c^2+a^2)+x^2(a^2+b^2)$.

156. सूत्र $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ और $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ की सहायता से गुणनखंड निकालना ।

किसी व्यंजक के परस्पर समान दो द्विपद गुणनखंड होने पर वे दोनों गुणनखंड उपर्युक्त दो सूत्रों की सहायता से निकाले जाते हैं ।

उदाहरण 1. $4a^2+12ab+9b^2$ के गुणनखंड निकालो ।

दिया हुआ व्यंजक $=(2a)^2+2(2a)(3b)+(3b)^2$

$=(2a+3b)^2.$

उदाहरण 2. $9x^2-30xy+25y^2$ के गुणनखंड निकालो ।

दिया हुआ व्यंजक $=(3x)^2-2(3x)(5y)+(5y)^2$

$=(3x-5y)^2.$

प्रश्नावली 48.

गुणनखंड निकालो :—

1. $a^2+2a+1.$
2. $x^2-100x+2500.$
3. $m^2-4m+4.$
4. $16p^2-24pq+9q^2.$
5. $25a^2+70ab+49b^2.$
6. $16m^2-40m+25.$
7. $49x^2-2100x+22500.$

157. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ की सहायता से गुणनखंड निकालना ।

$$a^2-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=(a+b)(a-b).$$

उदाहरण । $25x^2-9y^2$ के गुणनखंड निकालो ।

व्यंजक $=(5x)^2-(3y)^2=(5x+3y)(5x-3y).$

प्रश्नावली 49.

गुणनखंड निकालो :—

1. $4a^2-9b^2.$
2. $p^2-1.$
3. $m^4-1.$
4. $a^2b^2-x^2y^2.$
5. $25-x^2.$
6. $81-9z^2.$
7. $625x^2-y^2.$
8. $36a^3-64ax^2.$
9. $54x^3-150xy^2.$
10. $18p^6q-2p^2q^5.$
11. $(a+2)^2-(a+1)^2.$
12. $(3a-2)^2-(2a-1)^2.$
13. $(4x-7)^2-(3x+5)^2.$
14. $(b+c)^2-(b-c)^2.$
15. $(x+2y+3z)^2-(x-2y+3z)^2.$

158. a^2-b^2 के रूप में दिये हुए व्यंजकों का गुणनखंड निकालना।

a^2-b^2 के रूप में रूपान्तर करके अनेक व्यंजकों के गुणनखंड निकाले जाते हैं।

उदाहरण 1. $4a^4+3a^2+1$ के गुणनखंड निकालो।

व्यंजक $=4a^4+4a^2+1-a^2$

$=(2a^2+1)^2-a^2$ [इनका रूप a^2-b^2 के अनुसार।]

$=(2a^2+a+1)(2a^2-a+1)$.

उदाहरण 2. $9a^2-b^2-4bc-4c^2$ के गुणनखंड निकालो।

व्यंजक $=9a^2-(b^2+4bc+4c^2)$

$=9a^2-(b+2c)^2$

$=\{3a+(b+2c)\}\{3a-(b+2c)\}$

$=(3a+b+2c)(3a-b-2c)$.

उदाहरण 3. $a^4+b^4-14a^2b^2$ के गुणनखंड निकालो।

व्यंजक $=a^4+2a^2b^2+b^4-16a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(4ab)^2$

$(a^2+4ab+b^2)(a^2-4ab+b^2)$.

उदाहरण 4. x^4+4y^4 के गुणनखंड निकालो।

व्यंजक $=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

उदाहरण 5. $a^2+c^2-b^2-d^2-2ac-2bd$ के गुणनखंड निकालो।

व्यंजक $(a^2+c^2-2ac)-(b^2+d^2+2bd)$

$=(a-c)^2-(b+d)^2$

$=(a+b-c+d)(a-b-c-d)$.

उदाहरण 6. $x^2+12yz-4y^2-9z^2$ के गुणनखंड निकालो।

व्यंजक $=x^2-(4y^2+9z^2-12yz)$

$=x^2-(2y-3z)^2$

$=(x+2y-3z)(x-2y+3z)$.

प्रश्नावली 50.

गुणनखंड निकालोः—

1. a^4+a^2+1.
2. a^4-7a^2+1.
3. a^4+4b^4.
4. x^4+64.
5. $49x^4-44x^2y^4+4y^8$.
6. $64a^4+1$.
7. $9a^4-3a^2+1$.
8. x^4-41x^2+16.
9. $4m^4-21m^2n^2+n^4$.
10. $9p^4-52p^2+4$.
11. $x^4+x^2y^2+y^4$.
12. $x^8+x^4y^4+y^8$.
13. $16a^4-49a^2b^2+9b^4$.
14. $256x^4+2500y^4$.
15. $9m^4-51m^2+25$.
16. $16x^4-60x^2+9$.
17. $4a^4-48a^2x^2+9x^4$.
18. $36x^4-112x^2a^2+a^4$.
19. $a^2-b^2-c^2-2bc$.
20. $b^2+4c^2-a^2+4bc$.
21. $9a^2-16b^2+c^2+6ac$.
22. $4x^2+y^2-9z^2+4xy$.
23. $p^2+9q^2-81r^2-6pq$.
24. $x^2-4xy+4y^2-1$.
25. $1-m^2+6mn-9n^2$.
26. $4y^2-9z^2-4xy-6xz$.
27. $2ab-2ac+b^2-c^2$.
28. $a^2+b^2-x^2-y^2+2ab+2xy$.
29. $12(ab-mn)+4(m^2-b^2)+9(n^2-a^2)$.
30. $4(x^2-1)+20xy+25y^2-9a^2-12a$.
31. $2(xy+az)+x^2+y^2-z^2-a^2$.
32. $60(ax+by)+4(25a^2-9b^2)+9x^2-25y^2$.

159. x^2+px+q के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालना ।

यदि $x+a$ और $x+b$ इस व्यंजक के गुणनखंड हों, तो इनका गुणनफल x^2+px+q के समान होगा ।

किन्तु $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

अतः $a+b=p$ और $ab=q$.

अतएव देखा जाता है x^2+px+q के गुणनखंड निकालने पर ऐसी दो राशियाँ आती हैं जिनका योग p और गुणनफल q होगा ।

उदाहरण 1. $x^2+9x+20$ के गुणनखंड निकालो।

यहाँ ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात करना है जिनका योगफल 9 और गुणनफल 20 हो। 2, 10, 4, 5; 20, 1 इनमें से प्रत्येक दो संख्याएँ 20 के गुणनखंड हैं जिनमें से 4, 5 संख्याओं का योग 9 है। अतः अभीष्ट दोनों गुणनखंड $x+4$ और $x+5$ हैं।

4 और 5 दो गुणनखंड मन ही में निकालकर अनेक समय निम्न रूप में इस क्रिया को करते हैं:—

$$\begin{aligned} x^2+9x+20 &= x^2+5x+4x+20 \\ &= x(x+5)+4(x+5) \\ &= (x+5)(x+4). \end{aligned}$$

उदाहरण 2. x^2-x-20 के गुणनखंड निकालो।

यहाँ -20 के दो ऐसे गुणनखंड निकालना है जिनका बैजिक योग -1 हो। $1, -20$; $-1, 20$, $2, -10$, $-2, 10$, $4, -5$; $-4, 5$ ये सब -20 के गुणनखंड हैं किन्तु इनमें से 4 और -5 का योगफल -1 है। अतएव अभीष्ट गुणनखंड $x+4$ और $x-5$ हैं।

इसे निम्न प्रक्रिया द्वारा दिखाया जा सकता है:—

$$\begin{aligned} x^2-x-20 &= x^2-5x+4x-20 \\ &= x(x-5)+4(x-5) \\ &= (x-5)(x+4). \end{aligned}$$

उदाहरण 3. $x^2-9x+20$ के गुणनखंड निकालो।

20 के गुणनखंडों में -4 और -5 का योगफल -9 है;

अतः
$$\begin{aligned} x^2-9x+20 &= x^2-5x-4x+20 \\ &= x(x-5)-4(x-5) \\ &= (x-5)(x-4). \end{aligned}$$

उदाहरण 4. $x^2+xy-20y^2$ के गुणनखंड निकालो।

यहाँ पर गुणनखंड $(x+ay)(x+by)$ के रूप के होंगे। उक्त दोनों गुणनखंडों में a और b का यह रूप होगा कि $a+b=1$ और $ab=20$ हो। 5 और -4 इनका उपर्युक्त मान है।

अतः
$$\begin{aligned} x^2+xy-20y^2 &= x^2+5xy-4xy-20y^2 \\ &= x(x+5y)-4y(x+5y) \\ &= (x+5y)(x-4y). \end{aligned}$$

उदाहरण 5. $(x+2y)^2-12(x+2y)+20$ के गुणनखंड निकालो।

$(x+2y)$ के स्थान में a लिखने पर व्यंजक x^2+px+q के रूप का हुआ; तब व्यंजक $=a^2-12a+20$.

अब $(x+2y)^2-12(x+2y)+20$

$=a^2-12a+20$ [$x+2y$ के स्थान पर a लिखने से]

$=a^2-10a-2a+20$

$=a(a-10)-2(a-10)$

$=(a-10)(a-2)$

$=(x+2y-10)(x+2y-2)$, क्योंकि $a=x+2y$.

उदाहरण 6. $(3x-y)^2+8(3x-y)(2x+y)-20(2x+y)^2$ के गुणनखंड निकालो।

मानलो, $3x-y=a$ और $2x+y=b$; तो

दिया हुआ व्यंजक $=a^2+8ab-20b^2$

$=a^2+10ab-2ab-20b^2$

$=a(a+10b)-2b(a+10b)$

$=(a+10b)(a-2b)$

$=(3x-y+20x+10y)(3x-y-4x-2y)$

$=(23x+9y)(-x-3y)$

$=-(x+3y)(23x+9y)$.

160. px^2+qx+r के रूप के व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालना।

यदि व्यंजकों के $ax+b$ और $cx+d$ दो गुणनखंड हों, तो $(ax+b)(cx+d)=px^2+qx+r$.

अर्थात् $acx^2+(bc+ad)x+bd=px^2+qx+r$.

$ac=p$, $bd=r$ और $bc+ad=q$. $ac=p$ और $bd=r$ होने पर $pr=abcd=(bc)\times(ad)$. अतः देखा जाता है कि p और r के गुणनफल को ऐसे दो अंशों bc और ad में बाँट देते हैं कि उनका योगफल q होता है।

इसी प्रकार, px^2+qx+r के गुणनफल निकालने पर पहले pr के ऐसे दो गुणनखंड निकालते हैं जिनका योगफल q हो; फिर अनु० 159 में बतलाई हुई प्रक्रिया करते हैं।

उदाहरण 1. $2x^2+13x+20$ के गुणनखंड निकालो।

यहाँ $2\times 20=40$; 40 के ऐसे दो गुणनखंड निकालो जिनका योग 13 हो। ऐसे दो गुणनखंड 5 और 8 हैं।

$$\begin{aligned}\therefore\quad 2x^2+13x+20&=2x^2+5x+8x+20\\&=x(2x+5)+4(2x+5)\\&=(2x+5)(x+4).\end{aligned}$$

उदाहरण 2. $6a^2+13ab-15b^2$ के गुणनखंड निकालो।

$$\begin{aligned}\text{दी हुई राशि}&=6a^2+18ab-5ab-15b^2 &\quad 6\times(-15)&=-90.\\&=6a(a+3b)-5b(a+3b) & -90&=18\times(-5).\\&=(a+3b)(6a-5b). & 18+(-5)&=13.\end{aligned}$$

उदाहरण 3. $3(x+2y)^2+11(x+2y)(2x+y)-20(2x+y)^2$ के गुणनखंड निकालो।

मानलो, $x+2y=a$ और $2x+y=b$.

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक

$$\begin{aligned}&=3a^2+11ab-20b^2 &\quad \left\{\begin{array}{l}3\times(-20)=-60.\\-60=15\times(-4).\\15+(-4)=11.\end{array}\right.\\&=3a^2+15ab-4ab-20b^2\\&=3a(a+5b)-4b(a+5b)\\&=(a+5b)(3a-4b)\\&=(x+2y+10x+5y)(3x+6y-8x-4y)\\&=(11x+7y)(-5x+2y).\end{aligned}$$

प्रश्नावली 51.

गुणनखंड निकालो:—

1. x^2+3x+2.	2. x^2+5x+6.	3. $a^2+7a+12$.
4. $a^2+9a+20$.	5. x^2+x-2.	6. x^2-5x+6.
7. $x^2-7x+12$.	8. a^2+a-20.	9. $a^2-8a+15$.
10. $a^2+4a-21$.	11. $x^2-3x-28$.	12. $a^2-9a-10$.
13. $p^2-10p+16$.	14. $m^2-3m-10$.	15. $m^2+11m+24$.

16. $m^2-8m+12$. 17. $x^2+2x-24$. 18. $x^2-17x+70$.

19. y^2-y-6. 20. $y^2-2y-63$. 21. $a^2-15a+56$.

22. $a^2+14a+33$. 23. $a^2+10a+9$. 24. $a^2-2a-24$.

25. $p^2+13p+30$. 26. $p^2+5p-14$. 27. $n^2-10n-200$.

28. $n^2+12n+11$. 29. $z^2-3z-108$. 30. $z^2-28z-60$.

31. $2x^2+5x+2$. 32. $4x^2+8x+3$. 33. $6x^2+13x+6$.

34. $6x^2-7x+2$. 35. $12x^2+5x-2$.

36. $3x^2-x-4$. 37. $12x^2-16x-3$.

38. $28x^2-41x+15$. 39. $6x^2+41x+63$.

40. $8x^2+10x-63$. 41. $10x^2+101x+10$.

42. $5a^2+26a+5$. 43. $15a^2+34a+15$.

44. $14a^2-53a+14$. 45. $30a^2+23a-14$.

46. $12m^2+11m-56$. 47. $15m^2+41m+14$.

48. $15m^2-86m+120$. 49. $8p^2-6p-27$.

50. $21p^2+32p-5$. 51. $2a^2+3ab+b^2$.

52. $6a^2+13ab+6b^2$. 53. $12x^2+23xy+10y^2$.

54. $30x^2+77xy+12y^2$. 55. $6x^2+11xy-7y^2$.

56. $12m^2-25mn+12n^2$. 57. $2m^2-27mn+70n^2$.

58. $8a^2+2ax-21x^2$. 59. $12a^2-8ax-15x^2$.

60. $6a^2+17ax-45x^2$. 61. $4a^2-17ab-21b^2$.

62. $6m^2+11am-35a^2$. 63. $20a^2-43an+21n^2$.

64. $6p^2-17pq-10q^2$. 65. $7p^2+48pq-7q^2$.

66. $3b^2+8bc-35c^2$. 67. $6m^2-11mx+4x^2$.

68. $15x^2+28ax+12a^2$. 69. a^4+7a^2+12.

70. $12x^4-7x^2-10$. 71. $2a^6-a^3-10$.

72. $a^8+a^4x-6x^2$. 73. $2a^6-a^3x^2-6x^4$.

74. $2x^{10}+11x^5-21$. 75. $2a^6-a^3x^3-10x^6$.

76. $(2a-b)^2+14(2a-b)+40$.

77. $(3a-2x)^2-(3a-2x)-42.$

78. $(2x-1)^2-3(2x-1)-54.$

79. $6(x+2y)^2-11(x+2y)-35.$

80. $12(3x-4a)^2+25(3x-4a)-7.$

81. $(a+4b)^2+14(a+4b)(a-b)+45(a-b)^2.$

82. $(x-2y)^2-2(x-2y)(3x+y)-48(3x+y)^2.$

83. $6(3x-5y)^2+13(3x-5y)(2x-7y)+6(2x-7y)^2.$

161. दो वर्गों के अन्तर के रूप में दिखाकर भी x^2+px+q अथवा px^2+qx+r आकारवाले व्यंजकों के गुणनखण्ड निकाले जाते हैं।

उदाहरण 1. x^2-4x+3 के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^2-4x+4)-1$

$=(x-2)^2-(1)^2$

$=(x-2+1)(x-2-1)$

$=(x-1)(x-3).$

उदाहरण 2. x^2-5x+6 के गुणनखण्ड निकालो।

x^2-5x के साथ $(\frac{5}{2})^2$ अर्थात् x के गुणक के आधे के वर्ग का योग करने से एक पूर्ण वर्ग (Perfect Square) प्राप्त होता है।

व्यंजक $=x^2-5x+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+6$

$=(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$

$=(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2})$

$=(x-2)(x-3).$

उदाहरण 3. $2x^2+5x-3$ के गुणनखण्ड निकालो।

व्यंजक $=2(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2})$

$=2\{x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2-(\frac{5}{4})^2-\frac{3}{2}\}$

$=2\{(x+\frac{5}{4})^2-(\frac{7}{4})^2\}$

$=2(x+\frac{5}{4}+\frac{7}{4})(x+\frac{5}{4}-\frac{7}{4})$

$=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$

$=(x+3)\times 2(x-\frac{1}{2})=(x+3)(2x-1),$

प्रश्नावली 52.

दो वर्गों के अन्तर के रूप में दिखाकर निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालोः—

1. $x^2+12x+35$. 2. $x^2-6x-27$. 3. $x^2-10x+21$.
4. $a^2-7a-18$. 5. a^2+a-42. 6. $a^2-3a-10$.
7. $a^2-9a-10$ 8. $a^2-3a-40$. 9. $a^2-5a-66$.
10. $m^2-2m-35$. 11. $m^2-21m+20$.
12. $m^2-12m+32$. 13. $p^2-12p+27$.
14. $p^2-4p-21$. 15 $p^2+3p-40$.
16. x^4-5x^2+6. 17. a^4-5a^2-14.
18. a^6+3a^3-4 19. $x^2-3xy-10y^2$.
20. $x^2+4xy-21y^2$. 21. $x^2-xy-20y^2$.
22. $a^2+6ab+8b^2$. 23. $a^2-9ab+8b^2$.
24. $a^2-ab-30b^2$. 25. $m^2+2mn-15n^2$.
26. $m^2-8mn-20n^2$. 27. $m^2-10mn+24n^2$.
28. $6x^2+x-2$. 29. $12x^2+13x-4$.
30. $8x^2-2x-21$ 31. $15x^2-34x+15$.
32. $8x^2-34x+21$. 33. $6x^2-35x+50$.
34. $6a^2-ax-35x^2$. 35. $6a^2-23ax+15x^2$.
36. $2a^2-19ax+15x^2$. 37. $5m^2-28mn+32n^2$
38. $4m^2-19mn-30n^2$. 39. $8x^4+2a^2x^2-15a^4$.
40. $12a^6+16a^3b^3-3b^6$

162. सूत्र $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ या सूत्र $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ की सहायता से गुणनखण्ड निकालना ।

a^3+b^3 और a^3-b^3 के गुणनखण्ड नीचे लिखे उपाय से निकाले जाते हैं:—

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3 \\ &= a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

और $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$
$$=a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

जब कोई व्यंजक दो राशियों के घन के योगफल या अन्तर के समान हो, तो ऊपर दिये हुए सूत्र की सहायता से उसके गुणनखण्ड निकाले जा सकते हैं।

उदाहरण 1. $27a^3+x^3$ के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(3a)^3+x^3$
$$=(3a+x)(9a^2-3ax+x^2).$$

उदाहरण 2. x^6-y^6 के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^2)^3-(y^2)^3$
$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$$
$$=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2-x^2y^2\}$$
$$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

प्रश्नावली 53.

गुणनखण्ड निकालोः—

1. p^3-64q^3. 2. $27a^3-(a+1)^3$. 3 $125x^3-1$.
4. $27a^9+x^{12}$. 5. x^6-64. 6. $a^{12}-b^{12}$.
7. xy^4-yx^4. 8. $343x^3+8$.
9. $(a^2-3b^2)^3+8a^3b^3$. 10. $(a^2+2b^2)^3-27a^3b^3$.

163. तादात्म्य (Identity).

किसी समीकरण के अक्षरों के विभिन्न मानों के होते हुए भी यदि उस समीकरण के दोनों पक्षों की समानता वैसी ही बनी रहे, तो उस समीकरण को तादात्म्य कहते हैं (अनु० 77)। छठवें, ग्यारहवें और इस अध्याय के सारे सूत्र तादात्म्य हैं। इस अध्याय में तादात्म्य-सम्बन्धी कुछ सरल उदाहरण दिये जायँगे। अठारहवें अध्याय में कुछ और भी उदाहरण दिये जायँगे। प्रत्येक अवस्था में समान तादात्म्य को '≡' चिह्न द्वारा दिखलाते हैं।

164. संक्षेप करना (Reduction) और रूप बदलना (Transformation).

नियम 1. किसी तादात्म्य के दोनों पक्षों में मिश्र राशियाँ होने पर दोनों पक्षों को संक्षिप्त रूप में बदल सकते हैं।

नियम 2. जब एक पक्ष में ज़रूरत से ज़्यादा जटिल मिश्र राशि होती है, तो पहले बतलाये गये सूत्रों और रूप बदलने की क्रिया की सहायता से उस जटिलतर पक्ष को दूसरे पक्ष के आकार में बदल दिया जाता है।

टीका—नये विद्यार्थी को पहले नियम के अनुसार क्रिया करने में सरलता पड़ती है।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि,

$$(a-2b)^2+(3b-a)^2+2(a-2b)(3b-a)\equiv b^2.$$

बायाँ पक्ष $=\{(a-2b)+(3b-a)\}^2$ ... अनु० 156.

$=(a-2b+3b-a)^2$

$=b^2.$

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि,

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2\equiv(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

बायाँ पक्ष $=(a^2x^2+b^2y^2+2abxy)+(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)$

$=(a^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+b^2y^2)$

$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$

$=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि,

$$(a-b)^3+(a^2-b^2)(a+b)-2(a-b)(a^2+b^2)\equiv 0.$$

बायाँ पक्ष $=(a-b)^3+(a-b)(a+b)(a+b)-2(a-b)(a^2+b^2)$

$=(a-b)\{(a-b)^2+(a+b)^2-2(a^2+b^2)\}$

$=(a-b)\{a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2\}$

$=(a-b)\times 0=0.$

प्रश्नावली 54.

सिद्ध करो कि,

1. $a^2(x^2+2a^2)-2(a-b)(x^2+2a^2)-a(a-2)(x^2+2a^2)$
$$\equiv 2b(x^2+2a^2).$$

2. $(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)\equiv 0.$

3. $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-2(a^2+b^2+c^2)$
$$\equiv 2(ab+bc+ca).$$

4. $(a+x)(a^2-ax+x^2)+(a-x)(a^2+ax+x^2)\equiv 2a^3.$

5. $(a+x)^2+(a^2-x^2)-2a(a+x)\equiv 0.$

6. $(2a-3m)^3-4a(2a-3m)^2+4a^2(2a-3m)\equiv 9m^2(2a-3m)$

7. $(a+b)(a+c)-a^2\equiv(b+c)(b+a)-b^2\equiv(c+a)(c+b)-c^2.$

8. $(b+c)(b+c-a)+(c+a)(c+a-b)+(a+b)(a+b-c)$
$$\equiv 2(a^2+b^2+c^2).$$

9. $(x+a)(x^2+a^2)(x^3+a^3)(x-a)^2$
$$\equiv(x^2-a^2)(x^2+a^2-ax)(x^4-a^4).$$

10. $(x-2y)^2+3(y-x)(x-2y)+2(y-x)^2\equiv xy.$

11. $2(x-y)^2+(x^2-y^2)-(x+y)^2\equiv 2x(x-3y).$

12. $(x+y)^3+(x-y)^3\equiv 2x\{(x+y)^2-(x^2-y^2)+(x-y)^2\}.$

13. $(a+b)^3-(a-b)^3\equiv 2b\{(a+b)^2+(a^2-b^2)+(a-b)^2\}.$

14. $(a+1)^3+(b-1)^3\equiv(a+b)\{(a+1)^2+(b-1)^2$
$$-(a+1)(b-1)\}.$$

15. $(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)-(a+b+c)^2$
$$\equiv bc+ca+ab.$$

16. $(a+b-c)(b+c)+(b+c-a)(c+a)+(c+a-b)(a+b)$
$$\equiv 2(bc+ca+ab).$$

17. $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$
$$\equiv 2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b).$$

18. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$\qquad\qquad +(b-c)(c-a)(a-b)\equiv 0.$

19. $(x+y)^2(y+z-x)(z+x-y)$
$\qquad\qquad +(x-y)^2(x+y+z)(x+y-z)\equiv 4xyz^2.$

20. $a(b-c)(1+bc)+b(c-a)(1+ca)+c(a-b)(1+ab)\equiv 0.$

21. $x(x+2y)^3-y(y+2x)^3\equiv (x+y)(x-y)^3.$

22. $(x-a)(x-b)(a-b)+(x-b)(x-c)(b-c)$
$\qquad\qquad +(x-c)(x-a)(c-a)\equiv (a-b)(a-c)(b-c).$

23. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$
$\qquad\qquad \equiv (y+z)(z+x)(x+y).$

165. कल्पित तादात्म्य (Conditional Identity).

जिन सब तादात्म्यों के दोनों पक्षों की समानता किसी एक या एकाधिक शर्तों पर निर्भर करती है उनको कल्पित तादात्म्य कहते हैं । मन में यह सोच लेना होता है कि यदि दी हुई शर्त सिद्ध होगई तो सब तादात्म्य सत्य होंगे अन्यथा नहीं ।

उदाहरण 1. यदि $bx=ay$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2.$$

यहाँ $(x^2+y^2)(a^2+b^2)$ सर्वदा $(ax+by)^2$ के समान नहीं है ।

संकेतों के जिन सारे मानों के साथ $bx=ay$ होता है, केवल उन्हीं सारे मानों के साथ वह परस्पर समान हुआ करते हैं ।

बायाँ पक्ष $=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$=a^2x^2+b^2y^2+2b^2x^2 \qquad [\because\ b^2x^2=a^2y^2.]$

$=a^2x^2+b^2y^2+2bx.bx$

$=a^2x^2+b^2y^2+2ay.bx \qquad [\because\ bx=ay.]$

$=a^2x^2+b^2y^2+2ax.by=(ax+by)^2.$

उदाहरण 2. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

$\because \quad a+b+c=0, \quad \therefore \quad a+b=-c;$

दोनों पक्षों का घन करने पर, $(a+b)^3=-c^3;$

अथवा $a^3+b^3+3ab\,(a+b)=-c^3;$

पक्षान्तर करने पर, $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$
$$=-3ab(-c)=3abc.$$

उदाहरण 3. यदि $ab+bc+ca=0$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2.$$

बायाँ पक्ष $=(a+b+c)^2$
$$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2.$$

प्रश्नावली 55.

1. यदि $x+y=z$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$x^2+y^2+z^2=2yz+2zx-2xy.$$

2. यदि $x+y+z=1$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(x+yz)(y+z)=(y+zx)(z+x)=(z+xy)(x+y).$$

3. यदि $xy+x+y=x^2$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(1+x)(1+y)=1+x^2.$$

4. $a-b=2c$ हो, तो दिखाओ कि $(b-c)^2=a^2-6ac+9c^2$.

5. $x+y=2$ हो, तो दिखाओ कि $x^3+y^3+6xy=8$.

6. यदि $x+z=2y$ और $zx=y^2$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$$(x+y)(y+z)(z+x)=9y^3-xyz.$$

7. यदि $x+z=2y$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2(x-y)^3=2(y-z)^3.$$

8. यदि $x=y$ हो, तो प्रमाणित करो कि
$$x^2+y^2+4z^2+2xy+8zx=4(x+z)^2.$$

9. यदि $xy+yz+zx=1$ हो, तो प्रमाणित करो कि—

(i) $1+x^2=(x+y)(x+z)$, $1+y^2=(y+z)(y+x)$ और $1+z^2=(z+x)(z+y)$;

(ii) $xyz(x+y)(y+z)(z+x)=(1-xy)(1-yz)(1-zx)$.

यदि $a+b+c=0$ हो, तो प्रमाणित करो कि—

10. $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab=-(ab+bc+ca)$
$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

11. $a(a+b)(a+c)=b(b+c)(b+a)=c(c+a)(c+b)=abc$.

12. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$.

13. $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$.

14. $a^2-b^2-c^2=2bc$, $b^2-c^2-a^2=2ca$ और $c^2-a^2-b^2=2ab$.

15. $a(b^2+c^2-a^2)=b(c^2+a^2-b^2)=c(a^2+b^2-c^2)=-2abc$.

16. $(a-b)(a-c)=2a^2+bc$,
$(b-c)(b-a)=2b^2+ca$,
$(c-a)(c-b)=2c^2+ab$.

17. $(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=0$.

18. $(a+b)^3+c^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2=0$.

19. $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$.

20. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-(a^3+b^3+c^3)$.

21. $a^2(a^2-b^2-c^2)+b^2(b^2-c^2-a^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=0$.

22. $a+b=1$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^2+b^2=a^3+b^3+ab$.

23. $a+b+c+d=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $(a+b)^3+(c+d)^3=0$.

24. $x^2+y^2=xy$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3=0$.

25. $a^2+b^2=ab-(a+b+1)$ हो, तो सिद्ध करो कि
$(a+1)^3+(b+1)^3=0$.

26. $a+b+c+d=0$ हो, तो सिद्ध करो कि
$(a+b)^2+(c+d)^2+2(a+b)(c+d)=0$.

27. सिद्ध करो कि $(2a-3b)(2a+3b)+(3b+4c)(3b-4c)$
$$+4(2c+a)(2c-a)=0.$$

28. $a+b-c=1$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(a+b)^3-c^3=(c+1)^2+c(a+b+c).$$

29. $a+b+c=1$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$a^3+(b+c)^3=(a-1)^2-a(b+c-a).$$

30. यदि $x^2+y^2=1$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2=1.$$

31. यदि $ab+bc+ca=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

(i) $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=-2abc(a+b+c)$;

(ii) $(b^2-ca)(c^2-ab)+(c^2-ab)(a^2-bc)$
$$+(a^2-bc)(b^2-ca)=0.$$

32. $x+y+z=0$ होने पर सिद्ध करो कि—

(i) $(y+z)(y-z)+x(x+2y)=0$;

(ii) $(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2+(x^2-y^2)^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^2$.

33. यदि a, b, c इस प्रकार की तीन असमान राशियाँ हों कि $a-\dfrac{bc}{a}=b-\dfrac{ac}{b}$, उस अवस्था में सिद्ध करो कि $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$.

34. यदि $x=b+c$, $y=c+a$ और $z=a+b$ हो, तो $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ को a, b और c द्वारा प्रकट करो ।

35. सिद्ध करो कि
$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\equiv 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

36. सिद्ध करो कि $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$
$$\equiv 2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

37. $x=b+c$, $y=c-a$ और $z=a-b$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=4b^2$.

38. $a+b=x$ और $a-b=y$ होने पर निम्नलिखित राशियों को x और y के द्वारा प्रकट करो:—

(i) a^2+b^2. (ii) a^3+b^3. (iii) a^2-b^2. (iv) ab.

39. यदि $a^2+b^2+c^2=1$ और $x^2+y^2+z^2=1$ हो, तो सिद्ध करो कि $(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2+(ax+by+cz)^2=1$

यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि—

40. $(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3$.

41. $2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)$
$$=2s^2-(a^2+b^2+c^2).$$

42. यदि $x=a+d$, $y=b+d$ और $z=c+d$ हो, तो सिद्ध करो कि
$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

—:o:—

तेरहवाँ अध्याय

महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) और लघुतम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

166. यदि दो या दो से अधिक राशियाँ किसी एक राशि द्वारा पूर्णतया विभाजित हों, तो शेषोक्त राशि को पूर्वोक्त दो या दो से अधिक राशियों का साधारण गुणनखण्ड (Common Factor) कहते हैं। जैसे ab, ax और a^2b इन तीन राशियों का साधारण गुणनखण्ड a है।

167. महत्तम समापवर्तक ।

दो या दो से अधिक राशियों के जितने भी साधारण गुणनखण्ड हो सकते हैं उनमें से सर्वोच्च घात वाली राशि को उन सबका महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) या संक्षेप में म० स० (H. C. F.) कहते हैं।

जैसे, a^2b^3, a^2b^4, a^4b^3 और a^5b^2 इन सब राशियों का महत्तम समापवर्त्तक a^2b^2 है । $a, b, a^2\ b^2$ आदि इनके साधारण गुणनखण्ड हैं । महत्तम समापवर्त्तक का संख्यात्मक मान (Numerical Value) अन्यान्य साधारण गुणनखण्डों से बड़ा ही रहे यह कोई ज़रूरी बात नहीं है । उदाहरणार्थ यदि $a=1, b=\frac{1}{2}$ हो, तो $a^2b^2<a$ अर्थात् म० स० का संख्यात्मक मान अन्य एक साधारण गुणनखण्ड के मान से कम है ।

168. गुणनखण्डीकरण द्वारा म० स० निकालना ।

दो या दो से अधिक राशियों का म० स० निकालते समय पहले राशियों के गुणनखण्ड निकाल लेना होता है । तत्पश्चात् गुणनखण्डों में से जो उन राशियों में साधारण (Common) हों उनका गुणनफल निकाल लेना होता है । यही म० स० निकालने की सबसे सरल रीति है ।

टीका—जिन गुणनखण्डों के और कोई दूसरे गुणनखण्ड निकाले नहीं जा सकते उनको अभाज्य गुणनखण्ड (Elementary Factor) कहते हैं ।

उदाहरण 1. $2a^4b^3$, $4a^4b^5$ $6a^3b^4$, और $8a^5b^5$ राशियों का म० स० निकालो ।

2, a और b ये तीन अभाज्य गुणनखण्ड हैं ।

इन तीनों राशियों के सर्वोच्च घात 2, a^3 और b^3 द्वारा राशियों में से हर एक बाँटी जा सकती है । इसलिए निर्णेय म० स० $=2a^3b^3$.

उदाहरण 2. a^3+b^3, a^2-b^2 और $(a+b)^2$ का म० स० निकालो ।

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$(a+b)^2=(a+b)(a+b);$$
$\therefore$ निर्णेय म० स० $=a+b$

उदाहरण 3. $4x^2+8xy+3y^2$, $4x^2-9y^2$ और $2x^2+7xy+6y^2$ का म० स० निकालो ।

$$4x^2+8xy+3y^2=(2x+3y)(2x+y),$$
$$4x^2-9y^2=(2x+3y)(2x-3y),$$
$$2x^2+7xy+6y^2=(2x+3y)(x+2y).$$
$\therefore$ निर्णेय म० स० $=2x+3y$.

प्रश्नावली 56.

निम्नलिखित राशियों का म० स० निकालोः—

1. a^2, ab और a^3.
2. ax, a^2x^2 और a^3x^3.
3. m^2n, mn^2 और m^2n^2.
4. $12a^3x^3$, $16a^2x^5$ और $20a^4x^3$.
5. $108x^2y^3z^5$ और $72x^3y^2z^3$.
6. $24a^5b^3c^6d^2$ और $12a^2b^3c^3d^7$.
7. $40a^3m^2n^3x$, $32a^2m^3p^2y$ और $8a^2m^2n^3p^3$.
8. $18x^2y^3z^4p^5$, $27x^4y^4a^3p^2$ और $54x^3y^3a^3$.
9. $14a^3m^3n^4x^3$, $28m^2n^3x^2p^4$, $56n^2x^3p^3q^4$ और $84p^4q^5a^4m^2n^4x^4$.
10. $3x^2$ और $2x(x+y)$.
11. $x-y$ और x^2-y^2.
12. $2x(x+y)$ और $4(x+y)^2$.
13. p^2+q^2 और p^4-q^4.
14. $4mn(m^2-n^2)$ और $m^2n(m+n)$.
15. a^2+1 और a^6+1.
16. $3a(x^2+2)$ और $4ab(x^4-4)$.
17. $4(a^2-a+1)$ और $2(a^3+1)$.
18. $a^2b(a^4-b^4)$ और $ab^2(a^3-b^3)$.
19. $x^4+x^2y^2+y^4$ और x^3+y^3.
20. $x^2+2xy-3y^2$ और $x^2+xy-6y^2$.
21. $4x^3y^2(x^2-16y^2)$ और $12x^2y^3(x^3+64y^3)$.
22. $12a^3b^3(a^2+5ab-24b^2)$ और $27a^2b^2(a^2-ab-6b^2)$.
23. $m^3n^2(a^6+a^3b^3-2b^6)$ और $m^2n^3(a^4+a^2b^2+b^4)$.
24. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ और $xyz(x+y+z)^2$.
25. $x^3-9x^2-9x+81$ और $x^3-3x^2-81x+243$.
26. $x^3+9x^2+26x+24$ और $x^3+12x^2+47x+60$.
27. $a^2+b^2-c^2+2ab$ और $a^2-b^2-c^2-2bc$.
28. $x(a+x)^2$, $x^2(a^2-x^2)$ और $x^3(a^3+x^3)$.
29. $xy(x^2-xy-2y^2)$, $y^2(x^2-4xy+4y^2)$ और $4xy(x^2-4y^2)$.
30. $x^2+7x+12$, x^2+6x+8, $x^2+12x+32$ और x^2-16.
31. $2(x^2-7x+12)$, $8(x^3-27)$ और $12(x^2+3x-18)$.
32. $4a^2b^2(a^2+7ab+10b^2)$, $8a^3b^2(a^2-25b^2)$ और $12a^2b^3(a^2+9ab+20b^2)$.

169. उन मिश्र व्यंजकों का म० स० निकालना जिनका साधारण गुणनखण्ड निकालना सरल नहीं है।

जब दिये हुए व्यंजक का एक से अधिक गुणनखण्ड निकालना सम्भव नहीं होता, तो विशेष कौशल का अवलम्बन करके एक या एक से अधिक साधारण गुणनखण्ड निकाले जा सकते हैं।

उदाहरण। $x^2-2x-15$ और $x^3+6x^2+11x+6$ का म० स० निकालो।

यहाँ $x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$. अतः स्पष्ट ही ज्ञात हो रहा है कि इन दोनों गुणनखण्डों में से $x-5$ द्वारा दूसरा व्यंजक विभाजित नहीं हो सकता। अतएव दिये हुए व्यंजकों का यदि कोई साधारण गुणनखण्ड हो सकता है, तो वह अवश्य ही $x+3$ होगा।

वास्तव में, $x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$.

इससे ज्ञात होता है कि केवल $x+3$ ही साधारण गुणनखण्ड है।

$\therefore$ निर्णेय म० स० $=x+3$.

170. साधारण रीति (The General Process).

दिये हुए व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालना जब आसान न हो तो अङ्कगणित में म० स० निकालने के 'भाग की रीति' (Division Method) का अनुसरण करके म० स० निकालना चाहिए। इस रीति को व्यवहार में लाने का तरीक़ा अत्यन्त सरल है, परन्तु शिक्षार्थियों के लिए उसका प्रमाण प्राप्त करना आसान नहीं है। नीचे दिये गये उदाहरणों से इस रीति को व्यवहार में लाने के विषय में स्पष्ट रूप से धारणा होजायगी।

यह रीति म० स० का मिश्र गुणनखण्ड निकालने के ही लिए विशेष रूप से उपयोगी है। पहले दिये हुए व्यंजकों से उनके एक-पद गुणनखण्ड अलग करना होगा। इन सब एक-पद गुणनखण्डों का म० स० और भाग की रीति से निकाले गये अवशिष्ट अंशों का म० स० का गुणनफल ही निर्णेय म० स० होगा।

उदाहरण 1. $x^2+9x+14$ और $x^3+10x^2+24x+16$ का म० स० निकालो।

दोनों व्यंजकों को x के अवरोह क्रम के अनुसार सजाकर दूसरे को पहले से भाग दो। जैसे,

$$
\begin{array}{l}
x^2+9x+14 \big) \; x^3+10x^2+24x+16 \; \big(x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; x^3+9x^2+14x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+10x+16 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+9x+14 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x+2
\end{array}
$$

यहाँ $x+1$ भागफल और $x+2$ भागशेष है।

इसके बाद भाजक को इस भागशेष $x+2$ से भाग दो। जैसे,

$$
\begin{array}{l}
x+2 \big) \; x^2+9x+14 \; \big(x+7 \\
\qquad\quad x^2+2x \\
\qquad\qquad\quad 7x+14 \\
\qquad\qquad\quad 7x+14
\end{array}
$$

इसलिए $x+2$ से $x^2+9x+14$ विभाजित होता है। अतएव $x+2$ और $x^2+9x+14$ का म० स० $x+2$ है। फिर $x+2$, $x^2+9x+14$ का गुणनखण्ड होने के कारण $x^3+10x^2+24x+16$ का भी गुणनखण्ड होगा।

इसलिए यही निर्णय म० स० है (अनु० 234 देखो)।

उदाहरण 2. $x^6+9x^3-20x^2$ और $5x^5+9x^4-64x$ का म० स० निकालो।

पहला व्यंजक $= x^2(x^4+9x-20)$,

दूसरा व्यंजक $= x(5x^4+9x^3-64)$,

$\therefore$ निर्णय म० स० $=$ (एक पद गुणनखण्डों का म० स०) $\times$ ($x^4+9x-20$ और $5x^4+9x^3-64$ का म० स०)।

$x^4+9x-20$ और $5x^4+9x^3-64$ का म० स० निकालने के लिए दोनों व्यंजकों को x के घात समूहों को एक ही क्रम के अनुसार रखकर दूसरे को पहले से भाग देना होगा। जैसे,

$$
\begin{array}{l}
x^4+9x-20 \big) \; 5x^4+9x^3 \qquad\quad -64 \; \big(5 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 5x^4 \qquad\qquad +45x-100 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 9x^3-45x+36
\end{array}
$$

यहाँ भागशेष $9x^3-45x+36=9(x^3-5x+4)$.

इसके बादवाली भाग की क्रिया में भिन्न (Fractional) गुणक न आने देने के लिए इस भागशेष के संख्यात्मक गुणनखण्ड 9 को निकाल कर पहले भाजक $x^4+9x-20$ को भागशेष के x^3-5x+4 अंश द्वारा भाग देना होगा। जैसे,

$$\begin{array}{r|l|l} x^3-5x+4 & x^4 \qquad +9x-20 & x \\ & x^4-5x^2+4x & \\ \hline & \quad 5x^2+5x-20 & \end{array}$$

यहाँ पुनः भागशेष $5x^2+5x-20$ में से संख्यात्मक गुणनखण्ड 5 निकाल देने पर x^2+x-4 को भाजक और x^3-5x+4 को भाज्य मानकर भाग की क्रिया सम्पन्न करनी होगी। जैसे,

$$\begin{array}{r|l|l} x^2+x-4 & x^3 \qquad -5x+4 & x-1 \\ & x^3+x^2-4x & \\ \hline & \quad -x^2-x+4 & \\ & \quad -x^2-x+4 & \\ \hline \end{array}$$

अब कोई भागशेष नहीं रह गया। इसलिए $5(x^2+x-4)$ और $9(x^3-5x+4)$ का म० स० x^2+x-4 हुआ। इसलिए निर्णेय म० स० $=x\times(x^2+x-4)=x^3+x^2-4x$; क्योंकि x^2 और x का म० स० x है।

उदाहरण 3. $3x^3+17x^2-62x+14$ और $7x^3+52x^2-46x+8$ का म० स० निकालो।

यहाँ दोनों व्यंजकों में x का सर्वोच्च घात x^3 है। इसलिए म० स० निकालते समय किसी भी व्यंजक में दूसरे व्यंजक का भाग दिया जा सकता है परन्तु इस प्रकार भाग देने में गुणक भिन्न में आसकता है। इससे बचने के लिए दूसरे व्यंजक को 3 से गुणा करके गुणनफल में पहले व्यंजक से भाग किया जायगा। जैसे,

$$\begin{array}{r|l|l} & 7x^3+\ 52x^2-\ 46x+8 & \\ & 3 & \\ \hline 3x^3+17x^2-62x+14 & 21x^3+156x^2-138x+24 & 7 \\ & 21x^3+119x^2-134x+98 & \\ \hline & \qquad 37x^2+296x-74 & \end{array}$$

भागशेष $=37(x^2+8x-2)$.

संख्यात्मक गुणनखण्ड 37 को निकालकर x^2+8x-2 को भाजक मानकर $3x^3+17x^2-62x+14$ को भाग देने पर कोई भी भागशेष न रहेगा। इसलिए निर्णेय म० स० x^2+8x-2 ही है।

उदाहरण 4. $4x^3+13x^2-8x-3$ और $3x^4+13x^3+9x^2+9x+2$ का म० स० निकालो ।

इसलिए कि भाग देते समय भिन्न न आवे, दूसरे व्यंजक को 4 से गुणा किया गया है और जो गुणनफल प्राप्त हुआ है उसको पहले व्यंजक से भाग दिया गया है । जैसे,

$$\begin{array}{rl}
 & 3x^4+13x^3+9x^2+9x+2 \\
 & 4 \\
4x^3+13x^2-8x-3\,) & 12x^4+52x^3+36x^2+36x+8\,(\,3x \\
 & \underline{12x^4+39x^3-24x^2-\ \ 9x} \\
 & \quad 13x^3+60x^2+45x+8 \\
 & \quad 4 \\
 & \quad 52x^3+240x^2+180x+32\,(\,13 \\
 & \quad \underline{52x^3+169x^2-104x-39} \\
 & \qquad 71)\ \underline{71x^2+284x+71} \\
 & \qquad\qquad x^2+\ \ 4x+\ 1
\end{array}$$

[संख्यात्मक गुणनखण्ड 71 निकाल कर ।]

भाजक में इस भागशेष से भाग करने पर कुछ भी भागशेष नहीं रहता ।

$\therefore$ निर्णेय म० स० x^2+4x+1.

171. ऊपर की रीति को निम्नलिखित ढंग से करने में क्रिया संक्षेप हो सकती है ।

उदाहरण । $3x^4+3x^3-8x^2+5x-1$ और $6x^4-3x^3+2x^2-2x+1$ का म० स० निकालो ।

$$\begin{array}{lr|r|r}
x & 3x^4+3x^3-\ 8x^2+\ 5x-1 & 6x^4-3x^3+\ 2x^2-\ 2x+1 & 2 \\
 & 3x^4-6x^3+\ 4x^2-\ \ x & 6x^4+6x^3-16x^2+10x-2 & \\
3 & 9x^3-12x^2+\ 6x-1 & -3\ \ -9x^3+18x^2-12x+3 & \\
 & 9x^3-18x^2+12x-3 & 3x^3-\ 6x^2+\ 4x-1 & x \\
 & 2\ \ \ 6x^2-\ 6x+2 & 3x^3-\ 3x^2+\ \ x\ \ \ \ & \\
 & 3x^2-\ 3x+1 & -\ 3x^2+\ 3x-1 & -1 \\
 & & -\ 3x^2+\ 3x-1 &
\end{array}$$

$\therefore$ निर्णेय म० स० $=3x^2-3x+1$.

172. उपर्युक्त रीति की व्याख्या।

ऊपर के उदाहरणों से यह बात देखने में आती है कि महत्तम समापवर्त्य निकालते समय निम्नलिखित नियमों के अनुसार क्रिया की जाती है :—

(1) जिन व्यंजकों का म० स० निकालना हो उन्हें उनमें दिये हुए किसी साधारण अक्षर (x) के घातों के अवरोह (या आरोह) क्रमानुसार सजा लो।

(2) उनमें से जिस व्यंजक का घात अधिक (of the higher degree) हो, उसको दूसरे व्यंजक द्वारा भाग दो। [यदि दोनों के घात समान (of the same degree) हों, तो किसी व्यंजक को दूसरे व्यंजक द्वारा भाग दिया जा सकता है।]

(3) अङ्कगणित की भाँति यहाँ भी भाग-क्रिया में यदि कोई भाग-शेष मिले, तो उसको नया भाजक और पूर्व भाजक को नया भाज्य मानकर फिर भाग करो; और जब तक कोई भागशेष न रह जाय, इसी प्रकार भाग करते जाओ। अन्त का भाजक ही निर्णेय म० स० होगा।

(4) इन सब भागों के समय भाग-क्रिया में भिन्न न आने देने के लिए भाज्य या भाजक को किसी ऐसी संख्या (या एक-पद राशि) द्वारा गुणा या भाग कर सकते हैं जो दूसरे का गुणनखण्ड नहीं है।

(5) दिये हुए व्यंजकों में से एक-पद गुणनखण्ड निकाल लेने के बाद अवशिष्ट अंशों को लेकर उक्त भाग-क्रिया करो।

173. तीन या तीन से अधिक व्यंजकों का म० स० निकालना।

दो से अधिक व्यंजकों का म० स० निकालने के लिए पहले उनमें से किसी दो का म० स० निकाल लो। इसके बाद आये हुए म० स० और तीसरे व्यंजक का म० स० निकालो। इसी प्रकार एक-एक व्यंजक लेकर अन्त तक करते जाओ।

उदाहरण। x^2-3x+2, $2x^2-x-1$ और x^2+2x-3 का म० स० निकालो।

यहाँ पहला व्यंजक $=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$;

दूसरा व्यंजक $=2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$;

$\therefore$ पहले दो व्यंजकों का म० स० $=x-1$.

अब तीसरा व्यंजक $= x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$;

$\therefore$ $(x-1)$ और x^2+2x-3 का म० स० $x-1$ है; इसलिए यही तीनों व्यंजकों का निर्णेय म० स० है ।

प्रश्नावली 57.

नीचे लिखे व्यंजकों का म० स० निकालोः—

1. $x^2-3x-10$ और x^2-4x-5.
2. $2x^2-8x-90$ और $x^2-6x-55$.
3. $3x^2+x-2$ और $3x^2+4x-4$.
4. $3x^2+5x-2$ और $3x^3+5x^2+x-1$.
5. $3x^2+16x-12$ और $3x^3+4x^2-28x+16$.
6. $1+x+x^3-x^5$ और $1-x^4-x^6+x^7$.
7. x^3-4x^2+4x और x^3+x^2-7x+2.
8. $2x^3-7x^2+4x+3$ और $2x^2-5x+3$.
9. x^3-3x-2 और x^3-4x^2+6x-4.
10. $2x^2-5ax+2a^2$ और $x^3+4ax^2-4a^2x-16a^3$.
11. x^3-x^2-3x-1 और x^3-5x-2.
12. x^3+2x^2-x-2 और x^3+x^2-4x-4.
13. $2x^3-x^2-x-3$ और $4x^3-17x+12$.
14. x^3+3x^2-9x+5 और $x^3-19x+30$.
15. $2x^3+5x^2+5x+3$ और $3x^4+5x^3+5x^2+2x$.
16. $12x^3+11ax^2+6a^2x+a^3$ और $21x^3+17ax^2+9a^2x+a^3$.
17. $x^4-3x^3-2x^2+12x-8$ और x^3-7x+6.
18. $x^4+8x^3+18x^2+11x+2$ और $x^4+9x^3+23x^2+13x+2$.
19. $2x^3-7x^2-46x-21$ और $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$.
20. $x^5+11x-12$ और x^5+11x^3+54.

21. $x^5 - x^3 + 8$ और $x^5 - x^2 + 4$.

22. $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$, $6x^3 - 13x^2 + 4x + 3$

और $12x^3 - 8x^2 - 13x - 3$.

23. $27x^4 + x$, $87x^3 + 8x - 7$ और $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$.

24. $x^3 - 2ax^2 - 5a^2x + 6a^3$, $x^3 - 2ax^2 - 4a^2x + 8a^3$

और $2x^3 + 9ax^2 + 7a^2x - 6a^3$.

25. $2a^3 - 2ab^2 + a^2b - b^3$, $a^3 - ab^2 + 2a^2b - 2b^3$

और $a^3 - ab^2 - 2a^2b + 2b^3$.

174. समापवर्त्य (Common Multiple).

यदि कोई राशि दो या अधिक राशियों में से प्रत्येक से अलग अलग भाग करने पर पूरी-पूरी विभाजित होजाय और कुछ भागशेष न रहे, तो पहली राशि को शेषोक्त राशियों का समापवर्त्य कहते हैं। जैसे, $4a^3x^2y^3$ राशि ax, a^2xy, x^2y^2 और $2a^3y$ राशियों में से हर एक के द्वारा विभाजित हो सकती है, इसलिए $4a^3x^2y^3$ राशि शेषोक्त राशियों का 'समापवर्त्य' है।

175. लघुतम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple).

दो या दो से अधिक राशियों के समापवर्त्यों में से जो लघुतम मात्रा वाला होता है उसी को उन राशियों का लघुतम समापवर्त्य या संक्षेप में ल० स० अ० (L. C. M.) कहते हैं।

जैसे, $2a^3x^2y^2$ राशि ax, a^2xy, x^2y^2 और $2a^3y$ राशियों का ल० स० अ० है।

176. गुणनखंडीकरण द्वारा ल० स० अ० निकालना।

जिन समस्त राशियों के गुणनखण्ड सरलतापूर्वक ही निकाले जा सकते हैं उनका ल० स० अ० निकालते समय राशियों में वर्त्तमान उनके अभाज्य गुणनखण्डों (Elementary Factors) का सर्वोच्चघात और उनके संख्यात्मक (अंक) गुणनखण्डों के ल० स० अ० का गुणनफल निकालना होता है।

उदाहरण 1. $2a^2bx$, $4ab^2c$, $6a^2c^2x$ और b^2cx^2 का ल० स० अ० निकालो।

a, b, x और c ऊपर लिखी हुई राशियों के अभाज्य गुणनखण्ड हैं और राशियों में उनका सर्वोच्चघात क्रमशः a^2, b^2, x^1 और c^2 है। 2, 4 और 6 संख्यात्मक (अंक) गुणनखण्डों का ल० स० अ० 12 है। इसलिए निर्णेय ल० स० अ० $= 12a^2b^2c^2x^2$.

उदाहरण 2. $a-x$, $2(a^2-x^2)$, a^3+x^3 और $3(a-x)^2$ का ल० स० अ० निकालो।

$a-x$, $a+x$ और a^2-ax+x^2 दी हुई राशिमालाओं (व्यंजकों) के अभाज्य गुणनखण्ड हैं और राशियों में उनका सर्वोच्चघात क्रमशः $(a-x)^2$, $a+x$ और a^2-ax+x^2 है जबकि संख्यात्मक गुणनखण्डों का ल० स० अ० 6 है।

इसलिए निर्णेय ल० स० अ० $= 6(a+x)(a-x)^2(a^2-ax+x^2)$
$= 6(a^3+x^3)(a-x)^2$.

प्रश्नावली 58.

निम्नलिखित राशियों का ल० स० अ० निकालो:—

1. ab, bc, ca.
2. xy, x^2y^2, x^3y^3.
3. $2m^2n$, $3mn^2$, $4m^2n^2$.
4. $3x^3y^2$, $7x^2y^3$, $14x^2y^2$.
5. $6a^2b^2c$, $3ab^2c^2$, $10a^2bc^2$, $12abc$.
6. $2m^2npq$, $3xyp^2q^2$, $4mn^2x^2y$, $5mp^2qx$.
7. $4a^4x^3y^2$, $18b^3y^3z^2$, $20c^6z^3x^2$.
8. $3a^2b^2c^2d^2$, $9a^3b^3x^2y^2$, $10abx^3y^3$, $2c^3d^3xy$.
9. $8m^2n^2x^2y^2$, $4a^2b^2xy$, $12mna^2b^2$.
10. $5a^6b^8m^9n^{10}$, $20p^{16}q^{12}a^2b^3$, $15m^3n^4p^5q^8$.
11. $2(a-x)$, $3(a+x)$, $4(a^2-x^2)$.
12. $4a^2(a+2x)$, $3ax(a^2-4x^2)$, $8(a-2x)^2$.

13. $m+n, \quad m-n, \quad m^2-n^2, \quad m^3+n^3.$

14. $a^2-b^2, \quad b^2-c^2, \quad ab+ac+bc+b^2.$

15. $a^3+x^3, \quad a^3-x^3, \quad a^4+a^2x^2+x^4.$

16. $4a^2b^2(b-c)^2, \quad 5b^2c^2(b^2-c^2), \quad 6c^2a^2(b+c)^2.$

17. $3x(x-y)^3, \quad 7y(x^3-y^3), \quad 21xy(x^2+xy+y^2)$

18. $4mn(m-n), \quad 5m^2n^2(m+n), \quad 2(m^3+n^3).$

19. $3a^2x(x^2-1), \quad 2ax^2(x^3-1), \quad ax(x^4-1).$

20. $x^2(a^2+a+1), \quad xy(a^2-a+1), \quad y^2(a^2-1).$

21. $x+1, \quad x^2+3x+2, \quad x^2+4x+3.$

22. $x-1, \quad x^2-3x+2, \quad x^2-4x+3.$

23. $x^2+5x+6, \quad x^2+8x+15.$

24. $a^2-7a+6, \quad a^2-5a-6.$

25. $m^2-2m-3, \quad m^2-6m+5, \quad m^2-1.$

26. $x^2-4, \; x^2+4x-12, \; x^2-4x+4.$

27. $ax(a^2+3ax+2x^2), \; a^2(a^2-x^2).$

28. $a^2(a^2-ax-2x^2), \; ax(a^2-3ax+2x^2), \; x^2(a^2-x^2).$

29. $x^2-4, \; x^2-x-2, \; x^2+x-2.$

30. $2x^2-x-1, \; 2x^2+3x+1, \; x^2-1.$

31. $a^2-b^2, \; a^3-b^3, \; a^4-b^4.$

32. $x^2+x-6, \; x^2+2x-3, \; x^2-3x+2.$

33. $x^2+xy+yz+zx, \; y^2+xy+yz+zx, \; z^2+xy+yz+zx.$

34. $a^2+b^2-c^2+2ab, \; a^2-b^2+c^2+2ac.$

35. $x^2-x-6, \; x^2+x-12, \; x^2+6x+8.$

36. $8a^3-27b^3 \;\; 3a^2-ab-2b^2, \; 6a^2-5ab-6b^2.$

37. $27x^4+x, \; 87x^2+8x-7, \; 27x^3+27x^2+9x+1.$

38. $x^3+8a^3, \; x^2-4a^2, \; x^4-16a^4, \; x^4+4a^2x^2+16a^4.$

177. उन बहुपद व्यंजकों का, जिनका गुणनखण्ड आसानी से न निकाला जा सके, लघुतम समापवर्त्य निकालना।

इस प्रकार के व्यंजकों का ल० स० अ० निकालते समय पहले उनका म० स० ऊपर बतलाई गई रीति के अनुसार निकाल लेने के बाद ल० स० अ० निकालना चाहिए।

मान लो कि A और B दो व्यंजक हैं और H उनका म० स० है। ऐसी अवस्था में $A = aH$ और $B = bH$, यहाँ a और b का कोई साधारण गुणनखण्ड नहीं है।

A और B का ल० स० अ० $= abH$,

$$= \frac{aH \times bH}{H} = \frac{A \times B}{H};$$

इसलिए, यदि A और B का ल० स० अ० L हो, तो

$$L = abH = \frac{A \times B}{H} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\text{अथवा } L = \frac{A}{H} \times B = \frac{B}{H} \times A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) और (2) के दोनों पक्षों को H से गुणा करने पर नीचे लिखा सूत्र प्राप्त होता है:—

$$LH = A \times B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

अर्थात्, उनमें से किसी दो राशियों का गुणनफल उनके ल० स० अ० और म० स० के गुणनफल के समान होता है।

अतएव गुणनखण्ड निकालना आसान न होने पर निम्नलिखित उपाय से ल० स० अ० निकाला जा सकता है।

नियम—दोनों व्यंजकों के गुणनफल को उनके म० स० से भाग करो, अथवा दोनों व्यंजकों में से किसी एक को उनके म० स० से भाग दो और भागफल को दूसरे से गुणा करो।

अन्त वाला उपाय अधिक उपयोगी है।

उदाहरण । $3x^3+x^2-8x+4$ और $3x^3+7x^2-4$ का ल० स० अ० निकालो ।

पहले अनु० 170 की रीति के अनुसार दोनों व्यंजकों का म० स० निकाल लो । जैसे,

$$
\begin{array}{l}
3x^3+x^2-8x+4\,\big)\,3x^3+7x^2+0.x-4\,\big(\,1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \underline{3x^3+\;\,x^2-8x+4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 2)\underline{6x^2+8x-8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3x^2+4x-4\,\big)\,3x^3+\;\,x^2-8x+4\,\big(\,x-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \underline{3x^3+4x^2-4x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; -3x^2-4x+4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{-3x^2-4x+4}
\end{array}
$$

अतएव दिये हुए दोनों व्यंजकों का म० स० $=3x^2+4x-4$.

$$
\therefore \text{ निर्णेय ल० स० अ०} = \frac{3x^3+x^2-8x+4}{3x^2+4x-4}\times(3x^3+7x^2-4)
$$

$$
=(x-1)(3x^3+7x^2-4)
$$

$$
=3x^4+4x^3-7x^2-4x+4.
$$

प्रश्नावली 59.

नीचे लिखे व्यंजकों का ल० स० अ० निकालो :—

1. x^3+x^2-2 और x^3+2x^2-3.
2. $2x^3-5x^2+5x-3$ और $3x^3-7x^2+7x-4$.
3. $4x^3-x^2-4x+1$ और $3x^3-3x^2+x-1$.
4. $x^3-5ax^2+7a^2x-3a^3$ और $3x^2-10ax+7a^2$.
5. x^3-2x+1 और x^3+2x^2-1.
6. $x^3+6x^2+11x+6$ और x^3+2x^2-x-2.
7. $4a^3+13a^2-8a-3$ और $3a^4+13a^3+9a^2+9a+2$.
8. $3a^3-15a^2x-19ax^2+6x^3$ और $6a^3+3a^2x-5ax^2+x^3$.
9. x^3+2x^2-x-2 और x^3+x^2-4x-4.
10. $ax^3-a^2x^2-4a^4$ और $x^4-9a^2x^2+10a^3x$.

11. x^3+2x^2-x-2 और $2x^4-x^3-9x^2+4x+4$.

12. $2a^4-2a^3+a^2+3a-6$ और $4a^4-2a^3+3a-9$.

13. $3x^4-7x^3-27x^2-6x+2$
और $3x^4-13x^3-40x^2-9x+3$.

14. दो राशियों का म० स० $x-7$ और ल० स० अ० $x^3-10x^2+11x+70$ है। यदि उन दोनों राशियों में से एक $x^2-5x-14$ हो, तो दूसरी राशि बताओ।

15. दो राशियों का म० स० x^2-x-2 है और ल० स० अ० $x^4-x^3-11x^2+9x+18$ है। यदि उनमें से एक x^3-4x^2+x+6 हो, तो दूसरी राशि बताओ।

16. $3x^3-13x^2+23x-21$ और $6x^3+x^2-44x+21$ का ल० स० अ० और म० स० निकालो और इन दोनों व्यंजकों में $x=3$ करने से जो दो फल प्राप्त हों उनके ल० स० अ० और म० स० की तुलना करो।

178. तीन या तीन से अधिक व्यंजकों का, जिनका गुणनखण्ड निकालना सरल नहीं है, लघुतम समापवर्त्य निकालना।

कल्पना करो कि A, B, C............आदि व्यंजकों का ल० स० अ० निकालना है। मान लो कि A और B का ल० स० अ० L है, तो L तथा C का ल० स० अ० ही A, B और C का ल० स० अ० होगा। कारण यह है कि L में A और B आदि के जितने भी गुणनखण्ड हैं वर्तमान हैं और इन सब के अतिरिक्त और कोई गुणनखण्ड नहीं है। इसलिए L और C के ल० स० अ० में A, B और C के सभी गुणनखण्ड वर्त्तमान हैं और इन सबको छोड़कर और कोई गुणनखण्ड नहीं है। अतः यही A, B, C का ल० स० अ० है।

इसी प्रकार किसी भी संख्या के व्यंजकों का ल० स० अ० निकाला जा सकता है। इस रूप से प्राप्त अंत का ल० स० अ० ही निर्णेय ल० स० अ० होगा।

उदाहरण। $2x^2+5x-3$, $2x^3-7x^2+7x-2$ और $2x^4+3x^3-14x^2-9x+18$ का ल० स० अ० निकालो।

$2x^2+5x-3$ और $2x^3-7x^2+7x-2$ का ल० स० अ० निकालते समय पहले इनका म० स० निकालो। जैसे,

$$2x^2+5x-3\,)\,2x^3-7x^2+7x-2\,(\,x+3$$
$$2x^3+5x^2-3x$$
$$-2)\;-12x^2+10x-2$$
$$6x^2-5x+1$$
$$6x^2+15x-9$$
$$-10)\;-20x+10$$
$$2x-1\,)\,2x^2+5x-3\,(\,x+3$$
$$2x^2-x$$
$$6x-3$$
$$6x-3$$

$\therefore$ म० स० $=2x-1$.

$\therefore$ इन दोनों व्यंजकों का ल० स० अ०

$$=\frac{(2x^2+5x-3)(2x^3-7x^2+7x-2)}{2x-1}$$
$$=(x+3)(2x^3-7x^2+7x-2)$$
$$=2x^4-x^3-14x^2+19x-6.$$

अब इस व्यंजक का और तीसरे व्यंजक का ल० स० अ० निकालना होगा जिसके लिए अनु० 170 में बतलाई गई रीति के अनुसार पहले म० स० निकालने पर x^3-7x+6 आवेगा।

$\therefore$ निर्णेय ल० स० अ०

$=2x^4-x^3-14x^2+19x-6$ और $2x^4+3x^3-14x^2-9x+18$ का ल० स० अ०

$$=\frac{(2x^4-x^3-14x^2+19x-6)(2x^4+3x^3-14x^2-9x+18)}{x^3-7x+6}$$
$$=(2x-1)(2x^4+3x^3-14x^2-9x+18)$$
$$=4x^5+4x^4-31x^3-4x^2+45x-18.$$

प्रश्नावली 60.

निम्नलिखित व्यंजकों का ल० स० अ० निकालो:—

1. $x^2+9x+20$, $x^2+7x+12$ और $x^2+9x+18$.
2. $x^3-x^2-14x+24$, x^3-2x^2-5x+6 और x^2-4x+3.
3. x^2+4x+3, $x^2+8x+15$ और $x^2-4x-45$.
4. x^2+x-6, x^2+2x-3 और x^2-3x+2.
5. $2a^2-3ax-20x^2$, $2a^3+3a^2x-45ax^2-100x^3$ और $2a^3-a^2x-11ax^2+10x^3$.
6. $x^3-2x^2-19x+20$, $x^3+2x^2-23x-60$ और $x^4+7x^3-4x^2-52x+48$.
7. $3x^2+16x-12$, $3x^3+4x^2-28x+16$ और $3x^3-8x^2+x+2$.
8. x^4+7x^2+16, x^3+3x+4, x^3+3x-4.
9. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$ और $27x^3+27x^2+9x+1$.
10. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ और $6x^2-5x-6$.
11. x के सबसे निम्नघात (of the lowest degree) का कौनसा व्यंजक $2x^2-9x+9$, $6x^2-x-12$ और $3x^2-2x-8$ में से हर एक से विभाजित हो सकता है ?
12. दो राशियों का म० स० $2x+3$ और ल० स० अ० $2x^3-3x^2-29x-30$ है। यदि उनमें से एक $2x^2+7x+6$ हो, तो दूसरी क्या है ?
13. $x^2-3x-70$, $x^3-39x+70$ और $x^3-48x+7$ में से हर एक x के सबसे निम्नघात के किस व्यंजक के गुणनखण्ड हैं ?

—:o:—

चौदहवाँ अध्याय

सरल भिन्न (Simple Fractions)

179. भिन्न ।

a और b का चाहे कोई भी मान हो, a में b का भाग देने पर भागफल $\frac{a}{b}$ को भिन्न कहते हैं। इस भिन्न में a को अंश (Numerator) और b को हर (Denominator) कहते हैं। यदि $\frac{a}{b}=\text{F}$ हो, तो $a=b\text{F}$, अर्थात्,

अंश = भिन्न × हर।

180. भिन्न का चिह्न ।

चूँकि भिन्न एक भागफल है, इसलिए उसके चिह्न का भी भाग की क्रिया के चिह्न के नियम (अनु० 55) के अनुसार निर्णय किया जाता है। जैसे,

$$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b},\quad \frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b},\quad \frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b},\quad \frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}.$$

181. उपसिद्धान्त ।

भिन्न के अंश और हर दोनों ही को किसी एक ही राशि से गुणा करने से या भाग देने पर भिन्न के मान में किसी प्रकार का परिवर्तन नहीं होता।

मान लो कि $\frac{a}{b}$ एक भिन्न है और m कोई एक राशि है। सिद्ध करना है कि (i) $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$, और (ii) $\frac{ma}{mb}=\frac{ma\div m}{mb\div m}$.

मान लो कि $\frac{a}{b}=\text{F}$; तो उस दशा में अनु० 179 के अनुसार $a=b\text{F}$.

$\therefore\ ma=mb\text{F}$, [दोनों पक्षों को m से गुणा करने से]

$\therefore\ \frac{ma}{mb}=\text{F}$. [दोनों पक्षों को mb से भाग देने पर]

किन्तु, $F=\frac{a}{b}$; $\therefore \frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$. ... (*i*)

फिर, $a=ma\div m$, $b=mb\div m$;

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{ma\div m}{mb\div m}.$$

किन्तु (*i*) से $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$;

$$\therefore \frac{ma}{mb}=\frac{ma\div m}{mb\div m}. \quad \ldots \quad (ii)$$

182. उपसिद्धान्त।

भिन्नों के अंश व हर इन दोनों का चिह्न परिवर्तित करने से भिन्नों के मान में किसी प्रकार का परिवर्तन नहीं होता।

मान लो कि $\frac{a}{b}$ एक भिन्न है। अनु० 180 के अनुसार

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times(-1)}{b\times(-1)}$$ [अंश व हर दोनों को (-1) से गुणा करने से]

$$=\frac{-a}{-b};$$ इसलिए यह उपसिद्धान्त प्रमाणित हुआ।

183. भिन्न का सरल करना (Simplification).

अनु० 181 में यह सिद्ध हो चुका है कि भिन्न के अंश व हर दोनों को किसी एक ही राशि से गुणा करने या भाग देने पर भिन्न के मान में किसी प्रकार का परिवर्तन नहीं होता। इसलिए यदि किसी भिन्न के अंश व हर दोनों ही को उनके किसी साधारण गुणनखण्ड से भाग दे दिया जाय, तो भिन्न के मान में किसी प्रकार का परिवर्तन न होगा किन्तु उसका आकार पहले के आकार से छोटा हो जायगा। अंश व हर दोनों को यदि उनके समस्त साधारण गुणनखण्डों, अर्थात् उनके म० स० से भाग दे दिया जाय, तो भिन्न अपने लघुतम पदों में प्रकट होजायगा।

भिन्न के अंश व हर दोनों को उनके साधारण गुणनखण्ड द्वारा भाग देने की रीति को उक्त गुणनखण्ड का हटाना या अलग करना (Cancelling) कहते हैं (अनु० 53 देखो)।

उदाहरण 1. $\frac{a^2b}{ab^2}$ को लघुतम पदों में रखो ।

अंश और हर का म० स० $= ab$;

इसलिए, $$\frac{a^2b}{ab^2}=\frac{a^2b\div ab}{ab^2\div ab}=\frac{a}{b}.$$

दूसरा प्रकार, $\frac{a^2b}{ab^2}=\frac{a.a.b}{a.b.b}=\frac{a}{b}$, [अंश व हर दोनों में से a और b इन दोनों साधारण गुणनखण्डों को अलग कर लेने से] ।

उदाहरण 2. सरल करो:— $\frac{(a^3+x^3)(a^2-x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2)}$.

अंश व हर का म० स० $=(a+x)^2(a^2-ax+x^2)$;

इसलिए,
$$\frac{(a^3+x^3)(a^2-x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2)}$$
$$=\frac{(a^3+x^3)(a^2-x^2)\div(a+x)^2(a^2-ax+x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2)\div(a+x)^2(a^2-ax+x^2)}$$
$$=\frac{a-x}{a+x}.$$

दूसरा प्रकार,
$$\frac{(a^3+x^3)(a^2-x^2)}{(a+x)^3(a^2-ax+x^2)}$$
$$=\frac{(a+x)(a^2-ax+x^2)(a+x)(a-x)}{(a+x)(a+x)(a+x)(a^2-ax+x^2)}$$
$$=\frac{a-x}{a+x}.$$

यहाँ अंश व हर में से उनके साधारण गुणनखण्ड अलग कर लिये गये हैं ।

उदाहरण 3. सरल करो :—

$$\frac{(a^2+2a-15)(x^2-x-12)(a^2+4a+3)}{(a^2-2a-3)(ax+3a+3x+9)(x^2-16)}.$$

$$\text{भिन्न}=\frac{(a-3)(a+5)(x-4)(x+3)(a+1)(a+3)}{(a-3)(a+1)(x+3)(a+3)(x+4)(x-4)}.$$

$$=\frac{a+5}{x+4}.$$ [साधारण गुणनखण्ड को अलग करने से]

प्रश्नावली 61.

सरल करो:—

1. $\dfrac{ax}{x}$. 2. $\dfrac{abc}{a^2b^2}$. 3. $\dfrac{a^2xy}{ax^2y}$.

4. $\dfrac{4a^3x^2z}{3ax^3z^2}$. 5. $\dfrac{12a^5x^4b^3y^2}{8a^3x^2b^5}$. 6. $\dfrac{36a^3m^2n^3x^2}{20m^4n^4x^2}$.

7. $\dfrac{12p^3q^2c^5d^{10}}{45p^4q^3c^2d^5}$. 8. $\dfrac{20a^8b^7c^6d^5}{120b^4c^3d^2a^{10}}$. 9. $\dfrac{22k^3l^2m^4n^6}{33m^5n^7lk^2}$.

10. $\dfrac{18x^5y^2z^3l^4m^5n^6}{84x^3y^3z^2l^2m^6n^7}$. 11. $\dfrac{a^2-x^2}{a+x}$. 12. $\dfrac{a^3-x^3}{x^2+ax+a^2}$.

13. $\dfrac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a^3-b^3)}$. 14. $\dfrac{3ab(a^2-b^2)}{4bc(a+b)^2}$.

15. $\dfrac{4xy(x^3-y^3)}{12y^2(x^4+x^2y^2+y^4)}$. 16. $\dfrac{x^2y-xy^2}{4(x-y)^2}$.

17. $\dfrac{2ax^2-4ay^2}{x^4-4y^4}$. 18. $\dfrac{4abc^2-6ab^2c}{(3b-2c)^2}$. 19. $\dfrac{(4m-3n)^2}{12mn-9n^2}$.

20. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$. 21. $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2-3a-10}$. 22. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}$.

23. $\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$. 24. $\dfrac{x^2y^3(x^2-xy-30y^2)}{x^3y^3(x^2+9xy+20y^2)}$.

25. $\dfrac{4a^2-4ab-15b^2}{2a^2+ab-15b^2}$. 26. $\dfrac{m^2+m-6}{m^2-m-2}$.

27. $\dfrac{4mn(m^2-3m-70)}{6m^2(m^2-4m-60)}$. 28. $\dfrac{x^3-27}{x^2-7x+12}$.

29. $\dfrac{a^3-8x^3}{a^2-4x^2}$. 30. $\dfrac{(x^2-4x+3)(x^2+2x+1)}{(x^2-1)(x^2-x-6)}$.

31. $\dfrac{(a^2+3a+2)(a^2+7a+12)}{(a^2+5a+6)(a^2+9a+20)}$.

32. $\dfrac{(a^3-1)(a^2-4)(a^2-9)}{(a^2+5a+6)(a^2-5a+6)(a^4+a^2+1)}$.

33. $\dfrac{(a^6-b^6)(a^2+ab+b^2)}{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}$.

184. सार्व्व हर करना।

दो या दो से अधिक भिन्नों का योगफल निकालते समय भिन्नों का सार्व्व हर करना आवश्यक है। अङ्कगणित के समान भिन्नों को ल० स० अ० से युक्त करना ही सुविधाजनक है।

उदाहरण 1. $\dfrac{2x}{a^2y}$, $\dfrac{4y}{b^2x}$ और $\dfrac{3ab}{x^2y}$ को सार्व्व हर बनाओ।

हरों का ल० स० अ० $= a^2b^2x^2y$;

इसलिए, $\dfrac{2x}{a^2y} = \dfrac{2x \times b^2x^2}{a^2y \times b^2x^2} = \dfrac{2x^3b^2}{a^2b^2x^2y}$; [ल० स० अ० को a^2y से भाग देने पर भागफल b^2x^2 होता है। यही यहाँ गुणक के रूप में व्यवहृत किया गया है।]

$$\frac{4y}{b^2x} = \frac{4y \times a^2xy}{b^2x \times a^2xy} = \frac{4a^2xy^2}{a^2b^2x^2y};$$

$$\frac{3ab}{x^2y} = \frac{3ab \times a^2b^2}{x^2y \times a^2b^2} = \frac{3a^3b^3}{a^2b^2x^2y}.$$

उदाहरण 2. $\dfrac{x-a}{x-b}$, $\dfrac{2x}{x^2-b^2}$ और $\dfrac{2a}{x^3-b^3}$ को सार्व्व हर बनाओ।

हरों का ल० स० अ० $= (x-b)(x+b)(x^2+bx+b^2)$

$= (x+b)(x^3-b^3)$;

इसलिए, $\dfrac{x-a}{x-b} = \dfrac{(x-a)(x+b)(x^2+bx+b^2)}{(x^3-b^3)(x+b)}$;

$$\frac{2x}{x^2-b^2} = \frac{2x(x^2+bx+b^2)}{(x^3-b^3)(x+b)};$$

$$\frac{2a}{x^3-b^3} = \frac{2a(x+b)}{(x+b)(x^3-b^3)}.$$

प्रश्नावली 62.

निम्नलिखित भिन्नों को साव्र्व हर बनाओः—

1. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$.
2. $\frac{2a}{3b}, \frac{4ac}{3bd}$.
3. $\frac{3a}{4x}, \frac{5ax}{6by}$.
4. $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$.
5. $\frac{a^2b}{c^2d}, \frac{4a^2c}{5b^2d}$.
6. $\frac{4a^3b^2c}{6xy^2z}, \frac{2xyz^2}{5abc}$.
7. $\frac{x+a}{x-a}, \frac{2x}{x^2-a^2}$.
8. $\frac{4xy}{x^2-y^2}, \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$.
9. $\frac{2a}{3(a^2-b^2)}, \frac{4b}{a^3-b^3}$.
10. $\frac{3a^2-b^2}{a}, \frac{4a^2-3b^2}{b}$.
11. $\frac{x}{a+b}, \frac{y}{a-b}, \frac{xy}{a^2-b^2}$.
12. $\frac{bc}{b-c}, \frac{ca}{b^2-c^2}, \frac{ab}{b^3-c^3}$.

185. भिन्नों का योग और अन्तर।

मान लो कि $\frac{a}{x}$ और $\frac{b}{y}$ दो भिन्न हैं।

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy} \quad \text{[दोनों भिन्नों को साव्र्व हर बनाने से]}$$
$$=(ay)\div xy+(bx)\div xy$$
$$=(ay+bx)\div xy$$
$$=\frac{ay+bx}{xy}$$

इसी प्रकार $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\frac{ay-bx}{xy}$.

इसलिए जब भिन्नों का योगफल (या अन्तर) निकालना हो तो पहले उनको साव्र्व हर बना लेना चाहिए। तत्पश्चात् इन परिवर्तित भिन्नों के अंशों के बीजीय योगफल (या अन्तर) को साव्र्व हर द्वारा भाग देना चाहिए। ऐसा करने से निर्णय योगफल (या अन्तर) पाया जायगा। निर्णित भिन्न को लघुतम पदों में रखना साधारण रीति है।

उदाहरण 1. सरल करोः— $\dfrac{2a}{x}+\dfrac{x}{3a}$.

$$\text{व्यंजक} = \frac{6a^2}{3ax}+\frac{x^2}{3ax}=\frac{6a^2+x^2}{3ax}.$$

उदाहरण 2. सरल करोः— $\dfrac{1+a}{a}-\dfrac{1+b}{b}$.

$$\text{व्यंजक} = \frac{b(1+a)}{ab}-\frac{a(1+b)}{ab}=\frac{b+ab-a-ab}{ab}=\frac{b-a}{ab}.$$

उदाहरण 3. सरल करोः— $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}$.

$$\text{व्यंजक} = \frac{a(a+b)}{a^2-b^2}+\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab+ab-b^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

उदाहरण 4. सरल करो :— $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$.

$$\text{व्यंजक} = \frac{x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1+x+1+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x+1}{x^2-1}.$$

उदाहरण 5. सरल करोः— $\dfrac{1}{a^2+4a+3}-\dfrac{2}{2a^2+5a+3}$.

$$\text{व्यंजक} = \frac{1}{(a+1)(a+3)}-\frac{2}{(2a+3)(a+1)}$$

$$=\frac{(2a+3)-2(a+3)}{(a+1)(a+3)(2a+3)}$$

$$=-\frac{3}{(a+1)(a+3)(2a+3)}.$$

प्रश्नावली 63.

सरल करो:—

1. $\frac{a}{2}+\frac{ab}{3}$. 2. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$. 3. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}$.

4. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}-\frac{1}{bc}$. 5. $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}$. 6. $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}-\frac{z}{xy}$.

7. $\frac{x+y}{2x}-\frac{x-y}{3y}$. 8. $\frac{x^2-1}{3x}-\frac{x-2}{3}$. 9. $\frac{2x^2-1}{4x}+\frac{x-2}{2}$.

10 $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}$.

11. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-c}$. 12. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$.

13. $\frac{ab}{a-b}+\frac{a-b}{ab}$. 14. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$.

15. $\frac{4}{x-4}-\frac{5}{x-5}$. 16. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}-\frac{2x}{x^2-a^2}$.

17. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{x^2+3x+2}$.

18. $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x+1}+\frac{5}{x^2+3x+2}$. 19. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}$.

20. $\frac{1}{x^2+4x+3}-\frac{1}{x^2+7x+12}$. 21. $\frac{4}{x^3-8}+\frac{2}{x^2+2x+4}$.

22. $\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2+x-12}$.

23. $\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{5}{x^3-27}$.

24. $\frac{a}{a^2+4ab+3b^2}+\frac{b}{a^2+5ab+6b^2}-\frac{a}{a^2+3ab+2b^2}$.

25. $\frac{a-1}{a-b}+\frac{a+1}{a+b}-\frac{2(a^2-b)}{a^2-b^2}$.

186. भिन्नों का गुणन ।

कल्पना करो कि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो भिन्न हैं और $\frac{a}{b}=x$, $\frac{c}{d}=y$, तो उस अवस्था में $a=bx$, $c=dy$;

$\therefore \quad ac=bxdy=bd\times xy$,

दोनों पक्षों को bd से भाग देने पर, $xy=\frac{ac}{bd}$;

$\therefore \quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

अतएव दो भिन्नों का गुणनफल एक ऐसी भिन्न है जिसका अंश दिये हुए अंशों के गुणनफल के समान है और जिसका हर दिये हुए हरों के गुणनफल के समान होगा।

तीन या तीन से अधिक भिन्नों का गुणनफल भी उपर्युक्त नियम द्वारा प्राप्त होता है। जैसे,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}, \text{ इत्यादि ।}$$

उदाहरण 1. सरल करो :— $\frac{4ab^2c}{3a^2bc^2}\times\frac{6a^3bc}{8ab^3c^2}$.

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=\frac{4ab^2c\times 6a^3bc}{3a^2bc^2\times 8ab^3c^2}$$

$$=\frac{24a^4b^3c^2}{24a^3b^4c^4}=\frac{a}{bc^2}.$$

उदाहरण 2. सरल करो:— $\frac{a^2-x^2}{a^3+x^3}\times\frac{a^2-ax+x^2}{(a-x)^2}$.

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=\frac{(a^2-x^2)(a^2-ax+x^2)}{(a^3+x^3)(a-x)^2}$$

$$=\frac{(a+x)(a-x)(a^2-ax+x^2)}{(a+x)(a^2-ax+x^2)(a-x)^2}=\frac{1}{a-x}.$$

187. भिन्नों का भाग ।

कल्पना करो कि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो भिन्न हैं और $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=x$.

इस अवस्था में अनु० 124 के अनुसार $\frac{a}{b}=x\times\frac{c}{d}$.

दोनों पक्षों को $\frac{d}{c}$ से गुणा करने से,

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=x\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}$$
$$=x\times\frac{cd}{cd} \quad \text{[अनु० 186]}$$
$$=x;$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

अतएव एक भिन्न को दूसरी एक भिन्न द्वारा यदि भाग करना हो, तो पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम (Reciprocal) से गुणा करना होता है।

उदाहरण 1. 1 को $\frac{x}{y}$ से भाग दो।

$$1\div\frac{x}{y}=1\times\frac{y}{x}=\frac{y}{x}.$$

उदाहरण 2. $\frac{4a^2bc}{3c^2yz}$ को $\frac{2abc}{3xyz}$ से भाग दो।

$$\frac{4a^2bc}{3x^2yz}\div\frac{2abc}{3xyz}=\frac{4a^2bc}{3x^2yz}\times\frac{3xyz}{2abc}=\frac{12a^2bcxyz}{6x^2yzabc}=\frac{2a}{x}.$$

उदाहरण 3. सरल करो :— $\frac{4a^2-9b^2}{(2x-y)^2}\div\frac{(2a-3b)^2}{4x^2-y^2}.$

दी हुई राशि

$$=\frac{4a^2-9b^2}{(2x-y)^2}\times\frac{4x^2-y^2}{(2a-3b)^2}=\frac{(4a^2-9b^2)(4x^2-y^2)}{(2x-y)^2(2a-3b)^2}$$
$$=\frac{(2a+3b)(2a-3b)(2x+y)(2x-y)}{(2x-y)(2x-y)(2a-3b)(2a-3b)}=\frac{(2a+3b)(2x+y)}{(2x-y)(2a-3b)}.$$

उदाहरण 4. सरल करो :—

$$\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{a^4-b^4}\times\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\div\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}.$$

दी हुई राशि $=\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{a^4-b^4}\times\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\times\frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}$

$$=\frac{4ab(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$$
$$=\frac{4ab}{(a-b)^2}.$$

प्रश्नावली 64.

सरल करो :—

1. $\frac{4a}{5b} \times \frac{5c}{2a}$.

2. $\frac{4ab}{7xy} \times \frac{14x^2}{3a^2}$.

3. $\frac{8b^2c^2}{5x^2y^2} \times \frac{3xy}{16bc}$.

4. $\frac{16a^2x^3}{7b^2y^3} \times \frac{14b^3y^2}{24a^3x^2}$.

5. $\frac{p^3q^3m^2}{a^3b^3x^2} \times \frac{a^2b^2x}{pq^3m^2}$.

6. $\frac{4p^{10}a^7}{13q^8b^{15}} \times \frac{26q^{10}b^{10}}{36p^9a^9}$

7. $\frac{a^2b^5}{x^2y^5} \div \frac{a^3b^3}{x^3y^3}$.

8. $\frac{m^4n^3}{c^3d^5} \div \frac{m^2n^2}{c^2d^2}$.

9. $\frac{45b^2c}{2x^2z} \div \frac{15bc^2}{xz}$.

10. $\frac{p^2q^3r}{x^3y^2z} \times \frac{x^2z^2}{q^2r^2} \div \frac{pq}{xy}$.

11. $\frac{abc}{xyz} \times \frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2} \div \frac{x^3y^3z^3}{a^3b^3c^3}$.

12. $\frac{a^2-x^2}{2x} \times \frac{3a}{a-x}$.

13. $\frac{4(b-c)}{ab} \times \frac{bc}{b^2-c^2}$.

14. $\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2} \times \frac{a-x}{a+x}$.

15. $\frac{p^2-9q^2}{4pq} \div \frac{p+3q}{q}$.

16. $\frac{4mn}{m^2-4n^2} \div \frac{n}{m-2n}$.

17. $\frac{abc}{b^3-c^3} \div \frac{bc}{b^2+bc+c^2}$.

18. $\frac{a^2-ab}{b^2-bc} \times \frac{b^2+ab}{c^2+bc} \times \frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}$.

19. $\frac{4a(x^3+a^3)}{x^2+ax+a^2} \times \frac{x^3-a^3}{x^2-ax+a^2} \times \frac{x^2}{2a^2(x^2-a^2)}$.

20. $\frac{a^2+6ab+5b^2}{a^2-ab-12b^2} \times \frac{a^2+5ab+6b^2}{a^2+7ab+10b^2}$.

21. $\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{ab}{xy}+\frac{b^2}{y^2}\right)$.

22. $\frac{3x^2-6x}{x^2-4} \times \frac{6x+12}{27x^3}$.

23. $\frac{x+y+z}{(x+z)^2-y^2} \times \frac{z^2-(x-y)^2}{xy-y^2-yz}$.

24. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}\right)$.

25. $\left(\dfrac{a^2-ab}{x^2-xy}\right)^2 \times \left(\dfrac{b^2+ab}{y^2+xy}\right)^2 \div \dfrac{a^2b^2(a+b)^2}{x^2y^2(x-y)^2}.$

26. $\dfrac{4a^2-9ax-9x^2}{4a^2+19ax+12x^2} \times \dfrac{a^2+6ax+8x^2}{a^2+ax-2x^2}.$

27. $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+5a+6} \div \dfrac{a^2+7a+12}{a^2+9a+20} \div \dfrac{a^2+11a+30}{a^2+13a+42}.$

28. $\dfrac{a^2-3a+2}{a^2-5a+6} \div \dfrac{a^2-7a+12}{a^2-9a+20} \div \dfrac{a^2-11a+30}{a^2-13a+42}.$

29. $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \div \dfrac{(a-b)^2}{a^3+b^3} \div \dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6}.$

30. $\dfrac{x^4-y^4}{x^2y^2(x^3-y^3)} \div \dfrac{x-y}{x^3y-xy^3} \div \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}.$

31. $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2} \div \dfrac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}.$

32. $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} \div \dfrac{a-b}{a(a+b)} \div \dfrac{a}{a^2+b^2}.$

33. $\dfrac{a^4-b^4}{a^3-b^3} \div \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \div \dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}.$

34. $\left(\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}\right) \div \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right) \times \dfrac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}.$

35. $\dfrac{a^2+5a}{b^2+3b} \div \dfrac{b^2+4b+3}{a^2-2a-35} \div \dfrac{a^2b-7ab}{ab^2+ab}.$

36. $\dfrac{x^3-4x}{3x^2+5x} \div \dfrac{3x^2+8x+5}{x^2+x-6} \div \dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}.$

37. $\dfrac{x-y}{x^2-y^2} \div \dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \div \dfrac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4} \div \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2y^2+y^4}.$

38. $\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}\right)\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{b+c}\right) \div \dfrac{b^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$

39. $\dfrac{4(a^2-1)}{3a^2-3a} \div \dfrac{a^2+2a+1}{a^2+3a+2} \div \dfrac{a^2-10a-24}{a^2-17a+60} \div \dfrac{3a^2-15a}{a^3+1}.$

40. $\left(1+\dfrac{x^3}{y^3}\right)\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right) \div \left(1+\dfrac{y}{x}\right)\left(1-\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right).$

——:o:——

पन्द्रहवाँ अध्याय

कठिन सरल समीकरण

188. सातवें अध्याय में बतलाया गया है कि सरल (Simple) समीकरण में केवल एक अज्ञात राशि या अव्यक्त पद और उसका प्रथम घात हुआ करते हैं। उसको हल करते समय अज्ञात राशि या अव्यक्त पद के जिस विशेष मान से समीकरण के दोनों पक्षों का समत्व सिद्ध होता है वही मान निकाला जाता है। इस अध्याय में सरल समीकरण सम्बन्धी कुछ कठिन विषयों की आलोचना की जायगी।

189. उपसिद्धान्त। सरल समीकरण का एक से अधिक मूल होना सम्भव नहीं है।

मान लो कि $px+q=0$ एक सरल समीकरण है। यदि इसका एक से अधिक मूल होना सम्भव है, तो कल्पना करो कि a और β इसके दो भिन्न भिन्न मूल हैं।

चूँकि इस समीकरण का मूल a है,

इसलिए, $pa+q=0$;

इसी प्रकार β एक मूल होने पर

$$p\beta+q=0.$$

$\therefore \quad p(a-\beta)=0.$ [पहले को दूसरे में से घटाने पर।]

किन्तु p का मान शून्य नहीं है, इसलिए $a-\beta=0$, अर्थात् $a=\beta$ अर्थात् a और β एक ही मूल हैं।

अतएव सरल समीकरण में एक से अधिक मूल होना सम्भव नहीं है। इस उपसिद्धान्त से ज्ञात हुआ कि किसी सरल समीकरण के दोनों पक्षों का समत्व अज्ञात राशि या अव्यक्त पद के इस एक मान निकाले जाने से सिद्ध किया जाता है। केवल इसी एक मान द्वारा दोनों पक्षों की समता बनी रहेगी। उसके अतिरिक्त और किसी मान से रक्षित न हो सकेगी।

190. सहज सरल समीकरण [अनु० 89 देखो ।]

उदाहरण 1. हल करो:— $(x-2)^2+(x-3)^2=(2x+1)(x-4)$.

$$(x-2)^2+(x-3)^2=(2x+1)(x-4),$$

या, $$x^2-4x+4+x^2-6x+9=2x^2-7x-4,$$

या, $$2x^2-10x+13=2x^2-7x-4,$$

या, पक्षान्तरानयन द्वारा, $$-10x+7x=-4-13,$$

या, $$-3x=-17,$$

या, $$3x=17;$$

$\therefore$ $$x=\tfrac{17}{3}.$$

उदाहरण 2. हल करो :—

$$x-\left(3x-\frac{2x+5}{10}\right)=\frac{1}{6}\left(2x+67\right)+\frac{5}{3}\left(1+\frac{x}{5}\right).$$

विकोष्ठिकरण द्वारा,

$$x-3x+\frac{2x+5}{10}=\frac{1}{3}x+\frac{67}{6}+\frac{5}{3}+\frac{x}{3},$$

पक्षान्तरानयन द्वारा,

$$x-3x+\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x=\frac{67}{6}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2},$$

या, $$-\frac{37}{15}x=\frac{74}{6},$$

$\therefore$ $$x=-\frac{74}{6}\times\frac{15}{37}=-5.$$

उदाहरण 3. हल करो :— $(x-a)^2+(x-b)^2=(2x-a)(x+b)$.

दोनों पक्षों के विकोष्ठिकरण द्वारा,

$$x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2=2x^2-ax+2bx-ab,$$

पक्षान्तरानयन द्वारा,

$$-2ax-2bx+ax-2bx=-a^2-b^2-ab,$$

या, $$-ax-4bx=-a^2-b^2-ab,$$

या, $$ax+4bx=a^2+b^2+ab,$$

या. $$(a+4b)x=a^2+b^2+ab.$$

$$x=\frac{a^2+b^2+ab}{a+4b}.$$

प्रश्नावली 65.

हल करो :—

1. $(2x+1)^2+(3x-1)^2=(x-2)(13x-1).$
2. $(x+1)(x+2)(x+3)=(x+5)(x^2+x-1).$
3. $(x-1)(x-2)(x-3)=(x^2+x-1)(x-7).$
4. $\frac{1}{7}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{5}(x+\frac{2}{3})=\frac{43}{40}.$
5. $\frac{1}{3}(2x-3)-\frac{1}{5}(3x-5)+\frac{1}{6}(5x+3)-\frac{1}{10}(7x+5)=4.$
6. $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{5}(x+3)=9.$
7. $\frac{1}{4}(4-x)-\frac{1}{5}(5-x)+\frac{1}{6}(6-x)=1.$
8. $\frac{3}{7}(5x-13)-\frac{2}{5}(4x-9)=\frac{1}{3}(x-2)-(10-x).$
9. $\frac{2}{9}(x-3)+\frac{5}{7}(\frac{2}{3}x+4)=\frac{8}{9}(x-\frac{5}{2}).$
10. $\frac{1}{4}(\frac{7}{3}x-2)-\frac{1}{3}(5x-\frac{1}{2})=\frac{1}{20}(x-8)-3\frac{1}{3}.$
11. $\frac{1}{2}(4x-3)+\frac{1}{3}(5x-7)+\frac{1}{4}(6x-5)=25\frac{1}{12}.$
12. $\frac{1}{13}(x+3)+\frac{1}{3}(2x-17)+\frac{1}{10}(3x-20)=3.$
13. $\frac{1}{3}(4x-1)+\frac{1}{5}(8x-3)-\frac{1}{7}(12x-5)=\frac{41}{105}.$
14. $(x+2a)^2+(x+3a)^2=2(x-a)(x-4a).$
15. $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=3(x-b)(x-c).$
16. $(x-a)^2+(x-b)^2=(x+a)^2+(x+b)^2.$
17. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$
18. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3.$
19. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0.$
20. $\frac{1}{4}(x+3)-\frac{1}{5}(x+4)=\frac{1}{6}(x+5)-\frac{1}{7}(x+6).$
21. $\frac{1}{6}(x+5)-\frac{1}{8}(x+1)=\frac{1}{4}(x+3).$
22. $\frac{1}{7}(2x-9)+\frac{1}{8}(3x-8)+\frac{1}{5}(4x-17)=6.$
23. $\frac{\frac{1}{5}x-4}{4}+\frac{\frac{1}{10}x+8}{6}-\frac{\frac{1}{4}x+5}{5}=1.$
24. $\frac{1}{4}(10x-1)+\frac{1}{2}(5x-1)-\frac{3}{4}(7x-1)=0.$
25. $\frac{1}{5}(3x-7)+\frac{1}{4}(7x-11)=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{4})-5$

191. भिन्न-समीकरण ।

इस जाति के समीकरण में अज्ञात राशि (अव्यक्त पद) भिन्नों के हरों या अंशों और हरों दोनों में वर्तमान रह सकती है । इसे हल करने से पहले दोनों पक्षों को दोनों पक्षों की भिन्नों के हरों के ल० स० अ० से गुणा करना पड़ता है । ऐसा करने से समीकरण भिन्न-रहित हो जाता है । उस समय उसका हल पहले के अनुच्छेद में बतलाई गई रीति से होगा । किन्तु निम्नलिखित अनुच्छेदों में वर्णित प्रक्रियाओं का प्रयोग करने पर इस जाति के समीकरण बड़ी आसानी से हल किये जा सकते हैं ।

192. वज्रगुणन (Cross-multiplication).

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हो, तो $ad=bc$.

क्योंकि, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ के दोनों पक्षों को bd से गुणा करने पर

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd,$$

या, $ad=bc$.

उदाहरण । हल करो :— $\frac{2x-5}{x-4}=\frac{2x+1}{x-2}$.

वज्रगुणन द्वारा, $(2x-5)(x-2)=(2x+1)(x-4)$

या, $2x^2-9x+10=2x^2-7x-4$,

पक्षान्तरानयन द्वारा, $-9x+7x=-14$;

या, $-2x=-14$.

$\therefore$ $x=7$.

193. सिद्धान्त ।

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हो, तो $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ क्योंकि इन दोनों समीकरणों में से हर एक $ad=bc$ के समान है । [अनु॰ 192.]

उदाहरण । हल करो:— $\frac{2x^2-6x+1}{2x^2-4x-1}=\frac{x-3}{x-2}$.

ऊपर के सिद्धान्त से,

$$\frac{2x^2-6x+1}{x-3}=\frac{2x^2-4x-1}{x-2},$$

या, $$\frac{2x(x-3)+1}{x-3}=\frac{2x(x-2)-1}{x-2},$$

या, $$2x+\frac{1}{x-3}=2x-\frac{1}{x-2},$$

या, $$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{x-2};$$

∴ अनु० 192 से, $$x-2=-(x-3),$$

या, $$2x=5;$$

∴ $$x=\tfrac{5}{2}.$$

194. आवश्यकतानुसार पक्षान्तरानयन और पदों को एकत्र करना ।

उदाहरण 1. हल करो:— $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$.

पक्षान्तर-द्वारा, $$\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-16},$$

या, $$\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-16};$$

वज्रगुणन-द्वारा, $$4(7x-16)=15(2x-4),$$

या, $$28x-64=30x-60,$$

या, $$2x=-4;$$

∴ $$x=-2.$$

उदाहरण 2. हल करो:— $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$.

∵ $$\frac{3}{x-3}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-3};$$

∴ $$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-3},$$

पक्षान्तर द्वारा, $$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-2},$$

या, $$\frac{-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-3)(x-2)},$$

दोनों पक्षों को $x-3$ से गुणा करने और 2 से भाग देने पर,

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-2},$$

वज्रगुणन द्वारा $$-(x-2)=x-1,$$

या, $$2x=3,$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2}.$$

उदाहरण 3. सरल करोः— $\frac{21}{7x-3}+\frac{12}{3x+5}=\frac{56}{8x+3}.$

दायाँ पक्ष $=\frac{32}{8x+3}+\frac{24}{8x+3},$

इसलिए, $$\frac{21}{7x-3}+\frac{12}{3x+5}=\frac{32}{8x+3}+\frac{24}{8x+3} \quad \ldots\ldots(i)$$

पक्षान्तर द्वारा, $$\frac{21}{7x-3}-\frac{24}{8x+3}=\frac{32}{8x+3}-\frac{12}{3x+5},$$

या, $$\frac{135}{(7x-3)(8x+3)}=\frac{124}{(8x+3)(3x+5)} \quad \ldots\ldots(ii)$$

दोनों पक्षों को $8x+3$ से गुणा करने पर,

$$\frac{135}{7x-3}=\frac{124}{3x+5},$$

वज्रगुणन द्वारा, $$135(3x+5)=124(7x-3),$$

या, $$405x+675=868x-372,$$

पक्षान्तर द्वारा, $$463x=1047;$$

$$\therefore \quad x=\frac{1047}{463}=2\frac{121}{463}.$$

टीका—(i) दायें पक्ष के दोनों भिन्नों के अंश 32 और 24 हैं जो इस प्रकार प्राप्त होते हैं: $\frac{8\times12}{3}=32$, $\frac{8\times21}{7}=24$. दायें पक्ष को तोड़कर इस प्रकार लिखा गया है। इसलिए (ii) के भिन्नों के अंश में x नहीं है क्योंकि $8\times21=7\times24$ और $3\times32=8\times12$.

195. भाग द्वारा सरल करना ।

कभी कभी भिन्नों के अंशों में उनके हरों से भाग देने से ही हल करने में सुविधा होती है।

उदाहरण 1. हल करो:— $\frac{3x+2}{x-1}+\frac{2x-4}{x+2}=5$.

भिन्नों के अंशों को उन्हीं के हरों से भाग देने से,

$$3+\frac{5}{x-1}+2-\frac{8}{x+2}=5,$$

पक्षान्तर द्वारा, $$\frac{5}{x-1}=\frac{8}{x+2},$$

वज्रगुणन द्वारा, $$5(x+2)=8(x-1),$$

या, $$5x+10=8x-8,$$

या, $$-3x=-18,$$

$\therefore$ $$x=\frac{-18}{-3}=6.$$

उदाहरण 2. हल करो:—

$$\frac{4x-15}{x-4}+\frac{7x-62}{x-9}=\frac{5x-34}{x-7}+\frac{6x-35}{x-6}.$$

भिन्नों के अंश को उन्हीं के हर से भाग देने से,

$$4+\frac{1}{x-4}+7+\frac{1}{x-9}=5+\frac{1}{x-7}+6+\frac{1}{x-6};$$

$\therefore$ $$\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-6},$$

पक्षान्तर द्वारा, $$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-9},$$

या, $$\frac{-3}{(x-4)(x-7)}=\frac{-3}{(x-6)(x-9)},$$

∴ $$\frac{1}{x^2-11x+28}=\frac{1}{x^2-15x+54},$$

[-3 से भाग देने पर]

या वज्रगुणन द्वारा, $x^2-11x+28=x^2-15x+54,$

या, $4x=26;$

∴ $$x=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}=6\tfrac{1}{2}.$$

उदाहरण 3. हल करो:—

$$\frac{2x^2-ax-a^2+b}{2x^2+ax-2bx+a-ab}=\frac{x-a}{x-b}.$$

अनु० 193 के सिद्धान्त के अनुसार,

$$\frac{2x^2-ax-a^2+b}{x-a}=\frac{2x^2+ax-2bx+a-ab}{x-b}$$

भाग देने पर, $$2x+a+\frac{b}{x-a}=2x+a+\frac{a}{x-b};$$

∴ $$\frac{b}{x-a}=\frac{a}{x-b};$$

∴ $b(x-b)=a(x-a)$, [वज्रगुणन द्वारा]

या, $ax-bx=a^2-b^2,$

या, $x(a-b)=a^2-b^2;$

∴ $x=a+b.$

प्रश्नावली 66.

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो:—

1. $\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2}{3x+2}.$
2. $\dfrac{2}{x-5}=\dfrac{7}{x-1}.$
3. $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3x}{3x-5}.$
4. $\dfrac{b}{x-a}=\dfrac{c}{x-b}.$

5. $\dfrac{a}{x-b-c}=\dfrac{b}{x-c-a}$. 6. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x+3}$.

7. $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-5}{x-4}$. 8. $\dfrac{4x-3}{3x+7}=\dfrac{8x-1}{6x+2}$.

9. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{x-1}$. 10. $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{6}{x-4}=\dfrac{11}{x-3}$.

11. $\dfrac{1}{3x+7}+\dfrac{10}{3x-7}=\dfrac{11}{3x+1}$. 12. $\dfrac{2x+3}{3}=\dfrac{x+4}{8}+\dfrac{13x^2}{24x+1}$.

13. $\dfrac{12x+1}{4}=\dfrac{15x-1}{5}+\dfrac{2x-5}{3x-1}$.

14. $\dfrac{14x-3}{9}=\dfrac{x-36}{2x+5}+\dfrac{70x+1}{45}$.

15. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{1}{x-8}$.

16. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-5} \quad \dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{x-11}$.

17. $\dfrac{2}{2x-3}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{2x+5}-\dfrac{1}{x+3}$.

18. $\dfrac{6x+1}{15}-\dfrac{2x-4}{7x-16}=\dfrac{2x-1}{5}$. 19. $\dfrac{24}{x-12}-\dfrac{15}{x-3}=\dfrac{9}{x-7}$.

20. $\dfrac{40x+3}{16}+\dfrac{5x-2}{4x-3}=\dfrac{5x-6}{2}$.

21. $\dfrac{2x+3}{x-1}+\dfrac{100x-1}{30}=\dfrac{10x-1}{3}$. 22. $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{6}{2x-9}$.

23. $\dfrac{1}{x-10}+\dfrac{2}{x-9}=\dfrac{6}{2x-19}$. 24. $\dfrac{8}{x-6}-\dfrac{5}{x-5}=\dfrac{3}{x-7}$.

25. $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{13}{12x-11}-\dfrac{1}{12x-23}$. 26. $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=\dfrac{2(a+b)}{2x-a-b}$.

27. $\dfrac{38}{2x-19}-\dfrac{9}{x-10}=\dfrac{10}{x-9}$. 28. $\dfrac{x^2-5x+6}{4x^2-23x+15}=\dfrac{x-2}{7(x-5)}$.

29. $\dfrac{x+7}{x+8}=\dfrac{4x^2+25x-21}{6x^2+43x-40}$. 30. $\dfrac{6x^2+17x+7}{9x^2-3x-20}=\dfrac{3x+7}{3x-5}$.

31. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-3}$. 32. $\frac{2x-6}{x-4}+\frac{6x-12}{2x-5}=\frac{10x-28}{2x-7}$.

33. $\frac{x+a-b}{x-b}+\frac{2x-2a+b}{x-a}=\frac{6x-a-b}{2x-a-b}$.

34. $\frac{3x-8}{x-3}+\frac{4x-25}{x-6}=\frac{5x-9}{x-2}+\frac{2x-11}{x-5}$.

35. $\frac{x-4}{x-1}+\frac{x-7}{x-3}+\frac{x-2}{x-9}=3$.

36. $\frac{2x+11}{x+5}-\frac{9x-9}{3x-4}=\frac{4x+13}{x+3}-\frac{15x-47}{3x-10}$.

37. $\frac{x^2-2x-2}{x-3}+\frac{x^2-2x-7}{x-4}=\frac{2x^2-7x-13}{x-5}$.

38. $\frac{x-5}{x-6} \quad \frac{x^2-5x+3}{x^2-6x+7}$.

39. $\frac{2x^2-5x-2}{x-3}+\frac{3x^2-x-3}{x-1}=\frac{x^2-5x-13}{x-7}+\frac{4x^2-19x-6}{x-5}$.

40. $\frac{x^2-9x-10}{x^2-10x-11}-\frac{x^2-2x-8}{x^2-3x-10}=\frac{x^2-7x-8}{x^2-8x-9}-\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$.

196. नीचे कुछ और भी उदाहरण दिये जा रहे हैं:—

उदाहरण 1. हल करो:— $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$.

प्रथम प्रक्रिया—अनु० 195 के उदाहरण 2 की प्रक्रिया का अवलम्बन करने से यह समीकरण हल हो जाता है।

द्वितीय प्रक्रिया—पक्षान्तरानयन करने से,

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3},$$

या, $$\frac{2x^2-16x+19}{x^2-9x+14}=\frac{2x^2-16x+27}{x^2-9x+18},$$

या, $$\frac{2x^2-16x+19}{2x^2-16x+27}=\frac{x^2-9x+14}{x^2-9x+18},$$ [अनु० 193.]

या, $$1-\frac{8}{2x^2-16x+27}=1-\frac{4}{x^2-9x+18},$$ [भाग करने से]

दोनों पक्षों से 1 को हटाने और फिर -4 से दोनों पक्षों को भाग देने से,

$$\frac{2}{2x^2-16x+27}=\frac{1}{x^2-9x+18},$$

या, $2x^2-18x+36=2x^2-16x+27$, [वज्रगुणन द्वारा]

या, $2x=9$; $\therefore\ x=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$.

उदाहरण 2. हल करो :— $\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2=\frac{(x+5)(x+1)}{x(x+4)}$.

विकोष्ठिकरण करने से,

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+4}=\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x};$$

$\therefore$ $$\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+5}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x};$$

या, $1+\frac{4}{x^2+6x+5}=1+\frac{4}{x^2+4x}$,

या, $x^2+6x+5=x^2+4x$,

या, $2x=-5$; $\therefore\ x=-\frac{5}{2}$.

उदाहरण 3. हल करो :— $\frac{4\cdot05}{9x}-\frac{\cdot3}{\cdot8-2x}=\frac{1\cdot8}{x}-\frac{3\cdot6}{2\cdot4-6x}$

प्रथम प्रक्रिया—पक्षान्तर करने से,

$$\frac{4\cdot05}{9x}-\frac{1\cdot8}{x}=\frac{\cdot3}{\cdot8-2x}-\frac{3\cdot6}{2\cdot4-6x},$$

या, $$\frac{4\cdot05-16\cdot2}{9x}=\frac{\cdot9-3\cdot6}{2\cdot4-6x},$$

या, $$\frac{-12\cdot15}{9x}=\frac{-2\cdot7}{2\cdot4-6x}.$$

या, $$\frac{1\cdot35}{x}=\frac{\cdot9}{\cdot8-2x},$$

या, $\cdot9x=1\cdot35(\cdot8-2x)=1\cdot08-2\cdot7x$.

या, $3\cdot6x=1\cdot08$;

$\therefore$ $x=\cdot3$.

द्वितीय प्रक्रिया—दशमलवों को साधारण भिन्नों के रूप में लाने से,

$$\frac{405}{900x}-\frac{3}{8-20x}=\frac{18}{10x}-\frac{36}{24-60x},$$

या, $$\frac{9}{20x}-\frac{3}{8-20x}=\frac{18}{10x}-\frac{12}{8-20x};$$

∴ $$\frac{9}{20x}-\frac{18}{10x}=\frac{3}{8-20x}-\frac{12}{8-20x},$$

या, $$\frac{-27}{20x}=\frac{-9}{8-20x},$$

या, $$\frac{3}{20x}=\frac{1}{8-20x};$$

∴ $$20x=24-60x,$$

या, $$80x=24;$$

∴ $$x=\tfrac{24}{80}=\tfrac{3}{10}.$$

उदाहरण 4. हल करो:—$\dfrac{a+c}{x-2b}-\dfrac{b+c}{x-2a}=\dfrac{a-c}{x+2b}-\dfrac{b-c}{x+2a}.$

पक्षान्तर द्वारा, $$\frac{a+c}{x-2b}-\frac{a-c}{x+2b}=\frac{b+c}{x-2a}-\frac{b-c}{x+2a},$$

या, $$\frac{(a+c)(x+2b)-(a-c)(x-2b)}{x^2-4b^2}=\frac{(b+c)(x+2a)-(b-c)(x-2a)}{x^2-4a^2},$$

या, $$\frac{2cx+4ab}{x^2-4b^2}=\frac{2cx+4ab}{x^2-4a^2},$$

या, $$(2cx+4ab)\left\{\frac{1}{x^2-4b^2}-\frac{1}{x^2-4a^2}\right\}=0.$$ [पक्षान्तर द्वारा]

यहाँ दो या दो से अधिक राशियों का गुणनफल शून्य होने पर उनमें से एक राशि का मान शून्य होगा। a और b के भिन्न भिन्न होने के कारण मझले कोष्ठ के भीतर के व्यंजक का मान शून्य नहीं हो सकता।

∴ $$2cx+4ab=0;$$

∴ $$x=-\frac{2ab}{c}.$$

उदाहरण 5. हल करोः—$\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^3=\dfrac{x-2a+b}{x+a-2b}$.

चूँकि, $$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2\cdot\frac{x-a}{x-b},$$

इसलिए, $$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-2a+b}{x+a-2b},$$

दोनों पक्षों को $\dfrac{x-b}{x-a}$ से गुणा करने से,

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2=\frac{(x-2a+b)(x-b)}{(x+a-2b)(x-a)},$$

या, $$\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-2bx+b^2}=\frac{x^2-2ax+2ab-b^2}{x^2-2bx+2ab-a^2},$$

∴ $$\frac{x^2-2ax+2ab-b^2}{x^2-2ax+a^2}=\frac{x^2-2bx+2ab-a^2}{x^2-2bx+b^2},$$

या, $$1+\frac{2ab-b^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}=1+\frac{2ab-a^2-b^2}{x^2-2bx+b^2},$$

∴ $$x^2-2ax+a^2=x^2-2bx+b^2,$$

या, $$2x(a-b)=a^2-b^2,$$

$$x=\tfrac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a-b}=\tfrac{1}{2}(a+b).$$

उदाहरण 6. हल करोः—

$$\frac{4}{x^2+6x+8}+\frac{x}{x^2+5x+6}-\frac{3}{x^2+7x+12}=\frac{8x-11}{2x-3}-4$$

बायें पक्ष की भिन्नों के हरों के गुणनखण्डों का विश्लेषण करने से,

$$\frac{4}{(x+2)(x+4)}+\frac{x}{(x+2)(x+3)}-\frac{3}{(x+3)(x+4)}=\frac{8x-11}{2x-3}-4.$$

या, $$\frac{4(x+3)+x(x+4)-3(x+2)}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{2x-3},$$

या, $$\frac{x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{2x-3},$$

या, $$\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{2x-3},$$

या, $$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{2x-3};$$

$\therefore$ $$x+4=2x-3;$$

$\therefore$ $$x=7.$$

उदाहरण 7. हल करो:—$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2=\frac{x+2a+c}{x+2b+c}.$

विकोष्ठिकरण करने से, $$\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2+2bx+b^2}=\frac{x+2a+c}{x+2b+c};$$

$\therefore$ $$\frac{x^2+2ax+a^2}{x+2a+c}=\frac{x^2+2bx+b^2}{x+2b+c};$$

$\therefore$ $$x+\frac{a^2-cx}{x+2a+c}=x+\frac{b^2-cx}{x+2b+c};$$

$\therefore$ $$(a^2-cx)(x+2b+c)=(b^2-cx)(x+2a+c),$$

या, $$(a^2-c^2-2bc)x+a^2(2b+c)=(b^2-c^2-2ac)x+b^2(2a+c),$$

या, $$(a^2-b^2+2ac-2bc)x=b^2(2a+c)-a^2(2b+c),$$

या, $$(a-b)(a+b+2c)x=2ab(b-a)+c(b^2-a^2),$$

या, $$(a+b+2c)x=-2ab-c(a+b);$$

$\therefore$ $$x=-\frac{2ab+bc+ac}{a+b+2c}.$$

प्रश्नावली 67.

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो:—

1. $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-8}{x-9}-\frac{x-9}{x-10}.$

2. $\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-10}{x-11}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-11}{x-12}.$

3. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}.$

4. $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+4}{x+3}=\frac{x+5}{x+4}-\frac{x+6}{x+5}.$

5. $\frac{3-2x}{1-2x}-\frac{2x-5}{2x-7}=1-\frac{4(x^2-1)}{7-16x+4x^2}.$

6. $\left(\dfrac{x-6}{x+7}\right)^2=\dfrac{(x-7)(x-5)}{(x+6)(x+8)}$.

7. $\left(\dfrac{x+10}{x-13}\right)^2=\dfrac{(x+8)(x+12)}{(x-11)(x-15)}$. 8. $\dfrac{x-2}{\cdot 05}-\dfrac{x-4}{\cdot 0625}=56$.

9. $\cdot 5x=\dfrac{\cdot 02x+\cdot 07}{\cdot 03}-\dfrac{x+2}{9}=9\cdot 5$.

10. $\dfrac{x}{3x-\cdot 3}=\dfrac{15x+7\cdot 5}{45x-\cdot 5}$.

11. $\dfrac{a}{bx+b-a}-\dfrac{b}{ax+a-b}=\dfrac{a^2-b^2}{abx+a^2-b^2}$.

12. $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-a+c}=\dfrac{1}{x-b-c}-\dfrac{1}{x-b}$.

13. $\dfrac{1}{x-b^2-c^2-a^2}-\dfrac{1}{x-b^2-c^2-d^2}$

$$=\dfrac{1}{x+b^2+c^2-a^2}-\dfrac{1}{x+b^2+c^2-d^2}.$$

14. $\left(\dfrac{x-5}{x-6}\right)^3=\dfrac{x-4}{x-7}$. 15. $\left(\dfrac{3x-2a-b}{3x-a-2b}\right)^3=\dfrac{x-a}{x-b}$.

16. $\left(\dfrac{3x-28}{3x-26}\right)^3=\dfrac{x-10}{x-8}$.

17. $\dfrac{12}{x^2+12x+35}+\dfrac{x}{x^2+11x+30}-\dfrac{6}{x^2+13x+42}$

$$=\dfrac{24x-7}{3x-1}-8.$$

18. $\dfrac{x}{x^2-9x+18}-\dfrac{16}{x^2-4x-12}+\dfrac{5}{x^2-x-6}=6-\dfrac{18x-49}{3x-8}$.

19. $\left(\dfrac{x+6}{x-3}\right)^2=\dfrac{x+14}{x-4}$. 20. $\left(\dfrac{x-7}{x-11}\right)^2=\dfrac{x-17}{x-25}$.

——:o:——

सोलहवाँ अध्याय

सरल समीकरणसम्बन्धी प्रश्नावली

197. सरल समीकरण की सहायता से प्रश्नों के हल करने की रीति सातवें अध्याय में बतलाई गई है। इस अध्याय में और भी बहुत से सरल समीकरण सम्बन्धी प्रश्न हल किये जायँगे।

उदाहरण 1. संख्या सम्बन्धी प्रश्न।

तीन अङ्कों से बनी हुई किसी संख्या का पहला अङ्क दूसरे अङ्क का और दूसरा अङ्क तीसरे अङ्क का दूना है। उस संख्या को उलट कर लिखने से जो संख्या बनती है वह पूर्वोक्त संख्या से 594 कम होती है। बताओ वह संख्या कौन सी है।

मान लो कि तीसरा अङ्क x है। ऐसी दशा में दूसरा अङ्क $2x$ और पहला अङ्क $4x$ है। इसलिए वह संख्या $=4x.100+2x.10+x=421x.$

उलट कर लिखने से नई संख्या

$$=x.100+2x.10+4x=124x.$$

∴ प्रश्न के अनुसार, $421x-124x=594,$

या, $297x=594,$

∴ $x=2.$

∴ पहला अङ्क 8, दूसरा अङ्क 4 और तीसरा अङ्क 2 है।

इसलिए निर्णय संख्या $=842.$

उदाहरण 2. समय और काम सम्बन्धी प्रश्न।

किसी काम को क 16 दिन में कर सकता है, क 9 दिन तक काम करता रहा। उसके बाद ख आकर सम्मिलित होगया और दोनों ने मिलकर शेष काम को 3 दिन में कर लिया; बताओ ख अकेला उस काम को कितने दिनों में कर सकेगा।

मान लो कि ख उस काम को x दिन में कर सकता है। चूँकि क एक काम का $\frac{1}{16}$ भाग 1 दिन में कर सकता है, इसलिए 9 दिन में वह उस काम का $\frac{9}{16}$ भाग करलेगा। अतएव उस काम का बचा हुआ $\frac{7}{16}$ भाग क और ख दोनों मिलकर 3 दिन में करलेंगे।

किन्तु क और ख दोनों मिलकर उस काम का $\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{x}\right)$ भाग 1 दिन में करते हैं।

इसलिए, $$3\times\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{x}\right)=\frac{7}{16},$$

या, $$\frac{3(x+16)}{16x}=\frac{7}{16},$$

$\therefore$ $$48(x+16)=7.16x,$$

या, $$48x+768=112x,$$

या, $$64x=768,$$

$\therefore$ $$x=12.$$

इसलिए ख अकेला उस काम को 12 दिन में पूरा कर सकेगा।

उदाहरण 3. धारा के अनुकूल या प्रतिकूल चलने के सम्बन्ध के प्रश्न।

स्थिर पानी में डाँड़ चलाते हुए किसी नाव के नाविक प्रति घंटा 8 मील की चाल से चल सकते हैं और धारा के प्रतिकूल जाने में धारा के अनुकूल जाने से तिगुना समय लगता है। धारा का वेग बताओ।

मान लो कि धारा का वेग प्रति घंटा x मील है।

इसलिए धारा के अनुकूल जाते समय नाव का वेग प्रति घंटा $8-x$ मील होगा।

$\therefore$ प्रश्न के अनुसार, $8+x=3(8-x)$,

या, $$4x=16;$$

$\therefore$ $$x=4.$$

$\therefore$ धारा का वेग प्रति घंटा 4 मील है।

उदाहरण 4. वेग और समय सम्बन्धी प्रश्न।

एक एक्सप्रेस ट्रेन दोपहर के 3 बजे ब्रिस्टल से चलकर 6 बजे शाम को लंदन पहुँची। एक दूसरी साधारण ट्रेन लंदन से दोपहर के 1 बजकर

30 मिनट पर चलकर शाम को 6 बजे ब्रिस्टल पहुँची। बताओ वे दोनों किस समय एक दूसरी से मिलीं।

मान लो कि ब्रिस्टल से लंदन की दूरी x मील है। ऐसी दशा में एक्सप्रेस ट्रेन का वेग प्रति घंटा $\frac{1}{3}x$ मील और साधारण ट्रेन का वेग प्रति घंटा $\frac{x}{4\frac{1}{2}} = \frac{2x}{9}$ मील है।

1 बजकर 30 मिनट से 3 बजे तक साधारण ट्रेन $\frac{2}{9}x \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x$ मील जायगी।

इसलिए दोपहर के 3 बजे से दोनों ट्रेनें $\frac{1}{3}x$ मील और $\frac{2}{9}x$ मील के वेग से एक दूसरी की ओर चलीं।

वे दोनों मिलकर एक घंटा में $\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x$ मील चलती हैं और उन दोनों के बीच की दूरी $\frac{2}{3}x$ मील है। इसलिए दोपहर के 3 बजे से $\frac{2}{3}x \div \frac{5}{9}x = \frac{2x}{3} \times \frac{9}{5x} = \frac{6}{5}$ घंटा = 1 घंटा 12 मिनट बाद दोनों ट्रेनें एक दूसरी से मिलेंगी अर्थात् शाम को 4 बजकर 12 मिनट पर उन दोनों का मेल होगा।

उदाहरण 5. क्रय-विक्रय सम्बन्धी प्रश्न।

एक घोड़ा और एक गाड़ी 90 पौंड में खरीदे गये। उन दोनों के बेचने पर घोड़े में 12 प्रति सैकड़ा लाभ हुआ किन्तु गाड़ी में 4 प्रति सैकड़ा हानि हुई। घोड़ा और गाड़ी दोनों की मिली हुई क़ीमत का 6 प्रति सैकड़ा लाभ हुआ हो, तो बताओ गाड़ी कितने पौंड में खरीदी गई थी।

मान लो कि गाड़ी का क्रय मूल्य x पौंड है। ऐसी दशा में घोड़े का क्रय मूल्य $(90 - x)$ पौंड हुआ।

चूंकि गाड़ी 4 प्रति सैकड़ा हानि पर बेची गई, इसलिए हानि $= x \cdot \frac{4}{100}$ पौं०। इसलिए गाड़ी का विक्रय मूल्य $= x - \frac{4}{100}x = x(1 - \frac{4}{100})$ पौं०।

घोड़े के मूल्य पर 12 प्रति सैकड़ा लाभ $= (90 - x) \cdot \frac{12}{100}$ पौं० लाभ। इसलिए घोड़े का विक्रय मूल्य $= (90 - x) + (90 - x) \cdot \frac{12}{100} = (90 - x)(1 + \frac{12}{100})$ पौंड। इसलिए घोड़ा और गाड़ी दोनों का विक्रय मूल्य

$$= x(1 - \tfrac{4}{100}) + (90 - x)(1 + \tfrac{12}{100}) \text{ पौं० ।}$$

प्रश्न के अनुसार यह 90 पौंड पर 6 प्रति सैकड़ा लाभ के समान है;

इसलिए, $x(1-\frac{4}{100})+(90-x)(1+\frac{12}{100})=90(1+\frac{6}{100})$,

या, $$\frac{24}{25}x+\frac{504}{5}-\frac{28}{25}x=\frac{477}{5},$$

या, $$\frac{4}{25}x=\frac{504}{5}-\frac{477}{5}=\frac{27}{5};$$

$\therefore$ $$x=\frac{27}{5}\times\frac{25}{4}=\frac{135}{4}=33\frac{3}{4}.$$

$\therefore$ गाड़ी का क्रय मूल्य 33 पौं० 15 शि० है।

उदाहरण 6. मिलावट सम्बन्धी प्रश्न।

दो बरतनों में पानी मिला हुआ दूध रखा हुआ है। इन दोनों बरतनों में दूध और पानी का अनुपात क्रमशः 4:3 और 3:4 है। पहले बरतन के तीन गैलन में दूसरे बरतन के कितने गैलन मिला देने से नये मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 6 : 7 हो जायगा ?

मानलो कि दूसरे बरतन से x गैलन लेने पड़ेंगे।

पहले बरतन के तीन गैलन में $\frac{3\times4}{7}=\frac{12}{7}$ गैलन दूध है,

दूसरे बरतन के x गैलन में $x.\frac{3}{7}=\frac{3}{7}x$ गैलन दूध है ;

इसलिए नये मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात

$$(\tfrac{12}{7}+\tfrac{3}{7}x):(3+x)-(\tfrac{12}{7}+\tfrac{3}{7}x).$$

प्रश्न के अनुसार यह अनुपात 6 : 7 के समान है;

$\therefore$ $$\frac{12+3x}{7}:\frac{9}{7}+\frac{4x}{7}=6:7,$$

या, $$\frac{12+3x}{9+4x}=\frac{6}{7}.$$

$\therefore$ $$21x+84=24x+54.$$

या, $$3x=30;$$

$\therefore$ $$x=10.$$

इसलिए पहले बरतन के तीन गैलन में दूसरे बरतन के 10 गैलन मिलाना होगा।

उदाहरण 7. घड़ी सम्बन्धी प्रश्न।

5 और 6 बजे के बीच में घड़ी की दोनों सूइयाँ कब एक दूसरी से मिलेंगी ?

5 बजे घण्टा की सूई 5 पर और मिनट की सूई 12 पर रहती है और घण्टा भर में घण्टा की सूई मिनट के पाँच घरों को और मिनट की सूई

60 घरों को तै करती है। इसलिए मिनट की सूई जितनी देर में 1 घर पर जायगी, उतनी ही देर में घण्टे की सूई $\frac{1}{12}$ घर जायगी।

अब कल्पना करो कि 5 बजकर x मिनट पर दोनों सूइयाँ मिलती हैं। इतने समय में मिनट की सूई मिनट के x घर और घण्टे की सूई $\frac{x}{12}$ मिनट के घरों में जायगी।

चूँकि दोनों सूइयाँ उस समय एक ही स्थान पर होंगी,

इसलिए $x = 25 + \frac{1}{12}x$.

या, $\frac{11}{12}x = 25$; $\therefore$ $x = \frac{300}{11}$ मि० $= 27$ मि० $16\frac{4}{11}$ सि०;

$\therefore$ 5 बजकर 27 मि० $16\frac{4}{11}$ सि० पर दोनों सूइयाँ मिलेंगी।

उदाहरण 8. वर्ग-रचना सम्बन्धी प्रश्न।

यदि कुछ मनुष्य (या अन्य कोई वस्तु) कई समानान्तर और एक ही भाँति रखी हुई भिन्न भिन्न पंक्तियों में इस प्रकार सजाये जायँ कि प्रत्येक पंक्ति के मनुष्यों (या अन्य वस्तु) की संख्या कुल पंक्तियों की संख्या के समान हो तो उनको एक अन्तःपूर्ण वर्ग (Solid Square) में सजाया हुआ कहते हैं। [चित्र 1.]

```
*  *  *  *  *
*  *  *  *  *
*  *  *  *  *
*  *  *  *  *
*  *  *  *  *
```

चित्र 1.

किन्तु जब उक्त वर्ग के मध्यस्थल से एक समभाव में वर्तमान अन्तःपूर्ण वर्ग को हटा लिया जाता है तो बाक़ी बचे हुए वर्ग को अन्तःशून्य वर्ग (Hollow Square) कहते हैं। शून्य स्थान से बाहर की सीमा तक एक सीध में (या एक पंक्ति में) यदि a मनुष्य हों तो उस अन्तःशून्य वर्ग को a-गम्भीरतावाला अन्तःशून्य वर्ग कहेंगे। इसके सम्बन्ध में यह भी कहा जायगा कि उसकी गम्भीरता a है या वह a-गम्भीरतावाला (a-deep) है। [चित्र 2.]

```
*  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  .  .  .  *  *  *
*  *  *  .  .  .  *  *  *
*  *  *  .  .  .  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
```

चित्र 2.

दूसरे चित्र के अन्तःशून्य वर्ग की गम्भीरता 3 है। इसके शून्य स्थान विन्दुओं द्वारा अङ्कित किये गये हैं।

यदि किसी अन्तःशून्य वर्ग की गम्भीरता b हो और उसके सामने की पंक्ति के मनुष्यों की संख्या a हो, तो उस अन्तःशून्य वर्ग के मनुष्यों की संख्या $a^2-(a-2b)^2$ होगी। दूसरे चित्र में कुल $9^2-(9-2.3)^2 = 9^2-3^2=72$ तारक (*) चिह्न हैं।]

एक पलटन में 1000 सिपाही हैं; उन सब को एक अन्तःशून्य वर्ग में सजाने से उसकी गम्भीरता 10 होती है। बताओ सामने की पंक्ति के सिपाहियों की संख्या क्या है।

मान लो कि सामने की पंक्ति में x सिपाही हैं, तो वर्ग-क्षेत्र का शून्य स्थान भरने के लिए $(x-20)^2$ सिपाहियों की आवश्यकता पड़ेगी।

इसलिए अन्तःशून्य वर्ग के कुल सिपाहियों की संख्या

$$= x^2-(x-20)^2.$$

इसलिए प्रश्न के अनुसार, $x^2-(x-20)^2=1000$,

या, $40x-400=1000$,

या, $40x=1400$;

$\therefore \quad x=35.$

$\therefore$ सामने की पंक्ति में सिपाहियों की संख्या 35 है।

उदाहरण 9. यात्रियों के एक दल ने एक होटल में आकर देखा कि यदि हर एक यात्री सोने के लिए एक-एक कमरा ले तो 6 कमरे कम पड़ते हैं और यदि एक कमरे में दो-दो आदमी सोवें, तो 6 कमरे ख़ाली पड़े रह जाते हैं। बताओ कि यदि तीन-तीन यात्री एक कमरे में सोवें तो कितने कमरे ख़ाली पड़े रहेंगे ?

मान लो कि यात्रियों की संख्या x है, तो कमरों की संख्या $x-6$ है।

यदि प्रत्येक कमरे में दो-दो यात्री सोवें तो $\frac{1}{2}x$ कमरों की आवश्यकता होगी। इसलिए $(x-6)-\frac{1}{2}x=6$, $\therefore x=24$,

$\therefore$ कमरों की संख्या $=18$.

प्रत्येक कमरे में यदि तीन-तीन यात्री सोवें, तो $\frac{24}{3}=8$ कमरों की ज़रूरत पड़ेगी। इसलिए $18-8=10$ कमरे ख़ाली पड़े रहेंगे।

उदाहरण 10. किसी कमरे के फ़र्श की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 8 फ़ुट अधिक है। कमरे के भीतर यदि फ़र्श में चारों ओर दो-दो फ़ुट चौड़ी जगह छोड़ दी जाय, तो उस सारी जगह का क्षेत्रफल 240 वर्ग फ़ुट होता है। कमरे की लम्बाई बताओ।

मान लो कि कमरे की लम्बाई x फ़ुट है, तो उसकी चौड़ाई $(x-8)$ फ़ुट होगी और क्षेत्रफल $= x(x-8)$ वर्ग फ़ुट।

कमरे के फर्श में चारों तरफ़ 2 फ़ुट चौड़ी जगह छोड़ देने पर एक ऐसा आयत क्षेत्र बन जायगा जिसकी लम्बाई और चौड़ाई कमरे की लम्बाई और चौड़ाई से चार-चार फ़ुट कम होंगी।

इसलिए इस आयत का क्षेत्रफल $=(x-4)(x-8-4)=(x-4)(x-12)$ वर्ग फ़ुट।

$\therefore$ 2 फ़ुट चौड़ाई की खाली जगह का क्षेत्रफल $= x(x-8)-(x-4)(x-12)$ वर्ग फ़ुट।

प्रश्न के अनुसार, $x(x-8)-(x-4)(x-12)=240$.

या, $-8x+16x-48=240$.

या, $8x=288$.

$\therefore x=36$.

$\therefore$ कमरे की लम्बाई 36 फ़ुट है।

प्रश्नावली 68.

1. तीन अङ्कोंवाली किसी संख्या का दूसरा और तीसरा अङ्क अपने पूर्व के संलग्न अङ्कों से 1 कम है। यदि उन तीनों अङ्कों का योग 12 हो, तो बताओ वह संख्या कौनसी है।

2. तीन अङ्कोंवाली किसी संख्या का पहला अङ्क तीसरे अङ्क का तिगुना है और दूसरा अङ्क तीसरे अङ्क से 2 अधिक है। उस संख्या को उलट कर लिखने से जो संख्या बनती है वह पूर्वोक्त संख्या से 396 कम है, तो वह संख्या बताओ।

3. 127 को ऐसे चार भागों में बाँटो कि पहले भाग में 18 जोड़ने से, दूसरे भाग में से 5 घटाने से, तीसरे को 6 से गुणा करने से और चौथे को $2\frac{1}{2}$ से भाग देने से फल समान हो।

[संकेत—फल को x मानो, तो पहला भाग $=x-18$, इत्यादि।]

4. किसी भिन्न का हर उसके अंश से 5 अधिक है। उसके हर और अंश में 1 जोड़ने से जो भिन्न बनती है उसके व्युत्क्रम (Reciprocal) भिन्न में पूर्वोक्त भिन्न का दूना जोड़ने पर योगफल 3 होता है, तो वह भिन्न बताओ।

[संकेत—मान लो कि वह भिन्न $\frac{x}{x+5}$ है।]

5. क किसी काम को 12 दिन में करता है और क और ख मिलकर उसे 4 दिन में करते हैं। बताओ ख अकेला उसे कितने दिनों में कर सकेगा ?

6. किसी काम को क 20 दिन में कर सकता है। क दो दिन तक उसे करता रहा। बाद में ख भी आगया, तो दोनों ने मिलकर शेष काम को 10 दिन में समाप्त कर दिया। बताओ ख अकेला उस काम को कितने दिनों में कर सकता है।

7. A किसी काम को 9 दिनों में और B उसके दुगने समय में पूरा कर सकता है। A दिन भर में जितना काम कर सकता है C दिन भर में उसका $\frac{1}{3}$ कर सकता है। बताओ A, B और C तीनों मिलकर उसे कितने दिनों में करलेंगे।

8. एक हौज़ में A और B दो नल लगे हुए हैं। A उसको 3 घंटे में भरता है। घंटे भर दोनों नल खुले रहे उसके बाद B नल बन्द कर दिया गया। उसके 1 घंटा 24 मिनट बाद हौज़ भर गया। बताओ B नल हौज़ को कै घंटों में भर सकता है।

9. क और ख मिलकर किसी खेत को 10 घंटे में काट लेते हैं; क अकेला उसे 15 घंटे में काट सकता है। तो बताओ ख अकेला उसे कितनी देर में काट सकेगा।

10. एक खेत को ख 12 घंटे में और ग 10 घंटे में काट सकता है। क और ख दोनों मिलकर उसे 6 घंटा 40 मिनट में काट सकते हैं। बताओ क और ग मिलकर उसे कितने घंटों में काट सकेंगे ?

11. स्थिर जल में डाँड़ चलाते हुए किसी नाव के नाविक प्रति घंटा 6 मील की चाल से चलते हैं। अनुकूल धारा में डाँड़ चलाते हुए वे घंटा में जितनी दूर जाते हैं धारा के प्रतिकूल दिशा में उतनी ही दूर जाने में उन्हें 5 घंटे लगते हैं, तो धारा का वेग बताओ।

12. एक स्टीमर को धारा के प्रतिकूल कुछ दूर जाने में जितना समय लगता है वह धारा के अनुकूल उतनी ही दूर जाने के समय का तिगुना है। यदि धारा का वेग 5 मील प्रति घंटा हो तो बताओ कि स्थिर जल में स्टीमर किस चाल से चल सकेगा।

13. धारा का वेग 5 मील प्रति घंटा होने पर एक स्टीमर को कुछ दूर जाने के बाद लौटकर आने में जितना समय लगता है धारा का वेग 3 मी० प्रति घंटा होने पर उतनी ही दूर तक प्रतिकूल दिशा में जाने में दूना समय लगता है। बताओ स्थिर जल में स्टीमर की चाल क्या है।

14. 8 बजे सवेरे दो रेलगाड़ियाँ A और B दो स्टेशनों से क्रमशः 30 और 40 मील प्रति घंटा की चाल से एक दूसरी की तरफ़ चलीं। एक तीसरी गाड़ी 9 बजकर 30 मि० पर A स्टेशन से चलकर 32 मील प्रति घंटा की चाल से B की ओर चली। A और B की दूरी यदि 200 मील हो, तो बताओ तीसरी रेलगाड़ी कब उन दोनों गाड़ियों से समान दूरी पर रहेगी।

[संकेत—मान लो कि तीसरी गाड़ी 8 बजे सवेरे के x घंटे बाद पहली दो गाड़ियों से समान दूरी पर थी, तो तीसरी (ट्रेन) रेलगाड़ी उक्त स्थान से $x-\frac{3}{2}$ घंटे में $32(x-\frac{3}{2})$ मील का रास्ता तय कर लेगी।

A B′ C A′ B

मान लो कि 8 बजे सवेरे के x घंटे बाद पहली, दूसरी और तीसरी रेलगाड़ी क्रम से A′, B′, C पर थीं, तो $AA' = 30x$ और $BB' = 40x$. इससे AC की दूरी निकालो और उसे $32(x-\frac{3}{2})$ के साथ युक्त करके एक समीकरण बनाओ।]

15. AB, 220 मील लम्बी एक रेलवे लाइन है और P, Q, R तीन ट्रेनें क्रमशः 25, 20 और 30 मील प्रति घंटे की चाल से उसपर चलती हैं। P सवेरे 7 बजे, Q सवेरे 8 बजकर 15 मिनट पर A से B की

ओर और R सवेरे 10 बजकर 30 मिनट पर B से A की ओर चलीं। बताओ P ट्रेन कब Q और R से बराबर दूरी पर होगी।

16. P से Q की दूरी $3\frac{1}{2}$ मील है। A गाड़ी पर चढ़कर 6 मील प्रति घंटा की चाल से और B प्रति घंटा 3 मील की चाल से पैदल एक ही समय P से Q की ओर चले। A, Q पर पहुँचने के 15 मिनट बाद तक प्रतीक्षा करता रहा। उसके बाद फिर उसी गाड़ी से लौट पड़ा। बताओ लौटते समय A और B कब मिलेंगे।

17. A और B किसी वृत्ताकार मार्ग के एक ही स्थान से एक ही दिशा में रवाना हुए। A घंटा में 5 बार और B 3 बार सारे रास्ते का चक्कर लगा सकता है। बताओ वे दोनों कब व्यास के विपरीत स्थान पर होंगे।

[संकेत—जिस समय वे व्यास के विपरीत स्थान पर पहुँचेंगे उस समय उनकी दूरी सारे मार्ग के आधे के समान होगी।]

18. A और B, 10 मील परिधिवाली किसी वृत्ताकार सड़क के एक स्थान से साथ ही साथ चलकर विपरीत दिशा की ओर बढ़ने लगे। A घंटे में 4 मील और B घंटे में 5 मील चलता है। बताओ वे दोनों कब उस व्यास के विपरीत प्रान्त में दूसरी बार पहुँचेंगे।

[संकेत—A और B साथ साथ 15 मील रास्ता चलेंगे।]

19. किसी भ्रमण-प्रतियोगिता में A और B के एक वृत्ताकार सड़क पर एक स्थान से चलना आरम्भ किया। चलने के बाद आध घंटे में A ने सड़क का 3 बार और B ने $4\frac{1}{2}$ बार चक्कर लगाया। यदि वे बराबर अपने पूर्ण वेग से चलते रहें, तो बताओ कि कितनी देर के बाद वे दोनों फिर एक दूसरे से मिलेंगे।

20. एक आदमी ने कुछ नारङ्गियाँ ख़रीदीं। उसने 3 पैसा प्रति नारङ्गी के भाव से भी उतनी ही नारङ्गियाँ ख़रीदीं जितनी कि उसने 2 पैसा प्रति नारङ्गी के हिसाब से ख़रीदी थीं। बताओ वह उन नारङ्गियों को मिलाकर किस भाव से बेचे कि उसे 20 प्रति सैकड़ा लाभ हो।

21. किसी आदमी ने 100 पौं० में एक घोड़ा और एक गाड़ी मोल ली। गाड़ी को 40 प्रति सैकड़ा लाभ पर और घोड़े को 5 प्रति

संकड़ा हानि पर बेचने से उसे कुल पर 4 प्रति सैंकड़ा लाभ हुआ हो, तो घोड़े का क्रय मूल्य बताओ ।

22. एक आदमी ने कुछ नारङ्गियाँ 3 पैसा प्रति नारङ्गी के भाव से मोल लीं और उसकी दुगनी नारङ्गियाँ 2 पैसा प्रति नारङ्गी के भाव से और तिगुनी नारङ्गियाँ 1 पैसा प्रति नारङ्गी के हिसाब से मोल लीं । बताओ वह उन सब नारङ्गियों को मिलाकर किस भाव से बेचे कि उसे 50 प्रति संकड़ा का लाभ हो । यदि कुल लाभ 1 रु० 11 आ० 6 पा० हो, तो बताओ कुल कितनी नारङ्गियाँ ख़रीदी गई थीं ।

23. एक आदमी ने 1500 रु० में 15 काठा ज़मीन खरीदी । उसमें से 10 काठा तो उसने 320 रु० प्रति काठा के हिसाब से बेच दी । बताओ बची हुई ज़मीन को वह किस हिसाब से बेचे कि उसे कुल रक़म पर 20 प्रति संकड़ा का लाभ हो।

24. दो बरतनों में पानी मिला हुआ दूध भरा हुआ है। इन दोनों बरतनों में दूध और पानी का अनुपात क्रमशः 2:3 और 3:2 है। पहले बरतन के 10 सेर मिश्रण में दूसरे बरतन का कितना मिलाया जाय कि इस नये मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 5:4 हो ?

25. 140 घन इञ्च ताँबे और टीन के मिश्रण का वज़न 42 पौंड 3 औंस है । एक घन इञ्च ताँबे का वज़न यदि $5\frac{1}{4}$ औंस और 1 घन इञ्च टीन का वज़न यदि $1\frac{1}{4}$ औंस हो, तो बताओ कि इस मिश्रण में कौनसी धातु कितनी मिली हुई है ।

26. ताँबे और सोने के एक मिश्रण में प्रति संकड़ा 60 भाग सोना है । उसी प्रकार के एक दूसरे मिश्रण में प्रति संकड़ा 50 भाग सोना है । इन दोनों मिश्रणों के मिलावट से 10 औंस वज़न की एक छड़ तय्यार की गई जिसमें प्रति संकड़ा 56 भाग सोना है । बताओ उस छड़ में हर प्रकार का मिश्रण कितना-कितना है ।

27. 1 और 2 बजे के बीच घड़ी की दोनों सूइयाँ कब एक ही स्थान पर होंगी ?

28. 3 और 4 बजे के बीच घड़ी की सूइयाँ कब विपरीत दिशा में होंगी ?

29. 3 और 4 बजे के बीच मैं कब बाहर गया था जबकि 4 और 5 बजे के बीच लौटकर देखने से मालूम हुआ कि घड़ी की सूइयाँ एक दूसरी के स्थान पर हैं ?

30. एक पलटन दो भिन्न भिन्न प्रकार के अन्तःपूर्ण आयतों (Solid Rectangles) में सजाई गई । उनमें से एक आयत की गम्भीरता 5 और दूसरे की 10 है । दूसरे आयत में पंक्तिबद्ध होकर जितने सिपाही खड़े थे उनकी संख्या पहले आयत में खड़े सिपाहियों से 15 कम थी । बताओ पलटन में कुल कितने सिपाही थे ।

[संकेत—मान लो कि कुल संख्या x है, तो ऐसी अवस्था में $\frac{1}{5}x = \frac{1}{10}x + 15$.]

31. एक पलटन को 2 भिन्न भिन्न प्रकार के अन्तःशून्य आयतों में रखा गया । उन दोनों आयतों में से एक की गम्भीरता 9 और दूसरे की गम्भीरता 6 है । दूसरे आयत के सामनेवाली पंक्ति में सिपाहियों की संख्या पहले आयत के सामनेवाली पंक्ति के सिपाहियों की संख्या से 8 अधिक है, तो बताओ पलटन में कुल कितने सिपाही हैं ।

32. एक पलटन को अन्तःशून्य (Hollow Square) वर्ग में सजाने से उसकी गम्भीरता 3 होती है । यदि पलटन में कुल 96 सिपाही हों, तो बताओ सामनेवाली पंक्ति में कितने सिपाही होंगे ।

33. एक पलटन दो प्रकार के अन्तःशून्य वर्गों में सजाई गई । उनमें से एक वर्ग की गम्भीरता 3 और दूसरे की 2 है । यदि दूसरे वर्ग के सामनेवाली पंक्ति में पहले वर्ग की सामनेवाली पंक्ति के सिपाहियों से 2 अधिक सिपाही हों, तो बताओ पलटन में कुल कितने सिपाही हैं ।

34. 20 फ़ुट लम्बे और 12 फ़ुट ऊँचे एक कमरे की चारों दीवारों में काग़ज़ मढ़वाने में प्रति गज़ 8 आ० के हिसाब से 48 रु० ख़र्च हों, तो कमरे की चौड़ाई बताओ ।

35. एक वर्गाकार बगीचा के भीतर चारों तरफ़ 10 फ़ुट चौड़ा एक रास्ता है । यदि रास्ते का क्षेत्रफल 10 000 वर्ग फ़ुट हो तो बगीचा के एक भुजा की लम्बाई बताओ ।

36. यात्रियों के एक दल ने होटल में आकर देखा कि हर एक यात्री यदि एक-एक कमरा में दख़ल करे तो संख्या में a कमरों की कमी पड़ती है और यदि हर एक कमरे में दो-दो यात्री रहें तो b कमरे खाली रह जाते हैं, तो बताओ कि हर एक कमरे में यदि तीन-तीन यात्री रहें, तो कितने कमरे ख़ाली रहेंगे ।

विविध प्रश्नावली IV.

I.

1. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+1$ को $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$ से गुणा करो ।

2. x^3-y^3 को $x-y$ से भाग दो ।

3. यदि $x+y=1$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x^3(y+1)-y^3(x+1)-x+y=0.$$

4. $a+b=x$ और $a-b=y$ होने पर $16(a^4+a^2b^2+b^4)$ व्यजंक को x और y में प्रकट करो ।

5. $8x^3-27y^3+18xy+1$ का गुणनखण्ड निकालो ।

6. x^6-y^6 और $x^4+x^2y^2+y^4$ का म० स० निकालो ।

7. x^3+a^3, x^3-a^3, $x^4+a^2x^2+a^4$ और x^2-ax+a^2 का ल० स० अ० निकालो ।

8. सरल करो :— $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$

9. हल करो : — $\frac{3}{x-6}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+5}=0.$

10. क और ख मिलकर किसी काम को 6 दिन में कर सकते हैं । क अकेला उस काम को 10 दिन में कर सकता है, तो बताओ ख अकेला उसे कितने दिनों में करेगा ।

II.

1. $a+b+1-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ को $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+1$ से गुणा करो।

2. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ को $y-z$ से भाग दो।

3. $729x^3-8y^6$ के गुणनखण्ड निकालो।

4. सिद्ध करो कि $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$
$$=(a+b)(b+c)(c+a).$$

5. $x^3-4x^2+5x-2,\ x^3-3x-2$ और x^3-7x+6 का म० स० निकालो।

6. $x^2+x-6,\ x^2+2x-3$ और x^2-3x+2 का ल० स० अ० निकालो।

7. सरल करो:— $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$.

8. हल करो:— $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}=0.$

9. हल करो:— $\frac{1}{7}(2x-3)+\frac{1}{11}(3x-4)+\frac{1}{3}(4x-5)=7$

10. दो ट्रेनें एक ही समय A और B दो स्टेशनों से रवाना होकर 20 और 30 मील प्रति घंटा की चाल से एक दूसरी की तरफ़ चलीं। यदि A और B के बीच की दूरी 100 मील हो, तो बताओ कि वे दोनों ट्रेनें कब एक दूसरी से मिलेंगी।

III.

1. $4x^2+6xy+9y^2$ को $4x^2-6xy+9y^2$ से गुणा करो।

2. $(a+b)^3+(c-a)^3-(b+c)^3$ को $a+b$ से भाग दो।

3. $6x^2+7xy-20y^2$ के गुणनखण्ड निकालो।

4. यदि $x+\dfrac{1}{x}=100$ हो, तो $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ का मान बताओ।

5. यदि [illegible] 0 और [illegible] $+b^2+c^2=20$ हो, तो $ab+bc+ca$ का मान बताओ ।

6. [illegible] 12 और [illegible] $2a-8$ का ल० स० अ० निकालो ।

7. सरल करो :— $\frac{a^2+3a+2}{a^2+3a+2} \cdot \frac{a^2+2a-3}{a^2+5a+1} \cdot \frac{a+1}{a+2}$.

8. हल करो :— [illegible] $+$ [illegible] $\frac{\ldots(a+b+c)}{abc}$.

9. धारा के अनुकूल कुछ दूरी तक जाने में एक स्टीमर को जितना समय लगता है धारा की प्रतिकूल दिशा में जाने में उसका तिगुना समय लगता है । धारा का वेग यदि प्रति घंटा 6 मील हो, तो स्थिर जल में स्टीमर की चाल प्रति घंटा बताओ ।

10. 1 और [illegible] बजे के बीच घड़ी की सूइयाँ कब एक दूसरे के ऊपर होंगी ?

IV.

1. [illegible] c और $-a+b+c$ का संलग्न गुणनफल निकालो ।

2. [illegible] $-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$ को $2a+b+c$ से भाग दो ।

3. यदि [illegible] 8 और [illegible] 30 हो, तो [illegible] का मान बताओ ।

4. [illegible] $+b-c)^3+24abc$ को सरल करो ।

5. [illegible] 1 और [illegible] $+2x+1$ का म० स० निकालो ।

6. सरल करो:— [illegible] $\cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

7. हल करो : — [illegible] $= 1$.

8. हल करोः— $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-5}=\frac{3}{x-4}$.

9. एक आदमी ने ज़मीन का एक टुकड़ा ख़रीद कर उसका $\frac{1}{3}$ भाग 5 प्रति सैकड़ा की हानि पर बेच डाला। बताओ बची हुई ज़मीन को वह प्रति सैकड़ा कितने लाभ से बेचे कि उसे ज़मीन की कुल लागत पर 5 प्रति सैकड़ा का लाभ हो।

10. एक पलटन को अन्तःशून्य वर्ग में सजाने से वर्ग की गम्भीरता 4 होती है। यदि पलटन में कुल 160 सिपाही हों, तो सामने की पंक्ति के सिपाहियों की संख्या बताओ।

V.

1. यदि $a+b+c=7$ और $ab+bc+ca=-16$ हो, तो $a^3+b^3+c^3-3abc$ का मान बताओ।

2. सरल करो :— $(16x^5-20x^3+5x)^2+(1-x^2)\{16(1-x^2)^2-20(1-x^2)+5\}^2$.

3. सिद्ध करो कि $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)=(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc$.

4. $a^2+ab+bc+ca$ और $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$ का म० स० निकालो।

5. $81x^4+9604y^4$ का गुणनखण्ड निकालो।

6. सरल करो :— $\{a^4+x^4+ax(a^2+x^2)+a^2x^2\}\div(a^2+x^2+ax)$

7. यदि $x=\frac{a-b}{m-c}, y=\frac{b-c}{m-a}$ और $z=\frac{c-a}{m-b}$ हों, तो $x+y+z+xyz$ का मान बताओ।

8. हल करो :— $\frac{2x+9}{5}-\frac{x+2}{4(x-\frac{1}{3})}=\frac{4x+3}{10}$.

9. हल करो :— $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}=\frac{2}{x+b}$.

10. 9 और 10 बजे के बीच घड़ी की सूइयाँ कब एक दूसरी की ठीक विपरीत दिशा में होंगी।

VI.

1. $\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3} - \frac{11}{3}x - \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{10}x^2$ को $\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ से भाग दो ।

2. गुणनखण्ड निकालो :—

   (i) $(a^3+1)^2-(a+1)^2$. (ii) $x^3y^3-9x^2y^2+20xy$.

3. यदि $x = \dfrac{1+a}{1-a}$ और $y = \dfrac{1-a}{1+a}$ हो, तो $\dfrac{x-y}{1+xy}$ का मान बताओ ।

4. सरल करो :— $\dfrac{a(b^2-c^2)}{bc} + \dfrac{2b(c^2-a^2)}{ca} - \dfrac{c(2b^2-a^2)}{ab}$.

5. हल करो :— $\dfrac{9x^2+18x+3}{18x^2+27x+5} = \dfrac{x+2}{2x+3}$.

6. $4x^2-6yz-(9y^2+z^2)$, $9y^2+4xz-(4x^2+z^2)$ और $z^2-12xy-(4x^2+9y^2)$ का ल० स० अ० निकालो ।

7. $\dfrac{\dfrac{a+b}{1-ab}+\dfrac{a-b}{1+ab}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}} \div \dfrac{\dfrac{a+b}{1-ab}-\dfrac{a-b}{1+ab}}{1+\dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}$ को सरल करो ।

8. हल करो :—

   $\dfrac{1\cdot05x+10}{50}+\dfrac{1\cdot35x-2}{20}-\dfrac{1\cdot5x-18}{10}+\dfrac{1\cdot5x-3}{15}=1\cdot854.$

9. एक आदमी ने रुपये में 20 के हिसाब से जितनी नारंगियाँ ख़रीदीं उतनी ही रुपये में 30 के हिसाब से भी खरीदीं । यदि कुल नारंगियों को रुपये में 22 के हिसाब से बेचने में उसे 2 रु० का लाभ हुआ हो, तो बताओ उसने कुल कितनी नारंगियाँ ख़रीदी थीं ।

10. कुछ मनुष्य एक अन्तःपूर्ण वर्ग (Solid Square) में खड़े किये गये । तत्पश्चात् उनको ऐसे अन्तःपूर्ण आयत (Solid Rectangle) में खड़ा किया गया जिसमें सामने की पंक्ति में उक्त वर्ग के सामने की पंक्ति से 1 आदमी कम है, और बग़लवाली पंक्ति में 2 आदमी कम हैं । ऐसा करने से 43 मनुष्य बाक़ी रह जाते हैं, तो बताओ कुल मनुष्यों की संख्या क्या है ।

VII.

1. $a^3(1-x)+ab(a-b)(x+y)+b^3(1+y)$ को $a(1-x)+b(1+y)$ से भाग दो।

2. सरल करो :—

$$\left(2-\frac{3x}{y}+\frac{9x^2-2y^2}{y^2+2xy}\right)\div\left\{\frac{1}{y}-\frac{x+y}{(y-2x)(y+x)-4x^2}\right\}.$$

3. यदि $x=\dfrac{a+1}{ab+1}$ और $y=\dfrac{a(b+1)}{ab+1}$ हो, तो $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ का मान बताओ।

4. गुणनखण्ड निकालो :— (a) $x^{12}+x^6-2$;
(b) x^8-16y^8.

5. यदि $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2.$$

6. हल करो :—

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c).$$

7. हल करो :— $\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{x-12}{x-11}=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-10}{x-9}.$

8. हल करो :— $\left(\dfrac{x+a+b}{x-a+b}\right)^2=\dfrac{x+2a+2b}{x-2a+2b}.$

9. दूध और पानी के किसी मिश्रण में दूध और पानी 5 : 4 के अनुपात में हैं। उस मिश्रण के कै गैलन में 10 सेर दूध मिला दिया जाय कि नये मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 5 : 1 हो ?

10. एक आदमी ने पैदल एक शहर को प्रस्थान किया। सारे रास्ते का $\frac{1}{4}$ भाग चलने के बाद उसे मालूम हुआ कि यदि इसी चाल से वह बराबर चलता रहा तो शहर पहुँचने के लिए जितना समय स्थिर किया गया था उतने समय में वह केवल $\frac{5}{6}$ भाग चल पावेगा। अतएव उसने अपनी चाल को प्रति घंटा 1 मील बढ़ा दिया जिससे ठीक समय पर पहुँच गया। बताओ उसकी चाल प्रति घंटा क्या थी।

VIII.

1. $8x^9-12x^8+6x^7-21x^6+28x^5-9x^4+30x^3-27x^2-27$ को $2x^3-x^2-3$ से भाग दो ।

2. सरल करो :— $\dfrac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\cdot\dfrac{x^3-x}{(x^2-1)^2}\div\dfrac{x^2+1}{x^6-1}$.

3. सिद्ध करो कि, $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10}-\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2=0.$

4. सरल करो :—

$$\frac{x^2-64}{x^2+24x+128}\cdot\frac{x^2+12x-64}{x^3-64}\div\frac{x^2-16x+64}{x^2+4x+16}$$

5. यदि $b^2=ac$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2}.$$

6. यदि $x+y+z=6$ और $xy+yz+zx=9$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}=0.$$

7. हल करो :— $\dfrac{3x-11}{x-5}+\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{x-9}{x-10}+\dfrac{4x-25}{x-6}.$

8. m[illegible]$-m$[illegible]$n^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}+n$[illegible] को $m^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}$ से गुणा करो ।

9. पानी में तोलने पर 19 पौंड सोने का वज़न 18 पौंड और 10 पौंड चाँदी का वज़न 9 पौंड होता है । सोने और चाँदी को मिलाकर बनाई गई 106 पौंड की एक सिल का वज़न पानी में यदि 99 पौंड हो, तो बताओ उस सिल में सोना और चाँदी किस मात्रा में हैं ।

10. एक पलटन दो भिन्न भिन्न अन्तःशून्य वर्गों (Hollow Squares) में रखी गई जिनमें से एक की गम्भीरता 5 और दूसरे की 7 है । यदि दोनों वर्गों में सामनेवाली पंक्ति के सिपाहियों की संख्या समान हो तो बताओ पलटन में कुल कितने सिपाही हैं ।

——:o:——

सत्तरहवाँ अध्याय

कठिन सूत्रावली

198. पूर्व प्रमाणित सूत्रों का दोहराना ।

इसके पहले बहुत से गुणनफलों के प्रयोजनीय सूत्र सिद्ध किये जाचुके हैं । यहाँ प्रयोग करने की आसानी के लिए वे फिर नीचे इकट्ठे लिखे गये हैं ।

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. अनु० 65.

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. अनु० 67.

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. अनु० 69.

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=a^3+b^3+3ab(a+b)$. अनु० 73.

(5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=a^3-b^3-3ab(a-b)$. अनु० 74.

(6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$. अनु० 75.

(7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. अनु० 76.

(8) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$. अनु० 71.

(9) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.
अनु० 140.

(10) $ab=\frac{1}{4}\left\{(a+b)^2-(a-b)^2\right\}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.
अनु० 142.

(11) $(px+q)(rx+s)=prx^2+(ps+qr)x+qs$.
अनु० 143.

(12) $(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$.
अनु० 144.

(13) $-(b-c)(c-a)(a-b)$

$= a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$= bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$= -\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$. अनु० 147.

(14) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$

$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$. अनु० 146.

(15) $(b+c)(c+a)(a+b)$

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$

$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$.

अनु० 148.

(16) $(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$

$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$.

अनु० 149.

(17) $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$

$(b+c)(c+a)(a+b)$ अनु० 150

(18) $(a+b+c)^3 \;\; a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$.

अनु० 151.

(19) $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$. अनु० 152.

(20) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$. अनु० 153.

(21) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$.

अनु० 145.

(22) $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$
$(b^n-c^n)+(c^n-a^n)+(a^n-b^n)=0.$ अनु० 146.

(23) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.$
$a^n(b^n-c^n)+b^n(c^n-a^n)+c^n(a^n-b^n)=0.$
अनु० 146.

199. अन्य सूत्रावली।

निम्नलिखित फल वास्तविक गुणन द्वारा अथवा ऊपर दिये हुए सूत्रों की सहायता से सरलतापूर्वक प्राप्त होते हैं :—

(24) $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2.$

(25) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

(26) $(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2ab+2bc+2ca.$

(27) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$

(28) $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2.$

(29) $(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3.$

(30) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$

(31) $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c).$

200. सूत्रों का प्रयोग।

उदाहरण 1. $(3x+1)(2x+3)(4x+1)$ को दो वर्गों के अन्तर के रूप में प्रकट करो।

दिये हुए तीनों गुणनखण्डों में से किसी दो को मान लो $(3x+1)$ और $(2x+3)$ को लेकर पहले गुणा करो, तो

$$(3x+1)(2x+3)(4x+1)=(6x^2+11x+3)(4x+1).$$

अब कल्पना करो कि $6x^2+11x+3=a$ और $4x+1=b$ हो, तो दिया हुआ व्यंजक

$$=ab=\{\tfrac{1}{2}(a+b)\}^2-\{\tfrac{1}{2}(a-b)\}^2 \qquad \text{[सूत्र 10]}$$
$$=\{\tfrac{1}{2}(6x^2+11x+3+4x+1)\}^2-\{\tfrac{1}{2}(6x^2+11x+3-4x-1)\}^2$$
$$=\{\tfrac{1}{2}(6x^2+15x+4)\}^2-\{\tfrac{1}{2}(6x^2+7x+2)\}^2.$$

टीका 1—सूत्र 10 की सहायता से दो गुणनखण्डों के गुणनफल को दो वर्गों के अन्तर के रूप में प्रकट किया जाता है। इसलिए उक्त तीनों गुणनखण्डों में से किसी दो का गुणनफल एक गुणनखण्ड के रूप में लिया जा सकता है। इसलिए ऊपर के उदाहरणों में से तीनों के भिन्न-भिन्न हल होंगे।

टीका 2—चार या चार से अधिक गुणनखण्डवाले गुणनफलों में गुणनखण्डों को इच्छानुसार किसी भी क्रम से दो भागों में विभक्त करके प्रत्येक भाग के गुणनफल को एक गुणनखण्ड के रूप में लेना होता है।

उदाहरण 2. यदि $a=x+k$, $b=y+k$ और $c=z+k$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$.

सूत्र 20 के अनुसार $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(y+k-z-k)^2+(z+k-x-k)^2+(x+k-y-k)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$$
$$=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$$

उदाहरण 3. सरल करो :— $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2$
$-(x+1)(x+2)-(x+1)(x+3)-(x+2)(x+3)$.

मान लो कि $x+1=a$, $x+2=b$ और $x+3=c$,

तो, $b-c=-1$, $c-a=2$, $a-b=-1$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$
$$=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2\}=3.$$

प्रश्नावली 69.

नीचे लिखे व्यंजकों को दो वर्गों के योग के रूप में प्रकट करो :—

1. $(2x+3y)^2-2(x+y)(x+2y)$.
2. $(a+5b)^2+2(3a+4b)(2a-b)$.
3. $(x+3y+z)^2-2(x+2y)(y+z)$.

नीचे लिखे व्यंजकों को दो वर्गों के अन्तर के रूप में प्रकट करो :—

4. $(2x+1)(x+2)(x+4)$. 5. $5x(3x+10)$.

6. $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)$.

7. $8x^2-12xy+4y^2-14bx-49b^2$.

8. सिद्ध करो कि $(x+y+a+b)^2+(x+y-a-b)^2$
$$=2\{(x+y)^2+(a+b)^2\}.$$

9. यदि $x+y+z=9$ और $xy+yz+zx=26$ हो, तो $x^2+y^2+z^2$ का मान बताओ ।

10. यदि $x+y=a$ और $xy=b$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$x^3+y^3=a^3-3ab.$$

11. यदि $a-b=x$ और $ab=y$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$a^3-b^3=x^3+3xy.$$

12. यदि $a=x+\frac{1}{x}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^4+\frac{1}{x^4}=a^4-4a^2+2$.

सरल करो:—

13. $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)$
$$+(c-a)(x-c)(x-a).$$

14. $(b-c)(b+c-a)+(c+a-b)+(a-b)(a+b-c)$.

15. सिद्ध करो कि $(y-z)(ax+y+z)+(z-x)(ay+z+x)$
$$+(x-y)(az+x+y)=0.$$

201. सूत्र । $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

यह सूत्र अनु० 145 से सिद्ध हुआ है ।

अनु० 153 के सूत्र से ज्ञात होता है कि यह सूत्र निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:—

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

उपसिद्धान्त—यदि $a+b+c=0$, तो $a^3+b^3+c^3=3abc$.

उदाहरण। सिद्ध करो कि $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$
$$=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

मान लो कि $a-b=x$, $b-c=y$ और $c-a=z$;

तो $x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$.

अब $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$
$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$
$$=0;$$

$\therefore \quad (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$

प्रश्नावली 70.

निम्नलिखित गुणनफल निकालो:—

1. $(x+y+1)(x^2+y^2+1-x-y-xy)$.
2. $(x-y-2)(x^2+y^2+xy+2x-2y+4)$.
3. $(a-b+1)(a^2+b^2+ab-a+b+1)$.
4. $(2x-3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2+12yz+6xy-8zx)$.

सरल करो:—

5. $(2a-b-c)^3+(2b-c-a)^3+(2c-a-b)^3$
$$-3(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b).$$
6. $(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3$
$$-3(a-2b)(2b-3c)(3c-a).$$
7. $2x-3y=1$ हो, तो $8x^3-27y^3-18xy$ का मान बताओ।
8. $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ और $z=a+b-c$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.
9. यदि $x=(b-c)(a-d)$, $y=(c-a)(b-d)$, $z=(a-b)(c-d)$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.
10. सिद्ध करो कि $x^3(cy-bz)^3+y^3(az-cx)^3+z^3(bx-ay)^3$
$$=3xyz(cy-bz)(az-cx)(bx-ay).$$

निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालोः—

11. $m^3-n^3+1+3mn.$ 12. $x^3+y^3+18xy-216.$

13. $3s=a+b+c$ होने से $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$ का मान बताओ।

14. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc).$

15. $x+y=3$ हो, तो $x^3+y^3-27+9xy$ का मान बताओ।

16. यदि $x=a^2-bc,\ y=b^2-ca$ और $z=c^2-ab$ हो, तो सिद्ध करो कि $ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$

17. $x+y+z=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $(x-2y)^3+(y-2z)^3+(z-2x)^3=3(x-2y)(y-2z)(z-2x).$

202. सूत्र। $$-(b-c)(c-a)(a-b)$$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}.$$

यह सूत्र अनु० 146 और अनु० 147 में सिद्ध किया गया है।

उदाहरण 1. सरल करो :—

$$(y-z)(a+x)^2+(z-x)(a+y)^2+(x-y)(a+z)^2.$$

मान लो कि, $a+x=p,\ a+y=q$ और $a+z=r$;

तो, $q-r=(a+y)+(a+z)=y-z.$

इसी प्रकार, $r-p=z-x$ और $p-q=x-y,$

∴ दिया हुआ व्यंजक $=p^2(q-r)+q^2(r-p)+r^2(p-q)$

$$=-(q-r)(r-p)(p-q)$$
$$=-(y-z)(z-x)(x-y).$$

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि,

$$(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

मानलो कि, $x-a=p,\ x-b=q$ और $x-c=r,$

तो, $p-q=b-a,\ q-r=c-b$ और $r-p=a-c$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $= -p^2(q-r)-q^2(r-p)-r^2(p-q)$

$$=(p-q)(q-r)(r-p)$$
$$=(b-a)(c-b)(a-c)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

प्रश्नावली 71.

1. सिद्ध करो कि $(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)$
$$+(a-b)(x-a)(x-b)$$
$$=(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2.$$

2. सरल करो :—
$$(x^2-yz)(y-z)+(y^2-zx)(z-x)+(z^2-xy)(x-y).$$

3. सिद्ध करो कि,
$$(x+a^2+ab+ac)(b-c)+(x+b^2+bc+ba)(c-a)$$
$$+(x+c^2+cb+ca)(a-b)=0.$$

4. सिद्ध करो कि, $(x+2y)^2(y+z-2x)+(y+2z)^2(z+x-2y)$
$$+(z+2x)^2(x+y-2z)+(y+z-2x)(z+x-2y)$$
$$(x+y-2z)=0.$$

5. सिद्ध करो कि,
$$(x+a)(x+b)(a-b)+(x+b)(x+c)(b-c)+(x+c)$$
$$(x+a)(c-a)$$
$$=(x+a)(a-b)(b-c)+(b+x)(b-c)(c-a)$$
$$+(c+x)(c-a)(a-b)$$
$$=(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b).$$

6. सिद्ध करो कि, $(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)$
$$=x^2(y^4-z^4)+y^2(z^4-x^4)+z^2(x^4-y^4).$$

7. $(x+y)^2(y-x)+(y+z)^2(z-y)+(z+x)^2(x-z)$ का गुणनखण्ड निकालो ।

8. सरल करो :—
$$(a+2b+3c)^2(a-2b+c)+(b+2c+3a)^2(b-2c+a)$$
$$+(c+2a+3b)^2(c-2a+b)$$
$$+(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b).$$

203. सूत्र । $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$= (b+c)(c+a)(a+b)+abc \quad (i)$$
$$= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc \quad (ii)$$
$$= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc \quad (iii)$$
$$= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc \quad (iv)$$

इन सूत्रों पर अनु० 150, अनु० 149 और अनु० 146, उदाहरण 3 में विचार किया गया है।

204. सूत्र । $(b+c)(c+a)(a+b)$

$$= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc \quad (i)$$
$$= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \quad (ii)$$
$$= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc \quad (iii)$$
$$= (a+b+c)(bc+ca+ab)-abc. \quad (iv)$$

अनु० 148, अनु० 146, उदाहरण 3, और अनु० 150 में इन सूत्रों पर विचार किया गया है।

उदाहरण 1. $(x+2y)$, $(2y+3z)$ और $(3z+x)$ का गुणनफल निकालो।

ऊपर के सूत्र के अनुसार, $(x+2y)(2y+3z)(3z+x)$

$$= x^2(2y+3z)+(2y)^2(3z+x)+(3z)^2(x+2y)+2x(2y)(3z)$$
$$= 2x^2y+3x^2z+12y^2z+4xy^2+9xz^2+18yz^2+12xyz.$$

उदाहरण 2. यदि $s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$(s-a)^2(s+a)+(s-b)^2(s+b)+(s-c)^2(s+c)+2(s-a)(s-b)(s-c)=(s+a)(s+b)(s+c).$$

मान लो कि $s-a=x$, $s-b=y$ और $s-c=z$,

तो, $y+z=(s-b)+(s-c)=2s-(b+c)=2s-(s-a)=s+a$;

इस प्रकार, $z+x=s+b$ और $x+y=s+c$.

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$

$$=(y+z)(z+x)(x+y)=(s+a)(s+b)(s+c).$$

प्रश्नावली 72.

1. सिद्ध करो कि $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

2. सरल करोः— $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2$
$$+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)-4xyz.$$

3. सरल करोः—
$$(b+c)(c+a)(a+b)-(a+b+c)(ab+bc+ca)+2abc.$$

निम्नलिखित गुणनफल निकालोः—

4. $(x+y)(y+2z)(2z+x)$. 5. $(x-3y)(3y-4z)(4z+x)$.

6. $(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b)$.

7. $(x+3y+2z)(3xy+2zx+6yz)$.

8. सिद्ध करो कि $(yz-x^2)(y+z)+(zx-y^2)(z+x)$
$$+(xy-z^2)(x+y)=0.$$

9. सिद्ध करो कि, $(ab+ac-a^2)(b+c)+(bc+ba-b^2)(c+a)$
$$+(ca+cb-c^2)(a+b)=6abc.$$

10. सिद्ध करो कि, $(x+3y+4z)(3xy+4zx+12yz)-12xyz$
$$=(x+3y)(3y+4z)(4z+x).$$

205. सूत्र । $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.$$

यह सूत्र अनु० 152 में सिद्ध हुआ है ।

206. सूत्र । $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)$
$$(c+a)(a+b).$$

इस सूत्र की सहायता से किसी भी त्रिपदी व्यंजक का घन निकाला जा सकता है । यह सूत्र अनु० 151 में सिद्ध हुआ है ।

उपसिद्धान्त । $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि,

$$(a+b+c)^3=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc.$$

मान लो कि $b+c-a=x$, $c+a-b=y$ और $a+b-c=z$,

तो, $x+y+z=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c$,

और $\quad y+z=(c+a-b)+(a+b-c)=2a$;

इसी प्रकार, $\quad z+x=2b$ और $x+y=2c$;

$$\therefore \quad (a+b+c)^3=(x+y+z)^3$$
$$=x^3+y^3+z^3+3(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+3.2a.2b.2c$$
$$=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc.$$

उदाहरण 2. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc$ का मान बताओ।

मान लो कि $\quad s-a=x,\ s-b=y$ और $s-c=z$;

$$\therefore \quad x+y+z=(s-a)+(s-b)+(s-c)$$
$$=3s-(a+b+c)=3s-2s=s;$$

और $\quad y+z=(s-b)+(s-c)=2s-(b+c)=a$;

इसी प्रकार, $\quad z+x=b$ और $x+y=c$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=x^3+y^3+z^3+3(y+z)(z+x)(x+y)$

$$=(x+y+z)^3=s^3.$$

प्रश्नावली 73.

1. $(ax+by+cz)(by+cz-ax)(cz+ax-by)(ax+by-cz)$ का गुणनफल निकालो।

निम्नलिखित व्यंजकों का घन निकालो :—

2. $(ax+by+cz)$. 3. $(x-y+z)$. 4. $(2x+y-z)$.

5. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$ का गुणनखण्ड निकालो।

6. सिद्ध करो कि $(a+b+c)^3=(3a-b-c)^3+(3b-c-a)^3$
$+(3c-a-b)^3+24(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

7. यदि $s=x+y+z$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$$8s^3=(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3(s+x)(s+y)(s+z).$$

8. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$$s^3+(s-2a)^3+(s-2b)^3+(s-2c)^3=24(s-a)(s-b)(s-c).$$

207. घात-क्रिया (Involution): द्विपद व्यंजकों का घात निकालना ।

यह पहले ही बतलाया जा चुका है कि किसी व्यंजक को उसी व्यंजक द्वारा एक या एक से अधिक बार गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस व्यंजक का घात (Power) कहते हैं और यह कहा जाता है कि वह व्यंजक घात में लाया गया है अथवा उसे किसी निर्दिष्ट घात में लाया गया है। किसी व्यंजक को किसी घात में लाने की क्रिया को **घात-क्रिया** कहते हैं और इस प्रकार जो व्यंजक प्राप्त होता है उसको उस व्यंजक का **विस्तार** (Expansion) कहते हैं। इस विस्तार का निर्णय करने की प्रणाली को **प्रसारण** कहते हैं।

इससे पहले यह दिखाया जा चुका है कि द्विपद और त्रिपद व्यजंकों का वर्ग (Square) और घन (Cube) कैसे निकाला जा सकता है। विस्तार सम्बन्धी प्रसारण की नियमावली पर विचार करने की गुञ्जाइश इस पुस्तक में नहीं है। यहाँ केवल इसी बात पर विचार किया जायगा कि द्विपद व्यंजकों के घात का विस्तार साधारण गुणन की अपेक्षा किस प्रकार आसानी से किया जा सकता है।

साधारण गुणनक्रिया द्वारा अथवा अनु० 120 में $a=b=c=$...... लिखने से अर्थात् गुणनखण्डों के द्वितीय पदों को समान मानने से निम्न-लिखित सिद्धान्तों पर पहुँचना पड़ता है :—

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ इत्यादि।

ऊपर लिखे हुए सिद्धान्तों से $a+b$ आकार के द्विपद व्यंजकों के किसी भी घात का विस्तार (Expansion) निकालने की निम्नलिखित नियमावली सरलतापूर्वक ही प्राप्त की जा सकती है :—

(1) विस्तार के अन्तर्गत प्राप्त पदों की संख्या घातांक से एक अधिक होती है।

(2) द्विपद व्यंजक के घात में जो घातांक होता है विस्तार के प्रथम व शेष पद में क्रमशः a और b का वही घातांक होता है।

(3) प्रथम पद से आरम्भ करने पर अन्य पदों में से किसी में भी a का घातांक उससे पूर्वपदवाले a के घातांक से 1 (एक) कम और b का घातांक उससे पूर्वपदवाले b के घातांक से 1 (एक) अधिक हो जाता है।

(4) विस्तार के किसी भी पद में a और b के घातांकों का योग ही दिये हुए द्विपद व्यंजक के घातांक के समान होता है।

(5) द्विपद व्यंजकों में प्रथम पद का अङ्कगुणक 1 है। बादवाले किसी भी पद का अङ्कगुणक निकालते समय उसके अङ्कगुणक को उस पद के a के घातांक द्वारा गुणा करके प्राप्त गुणनफल को उस पद के स्थान को बतलाने वाली संख्या द्वारा भाग करने से उसके बाद के पद का अङ्कगुणक आता है। शेष (या अन्तिम) पद का अङ्कगुणक भी 1 है।

ध्यान रखो कि पहले व शेष पद से सम-दूरस्थ दो पदों के अङ्क गुणक समान हैं।

टीका—चूँकि $a-b=a+(-b)$, इसलिए $a+b$ के किसी घात के विस्तार में b के स्थान पर $-b$ रखने से ही $a-b$ के समघात का विस्तार निर्णीत हो सकता है। किसी भी पद में $-b$ का ऋण-घात होने पर वह ऋण होता है। इसलिए $a-b$ के किसी भी घात के विस्तार में पद एकान्तरक्रम से धनात्मक और ऋणात्मक होते हैं।

उदाहरण 1. $(x+y)^6$ का विस्तार लिखो।

यहाँ विस्तार में पदों की संख्या $6+1$ अर्थात् 7 होगी और उनमें से प्रथम और शेष पद x^6 और y^6 होंगे।

प्रथम पद $= x^6$

द्वितीय पद $= \dfrac{1\times 6}{1} x^5 y = 6x^5 y,$

तृतीय पद $= \dfrac{6\times 5}{2} x^4 y^2 = 15x^4 y^2,$

चतुर्थ पद $= \dfrac{15\times 4}{3} x^3 y^3 = 20x^3 y^3,$

पंचम पद $= \dfrac{20\times 3}{4} x^2 y^4 = 15x^2 y^4,$

षष्ठ पद $= \dfrac{15\times 2}{5} x y^5 = 6xy^5,$

सप्तम या शेष पद $= \dfrac{6\times 1}{6} y^6 = y^6,$

$\therefore$ निर्णीय विस्तार $= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3$
$\qquad +15x^2y^4+6xy^5+y^6.$

उदाहरण 2. $(x-y)^4$ का विस्तार लिखो ।

यहाँ $(x-y)^4=\{x+(-y)\}^4$

$$=x^4+\frac{1\times 4}{1}x^3.(-y)+\frac{4\times 3}{2}x^2(-y)^2$$
$$+\frac{6\times 2}{3}x(-y)^3+\frac{4\times 1}{4}(-y)^4$$
$$=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4.$$

उदाहरण 3. सरल करो :— $(1+a)^5-(1-a)^5$.

दिया हुआ व्यंजक $=(1+5a+10a^2+10a^3+5a^4+a^5)$
$$-(1-5a+10a^2-10a^3+5a^4-a^5)$$
$$=2(5a+10a^3+a^5)=2a(5+10a^2+a^4).$$

प्रश्नावली 74.

विस्तार करो :—

1. $(2x-1)^4$. 2. $(x-2)^5$. 3. $(ax+b)^6$.

4. $(x+y)^{[illegible]}$ के विस्तार के पदों के संख्यात्मक या अङ्क (Numerical) गुणकों का योग निकालो ।

5. सिद्ध करो कि $(1-x)^{[illegible]}$ के विस्तार में प्राप्त पदों के अङ्क (Numerical) गुणकों का योग 0 है ।

सरल करो :—

6. $(2x+1)^4-(2x-1)^4$. 7. $(ax+b)^5+(ax-b)^5$.

8. यदि $x=5$ हो, तो $x^4+4x^3+6x^2+4x-2$ का मान बताओ ।

9. यदि $x=3$, और $y=1$ हो, तो $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ का मान बताओ ।

10. सिद्ध करो कि $(3x-2y)^{10}$ के विस्तार के पदों के संख्यात्मक (Numerical) गुणकों का बीजीय योग 1 है; [मान लो कि $x=y=1$ है] ।

11. सिद्ध करो कि $(1-x)^{[illegible]}$ के विस्तार में विषम पदों के संख्यात्मक गुणकों का योग सम पदों के संख्यात्मक गुणकों के योग के समान है ।

——:०:——

अठारहवाँ अध्याय

कठिन गुणनखण्ड और तादात्म्य

208. इससे पहले बारहवें अध्याय में आसान व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालने की रीति पर विचार किया गया है। इस अध्याय में कठिन व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालने के सम्बन्ध में कई अति आवश्यक सूत्र दिये गये हैं। इन सूत्रों की सहायता से कई प्रकार के तादात्म्य सिद्ध हो सकते हैं यह भी प्रदर्शित होगा।

209. ax^2+bx+c आकार के व्यंजक के गुणनखण्डीकरण की प्रणाली पहले बतलाई जा चुकी है। यहाँ ax^2+bx+c आकार में परिवर्तित होनेवाले व्यंजकों का गुणनखण्ड निकाला जायगा।

उदाहरण 1. $3x^4-7x^2+2$ के गुणनखण्ड निकालो।

दिये हुये व्यंजक में $x^2=y$ लिखकर,

$$3x^4-7x^2+2=3y^2-7y+2$$
$$=3y^2-6y-y+2=3y(y-2)-(y-2)$$
$$=(3y-1)(y-2)=(3x^2-1)(x^2-2).$$

उदाहरण 2. $5(x^2+1)^2-24(x^2+1)-5$ के गुणनखंड निकालो।

मान लो कि, $x^2+1=y$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=5y^2-24y-5$

$$=(5y+1)(y-5)$$
$$=\{5(x^2+1)+1\}\times(x^2+1-5)$$
$$=(5x^2+6)(x^2-4).$$

उदाहरण 3. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)-15$ के गुणनखण्ड निकालो।

चारों गुणनखण्डों को दो-दो एक साथ इस प्रकार रखना है कि उनमें से प्रत्येक के गुणनफल में x^2 और x वाले पद दोनों में एक से हों।

दिया हुआ व्यंजक $=\{(x-2)(x+3)\}\{(x-4)(x+5)\}-15$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-20)-15$

$=(y-6)(y-20)-15,\quad [x^2+x=y$ लिखकर]

$=y^2-26y+105=(y-5)(y-21)$

$=(x^2+x-5)(x^2+x-21).$

210. व्युत्क्रम व्यंजक (Reciprocal Expression).

जिस व्यंजक में पहले व शेष पद से सम-दूरस्थ दो पदों के गुणक परस्पर (एक दूसरे के) समान होते हैं उसको व्युत्क्रम व्यंजक कहते हैं। समान गुणकवाले पदों को सामूहिक रूप देकर अधिक मान (of higher degree) की राशि के बदले निम्नतर राशि लिखकर चतुर्थ मान के व्युत्क्रम व्यंजक को ax^2+bx+c आकार में रूपान्तरित किया जाता है। बाद को पूर्व प्रणाली के अनुसार गुणनखण्ड निकाले जाते हैं।

उदाहरण 1. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1$ के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक

$$(x^4+1)+(5x^3+5x)+8x^2$$
$$=(x^4+1)+5x(x^2+1)+8x^2$$
$$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+5x(x^2+1)+8x^2$$
$$=(x^2+1)^2+5x(x^2+1)+6x^2$$
$$=y^2+5xy+6x^2 \qquad [\text{जबकि } x^2+1=y \text{ हो}]$$
$$=(y+2x)(y+3x)$$
$$=(x^2+1+2x)(x^2+1+3x)=(x+1)^2(x^2+3x+1).$$

सिद्धान्त— $x^4+5x^3+8x^2+5x+1=0$, इस समीकरण में x के स्थान पर उसके व्युत्क्रम (Reciprocal) $\frac{1}{x}$ लिखने से समीकरण के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। इसलिए इस तरह के समीकरण को व्युत्क्रम समीकरण और उसके बायें पक्ष को व्युत्क्रम व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण 2. $4x^4-7x^3y-5x^2y^2+7xy^3+4y^4$ के गुणनखण्ड निकालो ।

दिया हुआ व्यंजक

$$\begin{aligned}
&=(4x^4+4y^4)-(7x^3y-7xy^3)-5x^2y^2\\
&=4(x^4+y^4)-7xy(x^2-y^2)-5x^2y^2\\
&=4\{(x^2-y^2)^2+2x^2y^2\}-7xy(x^2-y^2)-5x^2y^2\\
&=4(x^2-y^2)^2-7xy(x^2-y^2)+3x^2y^2\\
&=4a^2-7axy+3x^2y^2 \qquad [a=x^2-y^2 \text{ लिखकर}]\\
&=(4a-3xy)(a-xy)\\
&=\{4(x^2-y^2)-3xy\}\{x^2-y^2-xy\}\\
&=(4x^2-3xy-4y^2)(x^2-xy-y^2).
\end{aligned}$$

211. दूसरे परिमाण वाले (of the Second Degree) समघातिक व्यंजकों (Homogeneous Expressions) का गुणनखण्ड निकालना ।

तीन अक्षरवाले दूसरे परिमाण के समघातिक व्यंजकों का गुणनखण्ड निम्नलिखित नियम के अनुसार निकाला जाता है:—

(1) व्यंजक को उसके बीच के किसी अक्षर के घात के आरोह-क्रम से सजाना होता है। (जिस अक्षर के वर्ग का गुणक 1 हो उसी अक्षर को मनोनीत करना ही सुविधाजनक है।)

(2) जिन पदों में मनोनीत अक्षर नहीं रहता, उन्हें इस अक्षर के गुणक के द्वारा गुणा करके प्राप्त गुणनफल के ऐसे दो गुणनखण्ड निकालना होता है जिनका बीजीय योगफल उक्त मनोनीत अक्षर के प्रथम घात के गुणक के समान हो।

(3) मनोनीत अक्षर के प्रथम घात के गुणक को निकाले गये दोनों गुणनखण्डों के बीजीय योग के रूप में लिखकर अनु० 160 में वर्णन की गई रीति के अनुसार क्रिया की जाती है।

उदाहरण 1. $x^2+3y^2+2z^2+4xy+3zx+7yz$ के गुणनखण्ड निकालो ।

यहाँ x^2 का गुणक 1 है । इसलिए इस व्यंजक को x के घातों के आरोहक्रमानुसार पदों को लिखना ही सुविधाजनक है ।

इस प्रकार सजाने पर दिया हुआ व्यंजक

$$=(3y^2+2z^2+7yz)+(4y+3z)x+x^2.$$

अब $3y^2+2z^2+7yz$ के ऐसे दो गुणनखण्ड निकालना है जिनका बीजीय योग $(4y+3z)$ हो । ये दोनों गुणनखण्ड $(3y+z)$ और $(y+2z)$ हैं ।

मान लो कि $A=3y+z$ और $B=y+2z$;

तो दिया हुआ व्यंजक

$$=AB+(A+B)x+x^2$$
$$=(A+x)(B+x)$$
$$=(x+3y+z)(x+y+2z).$$

उदाहरण 2. $2x^2-4y^2-3z^2-7xy-xz+13yz$ के गुणनखण्ड निकालो ।

x के घातों के आरोहक्रमानुसार पदों को लिखने से,

दिया हुआ व्यंजक $=(13yz-4y^2-3z^2)-(7y+z)x+2x^2$;

अब चूँकि x^2 का गुणक 2 है; इसलिए $2(13yz-4y^2-3z^2)$ के ऐसे दो गुणनखण्ड निकालना है जिनका बीजीय योग $-(7y+z)$ हो । परीक्षा द्वारा ज्ञात होता है कि $2(13yz-4y^2-3z^2)=(y-3z)(2z-8y)$, और $-(7y+z)=(y-3z)+(2z-8y)$.

अब मान लो कि $A=y-3z$ और $B=z-4y$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक

$$=(y-3z)(z-4y)+\{(y-3z)+2(z-4y)\}x+2x^2$$
$$=AB+(A+2B)x+2x^2=A(B+x)+2x(B+x)$$
$$=(A+2x)(B+x)=(2x+y-3z)(x-4y+z).$$

212. दो अक्षरवाले द्विघातीय साधारण (General) व्यंजक।

इस जाति के व्यंजक का गुणनखण्ड निकालने की रीति पूर्वोक्त अनुच्छेद में बतलाई गई रीति के समान है। कारण यह है कि पहले के अनुच्छेद के समघातिक व्यंजक में उसके तीन अक्षरों में से किसी एक के बदले में 1 लिखने से इस जाति का व्यंजक प्राप्त होता है।

उदाहरण 1. $2a^2+2b^2+3-5ab-7a+5b$ के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(2a^2-5ab+2b^2)-(7a-5b)+3$

$=(2a-b)(a-2b)-(7a-5b)+3.$

अब $3(2a^2-5ab+2b^2)$ के ऐसे दो गुणनखण्ड निकालना है जिनका योग $-7a+5b$ हो। परीक्षा द्वारा ज्ञात होता है कि वे $(3b-6a)$ और $(2b-a)$ हैं।

मान लो कि $A=2a-b$ और $B=a-2b$;

तो दिया हुआ व्यंजक $=AB-(3A+B)+3$

$=(A-1)(B-3)$

$=(2a-b-1)(a-2b-3).$

213. तीन अक्षरवाले द्विघातीय साधारण (General) व्यंजक।

उदाहरण। $x^2+2y^2+3z^2+3xy+4xz+5yz-6x-10y-14z+8$ के गुणनखण्ड निकालो।

अनु० 211 की प्रक्रिया के अनुसार व्यंजक के द्विघातीय पदों के गुणनखण्डीकरण द्वारा इस व्यंजक को $(x+y+z)(x+2y+3z)-(6x+10y+14z)+8$ के आकार में लिख सकते हैं।

अब, $8(x+y+z)(x+2y+3z)$ के दो ऐसे गुणनखण्ड निकालना है जिनका योग $-(6x+10y+14z)$ हो। वे दोनों गुणनखण्ड $-(2x+2y+2z)$ और $-(4x+8y+12z)$ हैं।

मान लो कि $A=x+y+z$ और $B=x+2y+3z$;

ऐसी दशा में दिया हुआ व्यंजक

$=AB-2A-4B+8=A(B-2)-4(B-2)$

$=(A-4)(B-2)=(x+y+z-4)(x+2y+3z-2).$

प्रश्नावली 75.

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालो:—

1. $10a^4x^4+19a^2x^2y^2-15y^4.$
2. $3(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)+2.$
3. $x(x+2)(x+3)(x+5)+8.$
4. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$
5. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1.$
6. $x^4-4x^3-10x^2-4x+1.$
7. $x^8-5x^6-12x^4-5x^2+1.$
8. $x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5.$
9. $3x^2-y^2-z^2-2yz-2zx-2xy.$
10. $6x^2-8y^2-6z^2+2xy+16yz+5zx.$
11. $4x^2-12xy+9y^2-4x+6y-3.$
12. $x^2-2y^2-xy-2x-5y-3.$
13. $3x^2+zx+8x+6xy+2yz-2y+3z-3.$
14. $2x^2-xy+3zx-3x-y^2+3yz-3y-2z^2+4z-2$

214. परीक्षा द्वारा द्विपद व्यंजक का गुणनखण्ड निकालना।

प्रत्येक व्यंजक अपने किसी भी गुणनखण्ड के द्वारा बाँटा जा सकता है। इसलिए $x+a$ यह द्विपदराशि किसी व्यंजक का गुणनखण्ड है या नहीं यह निर्णय करते समय केवल यही निर्णय करना होता है कि वह राशि $x+a$ द्वारा विभाज्य है या नहीं।

मान लो कि x^3+2x^2+3x-4 को $x-2$ से भाग देने पर भागफल Q और x-रहित भागशेष R आता है, तो ऐसी दशा में

$$x^3+2x^2+3x-4=(x-2)\times Q+R,$$

यह एक तादात्म्य है; इसमें x का मान चाहे जो कुछ हो, दोनों पक्षों की समानता सर्वदा बनी ही रहेगी। इसलिए दोनों पक्षों में $x=2$ लिखने से

$$2^3+2.2^2+3.2-4=0\times Q+R=R,$$

$$\therefore\quad R=8+8+6-4=18.$$

इससे स्पष्ट ही ज्ञात हो रहा है कि x^3+2x^2+3x-4 को $x-2$ से भाग देने पर जो भागशेष रहता है वह व्यंजक में x के बदले 2 लिखने से आता है। यदि ऐसा करने पर यह ज्ञात हो कि भागशेष शून्य है तो समझना चाहिये कि व्यंजक उक्त द्विपद राशि से विभाज्य है।

अतएव कोई व्यंजक किसी द्विपद राशि $x+a$ से बाँटा जा सकता है या नहीं अर्थात् यह निर्णय करते समय कि वह द्विपद राशि उस व्यंजक का गुणनखण्ड है या नहीं उस व्यंजक में $x+a=0$, अर्थात् $x=-a$ लिखकर यह देखना होता है कि इससे उस व्यंजक का मान शून्य (0) होता है या नहीं। यदि उस व्यंजक का मान शून्य हो, तो समझना चाहिये कि $x+a$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरण 1. ऊपर बतलाये गये नियम के अनुसार निकालो कि $x-1$ द्विपद राशि, x^3+3x^2-x-3 व्यंजक का गुणनखण्ड है या नहीं।

दिये हुए व्यंजक में $x=1$ लिखने से व्यंजक का मान शून्य (0) होता है। इसलिए $x-1$ उक्त व्यंजक का एक गुणनखण्ड है।

टीका— x-वाले किसी व्यंजक में x के बदले 1 प्रयोग करने पर व्यंजक में वर्त्तमान किसी भी पद का मान उस पद के गुणक के समान होता है। अतएव किसी भी व्यंजक में सचिह्न और अचल राशि (ध्रुवक पदों) का बीजीय योगफल शून्य होने पर $x-a$ उस व्यंजक का एक गुणनखण्ड होगा।

उदाहरण 2. $2x^3-9x^2+7x+6$ का गुणनखण्ड निकालो।

x के बदले -1 लिखने से व्यंजक का मान शून्य नहीं होता; इसलिए $x+1$ इस व्यंजक का गुणनखण्ड नहीं है।

व्यंजक में $x=2$ लिखने से, $2\times2^3-9\times2^2+7\times2+6=0$,

$\therefore$ $x-2$ एक गुणनखण्ड है।

$x=3$ लिखने से, $2\times3^3-9\times3^2+7\times3+6=0$;

$\therefore$ $x-3$ भी एक गुणनखण्ड है। $x=-\frac{1}{2}$ लिखने से ज्ञात होता है कि अवशिष्ट गुणनखण्ड $2x+1$ है।

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=(x-2)(x-3)(2x+1)$.

215. व्यावहारिक रीति ।

कभी कभी इस प्रकार की परीक्षा द्वारा एक द्विपद् गुणनखण्ड निकलने पर अन्य पदों को सुविधा के अनुसार सजाने पर अवशिष्ट गुणनखण्ड निकाले जा सकते हैं। नीचे के उदाहरण में यह प्रक्रिया दिखाई गई है।

उदाहरण। x^3-3x^2+3x-2 के गुणनखण्ड निकालो।

x के बदले 1 लिखने से व्यंजक का मान शून्य नहीं होता; इसलिए $x-1$ उसका गुणनखण्ड नहीं है।

$x=2$ लिखने से दिये हुए व्यंजक का मान शून्य होता है क्योंकि

$$2^3-3\times2^2+3\times2-2=0;$$

$$\therefore\ x-2 \text{ एक गुणनखण्ड है।}$$

यहाँ सरलतापूर्वक ही ज्ञात होता है कि इसका गुणनखण्ड एक द्विपद राशि होगा। यह निर्णय करने के लिए $(x-2)$ को निम्नलिखित रूप में तीन बार लिखोः—

$$(x-2)\qquad(x-2)\qquad(x-2)$$

व्यंजक का प्रथम पद x^3 प्राप्त करने के लिए पहले गुणनखण्ड को x^2 से गुणा करना होगा। अतएव,

$$x^2(x-2)\qquad(x-2)\qquad(x-2)$$

इस प्रकार लिखो।

पहला गुणनफल निकालने पर x^3-2x^2 होता है किन्तु इस व्यंजक में $-3x^2$ की आवश्यकता है। इसलिए दूसरे कोष्ठ में वर्त्तमान राशि को $-x$ से गुणा करना होगा। अतएव,

$$x^2(x-2)-x(x-2),\qquad(x-2)$$

यह रूप होगा।

दिये हुए व्यंजक में x का गुणक $+3$ है किन्तु यहाँ x का गुणक $+2$ है; $+3$ प्राप्त करने के लिए तीसरे कोष्ठवाली राशि को 1 से गुणा करके रखना होगा। अतएव,

$$x^3-3x^2+3x-2=x^2(x-2)-x(x-2)+(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2-x+1).$$

तृतीय या उससे उच्च घात के व्यंजक का एक से अधिक गुणनखण्ड होने पर उन्हें उपरोक्त नियम के अनुसार निकालना चाहिये।

प्रश्नावली 76.

गुणनखण्ड निकालो :—

1. x^3+x^2+x+1.
2. $x^3-6x^2+11x-6$.
3. x^3-7x-6.
4. $x^6+x^4-x^2-1$.
5. x^3-3x+2.
6. $3a^4-5a^3-8$.

$x-1$, $x-2$ और $x+1$ नीचे लिखे व्यंजकों के गुणनखण्ड हैं या नहीं, निर्णय करो :—

7. x^3+x^2-2x-8.
8. $x^3-5x^2-14x-8$.
9. $1-6x+12x^2-7x^3$.
10. $2x^3-3x^2+3x-1$.
11. बताओ कि 'a^3+7a^2-38' यह व्यंजक $a-2$ द्वारा विभाज्य है या नहीं।
12. $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$ के साधारण गुणनखण्ड निकालो।

216. गुणनखण्ड निकालने की विविध प्रणालियाँ।

बहुत से स्थानों में गुणनखण्डीकरण का कोई साधारण नियम निर्दिष्ट करना सम्भव नहीं होता। उन अवस्थाओं में पदों को उचित रूप से सजाकर और उनको सामूहिक रूप देकर गुणनखण्ड निकालना होता है। नीचे कुछ उदाहरण दिये गये हैं।

I. पदों को आवश्यकतानुसार विश्लेषण करके और उन्हें उचित रूप से सामूहिक रूप देकर गुणनखण्ड निकालना।

उदाहरण 1. $8x^3+4x-3$ के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(8x^3-1)+(4x-2)$

$=(2x-1)(4x^2+2x+1)+2(2x-1)$

$=(2x-1)(4x^2+2x+3)$.

उदाहरण 2. a^3+a^2+a-84 के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(a^3-64)+(a^2-16)+(a-4)$

$=(a-4)(a^2+4a+16)+(a-4)(a+4)+(a-4)$

$=(a-4)\{(a^2+4a+16)+(a+4)+1\}$

$=(a-4)(a^2+5a+21)$.

उदाहरण 3. $4x^4-12x^3+15x^2-9x+2$ के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(4x^4-12x^3+9x^2)+(6x^2-9x)+2$

$$=(2x^2-3x)^2+3x(2x-3)+2$$
$$=x^2(2x-3)^2+3x(2x-3)+2$$
$$=a^2x^2+3ax+2 \qquad [a=2x-3 \text{ लिखने से}]$$
$$=(ax+1)(ax+2)$$
$$=\{x(2x-3)+1\}\{x(2x-3)+2\}$$
$$=(2x^2-3x+1)(2x^2-3x+2)$$
$$=(2x-1)(x-1)(2x^2-3x+2).$$

II. पदों का आवश्यकतानुसार विश्लेषण करके और अनुच्छेद 213 में वर्णन की गई प्रक्रिया का अवलंबन करके गुणनखण्ड निकालना।

उदाहरण 1. $x^4+7x^3+21x^2+32x+20$ के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^4+7x^3+12x^2)+(9x^2+32x)+20$

$$=(x^2+4x)(x^2+3x)+(9x^2+32x)+20.$$

अब $20(x^2+4x)(x^2+3x)$ के दो ऐसे गुणनखण्ड निकालना है जिनका योग $9x^2+32x$ हो। स्पष्ट ही ज्ञात हो रहा है कि वे $5(x^2+4x)$ और $4(x^2+3x)$ हैं।

मान लो कि $A=x^2+4x$ और $B=x^2+3x$;

तो दिया हुआ व्यंजक $=AB+(5A+4B)+20$

$$=(A+4)(B+5)$$
$$=(x^2+4x+4)(x^2+3x+5)$$
$$=(x+2)^2(x^2+3x+5).$$

उदाहरण 2. x^4-7x^2+1 के गुणनखण्ड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^4-9x^2)+2x^2+1$

$$=(x^2-3x)(x^2+3x)+2x^2+1$$
$$=(x^2-3x)(x^2+3x)+\{(x^2-3x)+(x^2+3x)\}+1$$
$$=(x^2-3x)(x^2+3x+1)+(x^2+3x+1)$$
$$=(x^2-3x+1)(x^2+3x+1).$$

उदाहरण 3. $x^3+8y^3+1-6xy$ के गुणनखण्ड निकालो ।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^3+8y^3)+(x^2-2xy+4y^2)$

$$-(x^2+4xy+4y^2)+(x+2y)-(x+2y-1)$$

$$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)+(x^2-2xy+4y^2)$$

$$-\{(x+2y)(x+2y)-(x+2y)\}$$

$$-(x+2y-1)$$

$$=(x+2y+1)(x^2-2xy+4y^2)$$

$$-(x+2y)(x+2y-1)-(x+2y-1)$$

$$=(x+2y+1)(x^2-2xy+4y^2)-(x+2y-1)$$

$$(x+2y+1)$$

$$=(x+2y+1)(x^2-2xy+4y^2-x-2y+1).$$

उदाहरण 4. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$ के गुणनखण्ड निकालो ।

दिया हुआ व्यंजक

$$=\{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-24$$

$$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$$

$$=(m+10)(m+12)-24 \; [x^2+7x=m \text{ लिखने से}]$$

$$=m^2+22m+96$$

$$=(m+6)(m+16)$$

$$=(x^2+7x+6)(x^2+7x+16)$$

$$[\text{चूँकि } m=x^2+7x]$$

$$=(x+1)(x+6)(x^2+7x+16).$$

प्रश्नावली 77.

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालो—

1. $x^3+4x^2-5.$
2. $x^3(x-2y)+y^3(2x-y).$
3. $a^3-a^2-a-15.$
4. $3x^3-17x^2+19x+11.$
5. $x^3-12x-16.$
6. $2x^3+3x^2+x+15.$

7. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1.$

8. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-48.$ 9. $9x^3+12x^2+7x+2.$

10. $(x+1)(x+5)(x+6)(x+2)-12.$

11. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-120.$

12. $x(x+1)(x+2)(x+3)-35.$

13. $(ab+1)^4-4ab(ab+1)^2-(a^2-b^2)^2.$

14. $x^2(y^2-z^2)+4xyz-(y^2-z^2).$ 15. $x^4-9x^2+30x-25.$

16. $2x^4+7x^3+16x^2+17x+12.$ 17. $a^4b-31a^2b^3+9b^5.$

18. $x^4+12x^3+18x^2-108x+17.$

19. $x^4+8x^3+12x^2-16x+3$

20. $x^4+6x^3+5x^2-12x+3$

217. $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ का गुणनखण्डीकरण।

मान लो कि $x=a+b+c$, तो

दिया हुआ व्यंजक $=x(ab+bc+ca)-abc$

$$=x^3-x^3+x(ab+bc+ca)-abc$$

$$=x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+bc+ca)-abc$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)$$ [अनु० 144, उदा० 2.]

$$=(a+b+c-a)(a+b+c-b)(a+b+c-c)$$

$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$ [अनु० 150 देखो]

अन्य प्रकार से,

दिया हुआ व्यंजक $\{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\}-abc$

$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$ [गुणा करने से]

$$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$

$$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$$

$$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$$

$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

218. $E+2abc$ और $E+3abc$ का गुणनखण्डीकरण।

यहाँ $E \equiv a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

(i) $E+2abc=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+b^2c+bc^2$
[a के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाने से]
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$
$=(b+c)(c+a)(a+b)$. [अनु० 148 देखो]

(ii) $E+3abc=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
$=\{bc(b+c)+abc\}+\{ca(c+a)+abc\}$
$+\{ab(a+b)+abc\}$
$=bc(b+c+a)+ca(c+a+b)+ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$. [अनु० 149 देखो]

उपसिद्धान्त। $(E+3abc)-(E+2abc)=abc$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)$

पक्षान्तर द्वारा, $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$
$=(b+c)(c+a)(a+b)$.

219. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ का गुणनखण्डीकरण।

दिया हुआ व्यंजक
$=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$
[a के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाने से]
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

इसलिए अनु० 146, उदाहरण 4, के अनुसार,
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ (i)
$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$ (ii)
$=-(b-c)(c-a)(a-b)$. (iii)

उपसिद्धान्त । प्राप्त फल में a, b और c के बदले क्रमशः a^2, b^2 और c^2 रखने से,

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$$
$$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$
$$=-(b-c)(b+c)(c-a)(c+a)(a-b)(a+b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

220 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ **का गुणनखण्डीकरण ।**

दिया हुआ व्यंजक $=a^3(b-c)-ab^3+ac^3+b^3c-bc^3$

[a के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाने से]

$$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$$
$$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$$
$$=(b-c)\{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2\}$$
$$=(b-c)(b^2c-ab^2+bc^2-abc-ac^2+a^3)$$

[b के मान के अवरोह-क्रम के अनुसार रखने से]

$$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$$
$$=(b-c)(c-a)(bc-ac+b^2-a^2)$$

[c के अवरोह-क्रम के अनुसार रखने से]

$$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b+a)(b-a)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(b-a)(c+b+a)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

उदाहरण 1. सरल करो:—$(b-c)(x^2+ax+a^2)+(c-a)(x^2+bx+b^2)+(a-b)(x^2+cx+c^2)$.

दिया हुआ व्यंजक $=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$

$$+x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$$
$$+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=x^2.0+x.0+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz=(y+z)(z+x)(x+y)$.

$$\text{बायाँ पक्ष}=\{x(y+z)^2-2xyz\}+\{y(z+x)^2-2xyz\}+z(x+y)^2$$
$$=x\{(y^2+z^2+2yz)-2yz\}+y\{(z^2+x^2+2zx)-2zx\}+z(x+y)^2$$
$$=\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)\}+z(x+y)^2$$
$$=\{xy^2+xz^2+yz^2+yx^2\}+z(x+y)^2$$
$$=\{z^2(x+y)+xy(x+y)\}+z(x+y)^2$$
$$=(x+y)\{z^2+xy+z(x+y)\}$$
$$=(y+z)(z+x)(x+y).$$

221. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ का गुणनखण्डीकरण।

दिया हुआ व्यंजक $=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$

[a के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाने से]

$$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$$
$$=(b-c)\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-a^2c(c-a)\}$$

[b के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाने से]

$$=(b-c)(c-a)\{b^2(c+a)-a^2b-a^2c\}$$
$$=(b-c)(c-a)\{c(b^2-a^2)+ab(b-a)\}$$

[c के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाने से]

$$=(b-c)(c-a)(b-a)\{c(b+a)+ab\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca).$$

दिये हुये व्यंजक को $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$ के रूप में अथवा $-\{a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)\}$ के रूप में लिखा जा सकता है, अतएव,

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$$
$$=-\{a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca).$$

प्रश्नावली 78.

गुणनखण्ड निकालो : —

1. $a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a+b)-3abc.$

2. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc.$

3. $bc(b+c)-ca(c-a)-ab(b-a)-3abc.$

4. $x^2(y-z)+y^2(x-z)+z^2(x+y)-2xyz.$

5. $(x+y-z)(xy-zx-yz)+xyz.$

6. $(a^2+1)(b-c)+(b^2+1)(c-a)+(c^2+1)(a-b).$

7. $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2).$

8. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3).$

9. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b).$

10. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^2.$

11. $(a+1)^2(b-c)+(b+1)^2(c-a)+(c+1)^2(a-b).$

12. $(a+1)^3(b-c)+(b+1)^3(c-a)+(c+1)^3(a-b).$

13. $(x^2-bc)(b-c)+(x^2-ca)(c-a)+(x^2-ab)(a-b).$

14. $(a^3-1)(b-c)+(b^3-1)(c-a)+(c^3-1)(a-b).$

15. $bc(b-c)(x-a)^2+ca(c-a)(x-b)^2+ab(a-b)(x-c)^2.$

16. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b).$

17. $(1+b)(1+c)(b-c)+(1+c)(1+a)(c-a)$
$+(1+a)(1+b)(a-b).$

18. $x^6(y^2-z^2)+y^6(z^2-x^2)+z^6(x^2-y^2).$

19. $(a^3+k)(b-c)+(b^3+k)(c-a)+(c^3+k)(a-b).$

20. $(1+ab)(a+b)(a-b)+(1+bc)(b+c)(b-c)$
$+(1+ca)(c+a)(c-a).$

21. $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y).$

22. $x^2y^2(x^2-y^2)+y^2z^2(y^2-z^2)+z^2x^2(z^2-x^2).$

23. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.

24. $ab(a-b)(1+c^2)+bc(b-c)(1+a^2)+ca(c-a)(1+b^2)$.

25. $(ax+y)(b^3-c^3)+(bx+y)(c^3-a^3)+(cx+y)(a^3-b^3)$.

26. $a^4(b^3-c^3)+b^4(c^3-a^3)+c^4(a^3-b^3)$.

27. $xy(x^3-y^3)+yz(y^3-z^3)+zx(z^3-x^3)$.

28. $(a^2+bc)(b-c)+(b^2+ca)(c-a)+(c^2+ab)(a-b)$.

29. $(y-z)(y+z)^2+(z-x)(z+x)^2+(x-y)(x+y)^2$

30. $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$.

सिद्ध करो कि,

31. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=\mathrm{E}+6abc$.

32. $a^3+b^3+c^3+24abc$
$$=(a+b+c)^3-3\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}.$$

222. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$ का गुणनखण्डीकरण ।

$$(a+b+c)^3=\{a+(b+c)\}^3$$
$$=a^3+3a(b+c)(a+b+c)+(b+c)^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)$$
$$+3c^2(a+b)+6abc,$$

$\therefore$ $$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$$
$$=3\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\}$$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

223. $a^3+b^3+c^3-3abc$ का गुणनखण्डीकरण ।

$\because$ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$;

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2-3ab\}$$
$$=(a+b+c)\{a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\}$$
$$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\} \quad \ldots \quad (i)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2(a-b)^2\}. \quad \ldots \quad (ii)$$

उदाहरण । $x^3-y^3-3xy-1$ के गुणनखण्ड निकालो ।

दिया हुआ व्यंजक $=x^3+(-y)^3+(-1)^3-3x(-y)(-1)$

$$=\{x+(-y)+(-1)\}\{x^2+(-y)^2+(-1)^2$$
$$-x(-y)-(-y)(-1)-(-1)x\}$$
$$=(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x).$$

प्रश्नावली 79.

गुणनखण्ड निकालो :—

1. $x^3-y^3+z^3+3xyz$. 2. $2x^3+y^3-3x^2y$.

3. $27x^3-8y^3-1-18xy$. 4. $1-x^3-y^3-3xy$.

5. $(a-b)^3-(b-c)^3+(c-a)^3+3(b-c)(c-a)(a-b)$.

6. $x=29$, $y=18$ और $z=16$ हो, तो $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का मान बताओ ।

7. $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$ के गुणनखण्ड निकालो ।

8. $(x-2y)^3+(2y-3z)^3+(3z-x)^3$ के गुणनखण्ड निकालो ।

9. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc$ के गुणनखण्ड निकालो ।

10. $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$ के गुणनखण्ड निकालो ।

11. $x=a+b-2c$, $y=b+c-2a$ और $z=c+a-2b$ होने पर $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का मान क्या होगा ?

12. यदि $x=b+c$, $y=c+a$ और $z=a+b$ हो, तो $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc}$ का मान बताओ ।

13. $(a+2b-c)^3-(a+b)^3-(b-c)^3$ के गुणनखण्ड निकालो ।

14. $x=(a-b)(b-c)$, $y=(b-c)(c-a)$ और $z=(c-a)(a-b)$ होने पर सिद्ध करो कि $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

15. यदि $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$ और $z=c^2-ab$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$.

16. सिद्ध करो कि, $(by+az)^3+(bz+ax)^3+(bx+ay)^3$
$$-3(by+az)(bz+ax)(bx+ay)$$
$$=(a^3+b^3)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

17. $a+b+c=5$ और $ab+bc+ca=4$ हो, तो $a^3+b^3+c^3-3abc$ का मान क्या होगा ?

224. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ का गुणनखण्डीकरण ।

दिया हुआ व्यंजक $=4b^2c^2-2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$
$$=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4-2c^2a^2-2a^2b^2+2b^2c^2)$$
$$=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$
$$=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$
$$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c).$$

225. a^5+b^5 का गुणनखण्डीकरण ।

दिया हुआ व्यंजक $=a^5+a^4b-a^4b-ab^4+ab^4+b^5$
$$=a^4(a+b)-ab(a^3+b^3)+b^4(a+b)$$
$$=(a+b)\{a^4-ab(a^2-ab+b^2)+b^4\}$$
$$=(a+b)\{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\}.$$

इसी प्रकार, $a^5-b^5=(a-b)\{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\}$.

प्रश्नावली 80.

1. $2y^2z^2+8z^2x^2+8x^2y^2-16x^4-y^4-z^4$ के गुणनखण्ड निकालो ।

2. $a^4-(b^2-c^2)^2+b^4-(c^2-a^2)^2+c^4-(a^2-b^2)^2$ के गुणनखण्ड निकालो ।

3. $x=2\cdot5$, $y=3\cdot4$ और $z=4\cdot8$ हो, तो $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$ का मान क्या होगा ?

4. सिद्ध करो कि, $2(y+z)^2(z+x)^2+2(z+x)^2(x+y)^2$
$$+2(x+y)^2(y+z)^2-(x+y)^4-(y+z)^4-(z+x)^4$$
$$=16xyz(x+y+z).$$

5. x^7+y^7 और x^7-y^7 के गुणनखण्ड निकालो ।

6. $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c).$$

7. $b+c-a=3$, $c+a-b=5$ और $a+b-c=7$ हो, तो
$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$ का मान बताओ।

8. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ के गुणनखण्ड निकालो।

226. विविध प्रश्नों का हल ।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि,
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)$$
$$=(ax+by-1)^2+(ay-bx)^2.$$

बायाँ पक्ष $=(x^2-2ax+a^2)+(y^2-2by+b^2)+a^2(x^2+y^2)$
$$+b^2(x^2+y^2)-(a^2+b^2)-(x^2+y^2-1)$$
$$=(a^2x^2+b^2y^2-2ax-2by+2abxy+1)$$
$$+(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)$$
$$=(ax+by-1)^2+(ay-bx)^2.$$

उदाहरण 2. $a=x^2-yz$, $b=y^2-zx$ और $c=z^2-xy$ हो, तो सिद्ध करो कि $c^2-ab=z(ax+by+cz)$.

$$c^2-ab=(z^2-xy)^2-(x^2-yz)(y^2-zx)$$
$$=(z^4+x^2y^2-2xyz^2)-(x^2y^2-y^3z-x^3z+xyz^2)$$
$$=z^4-3xyz^2+y^3z+x^3z$$
$$=z(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$
$$=z\{(x^3-xyz)+(y^3-xyz)+(z^3-xyz)\}$$
$$=z\{x(x^2-yz)+y(y^2-zx)+z(z^2-xy)\}$$
$$=z(ax+by+cz).$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि,

$$2\{(b+c-2a)^4+(c+a-2b)^4+(a+b-2c)^4\}$$
$$=\{(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2+(a+b-2c)^2\}^2.$$

मान लो कि, $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b$ **और** $z=a+b-2c$;

तो, $x+y+z=0$, **और सिद्ध करना होगा कि,**

$$2(x^4+y^4+z^4)=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

अब, $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=0$,

अथवा, $x^2+y^2+z^2=-2(yz+zx+xy)$;

दोनों पक्षों का वर्ग करने से,

$$(x^2+y^2+z^2)^2=4(yz+zx+xy)^2 \qquad \ldots \quad (1)$$

अथवा, $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2$
$$=4(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2),$$

अथवा, $x^4+y^4+z^4=2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+8xyz(x+y+z)$
$$=2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$$
[चूँकि $x+y+z=0$.]
$$=2\{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz(x+y+z)\}$$
$$=2(yz+zx+xy)^2. \qquad \ldots \quad (2)$$

(1) **और** (2) **से**

$$2(x^4+y^4+z^4)=4(yz+zx+xy)^2$$
$$=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

अतएव तादात्म्य सिद्ध होगया ।

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि,

$$(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)$$
$$-(b+c)(c+a)(a+b)=2(a+b+c)^3+2abc.$$

मान लो कि, $x=a+b+c$, **तो** $2a+b+c=x+a$,
$2b+c+a=x+b$ **और** $2c+a+b=x+c$.

फिर, $b+c=a+b+c-a=x-a, c+a=x-b, a+b=x-c$;

$\therefore$ **बायाँ पक्ष** $=(x+a)(x+b)(x+c)-(x-a)(x-b)(x-c)$
$$=\{x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc\}$$
$$-\{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\}$$
$$=2(a+b+c)x^2+2abc$$
$$=2(a+b+c)^3+2abc. \qquad [\text{चूँकि } a+b+c=x.]$$

उदाहरण 5. सिद्ध करो कि,

$$2x(y+z-x)+(z+x-y)(x+y-z)$$
$$=2y(z+x-y)+(x+y-z)(y+z-x)$$
$$=2z(x+y-z)+(y+z-x)(z+x-y).$$

मान लो कि, $a=y+z-x,\ \ b=z+x-y$ और $c=x+y-z$;

तो, $a+b=2z,\ \ b+c=2x$ और $c+a=2y$.

प्रथम व्यंजक $=(b+c)a+bc=ab+bc+ac$,

द्वितीय व्यंजक $=(c+a)b+ca=ab+bc+ac$,

तृतीय व्यंजक $=(a+b)c+ab=ab+bc+ac$.

प्रत्येक व्यंजक $ab+bc+ac$ के समान है; अतएव वे सब परस्पर समान हैं।

प्रश्नावली 81.

सिद्ध करो कि,

1. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4abc.$$

2. $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)$
$$+c(a+b)(a^2+b^2-c^2)=2abc(a+b+c).$$

3. $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)-(a+bc)(b+ca)(c+ab)$
$$=(1+abc)(1-a^2-b^2-c^2-2abc).$$

4. $(b+c)(c+a)(a+b)-a^3-b^3-c^3$
$$=4abc+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

5. $(b-c+a^2)(b+c)+(c-a+b^2)(c+a)+(a-b+c^2)(a+b)$
$$=(b^2-c^2+a)(b^2+c^2)+(c^2-a^2+b)(c^2+a^2)$$
$$+(a^2-b^2+c)(a^2+b^2).$$

6. $(1+xy)(1-xy)(x-y)+(1+yz)(1-yz)(y-z)$
$$+(1+zx)(1-zx)(z-x)$$
$$=(yz+zx+xy)(y-z)(z-x)(x-y).$$

7. $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$
$$=3xyz(y-z)(z-x)(x-y).$$

8. $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$
$$=3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

9. $(y^2+yz+z^2)(y-z+x)+(z^2+zx+x^2)(z-x+y)$
$$+(x^2+xy+y^2)(x-y+z)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz.$$

10. $a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)$
$$+c(a-b)(x-a)(x-b)=-x(b-c)(c-a)(a-b).$$

11. $(3x-y-z)^3+(3y-z-x)^3+(3z-x-y)^3$
$$-3(3x-y-z)(3y-z-x)(3z-x-y).$$
$$=16(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

12. $b+c, c+a$ और $a+b$ में से किसी एक का मान शून्य होने पर $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ व्यंजक का भी मान शून्य होगा।

227. शर्तवाले या सापेक्ष तादात्म्य (Conditional Identities)

उदाहरण 1. यदि $a+b+c=0$ हो, तो उस दशा में सिद्ध करो कि $a^3+b^3+c^3-3abc=0$. यह अति आवश्यक फल निम्नलिखित चार उपायों से सिद्ध हो सकता है :—

(i) $a+b+c=0$; $\quad\therefore\quad a+b=-c$;

घन करने से $(a+b)^3=-c^3$, अथवा $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$,

अथवा, $\quad a^3+b^3+c^3+3ab(-c)=0$,

अथवा, $\quad a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

(ii) $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=-\{3abc-a^3-b^3-c^3\}$$
$$=-\{3abc+a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)\}$$
$$=-\{3abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}$$
$$=-(a+b+c)(ab+bc+ca)=0.$$

(iii) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$;
$$\therefore\quad 0^3=a^3+b^3+c^3+3(-a)(-b)(-c)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

(iv) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\}$$
$$=0\times\{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\}=0.$$

उदाहरण 2. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab) \quad \ldots \quad (i)$$
$$=\tfrac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2) \quad \ldots \quad (ii)$$
$$=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \quad (iii)$$

चूँकि, $a+b+c=0$, अर्थात् $a+b=-c$,

$\therefore \quad (a+b)^5=(-c)^5$;

अथवा, $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=-c^5$;

$\therefore \quad a^5+b^5+c^5=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$

$$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=-5ab(-c)(a^2+ab+b^2)=5abc\{(a+b)^2-ab\}$$
$$=5abc\{(a+b)(-c)-ab\}=-5abc(ab+bc+ca) \quad \ldots(i)$$
$$=-\tfrac{5}{2}abc(2ab+2bc+2ca)=+\tfrac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2) \quad \ldots(ii)$$

[$a+b+c=0$, $\therefore$ $2ab+2bc+2ca=-(a^2+b^2+c^2)$]

$$=+\tfrac{5}{2}(a^2+b^2+c^2)\times\tfrac{1}{3}(a^3+b^3+c^3) \quad \text{[उदाहरण 1.]}$$
$$=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3). \quad \ldots \quad \ldots(iii)$$

उदाहरण 3. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$a^7+b^7+c^7=7abc(bc+ca+ab)^2.$$

$a+b+c=0$, $\therefore$ $a+b=-c$ और $(a+b)^7=(-c)^7$,

अथवा, $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7=-c^7$,

अथवा, $a^7+b^7+c^7=-7ab\{a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5\}$

$$=-7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$$
$$=-7ab(-c)(ab+bc+ca)^2$$
$$=7abc(ab+bc+ca)^2.$$

उदाहरण 4. यदि $x+y+z+w=0$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$x^3+y^3+z^3+w^3=3(yzw+zxw+xyw+xyz).$$

चूँकि $x+y+z+w=0$, अर्थात् $x+y=-(z+w)$;

$\therefore$ $(x+y)^3=-(z+w)^3$,

या, $x^3+3xy(x+y)+y^3=-\{z^3+3zw(z+w)+w^3\}$;

या,

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3+w^3 &= -3zw(z+w)-3xy(x+y) \\ &= -3zw(-x-y)-3xy(-z-w) \\ &= 3\{zw(x+y)+xy(z+w)\} \\ &= 3\{yzw+zxw+xyw+xyz\}. \end{aligned}$$

उदाहरण 5. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a) + c(s-a)(s-b)=abc.$$

$$\begin{aligned} & 2(s-a)(s-b)(s-c) \\ &= 2\{s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc\} \\ &= 2\{s^3-2s.s^2+(ab+bc+ca)s-abc\} \\ &= -2s^3+2s(ab+bc+ca)-2abc. \end{aligned}$$

फिर,

$$\begin{aligned} & a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b) \\ &= a\{s^2-(b+c)s+bc\}+b\{s^2-(c+a)s+ca\} + c\{s^2-(a+b)s+ab\} \\ &= (a+b+c)s^2-\{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\}s+3abc \\ &= 2s^3-2(ab+bc+ca)s+3abc; \end{aligned}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=-2s^3+2s(ab+bc+ca)-2abc+2s^3 - 2(ab+bc+ca)s+3abc=abc.$

प्रश्नावली 82.

यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि,

1. $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)=4(bc+ca+ab)^2$.
2. $(a^3+b^3+c^3)^3=27a^3b^3c^3$.
3. $(2b-c)^3+(2c-a)^3+(2a-b)^3=3(2b-c)(2c-a)(2a-b)$.
4. $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc=0$.

5. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0.$

6. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0.$

7. $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$$
$$=2\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{4}.$$

8. $a^2(a^2-b^2-c^2)+b^2(b^2-c^2-a^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=0.$

9. $(b-c)(b^3+c^3-xa^3)+(c-a)(c^3+a^3-xb^3)$
$+(a-b)(a^3+b^3-xc^3)=0.$

10. $2\{(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2\}=3(a^4+b^4+c^4).$

11. $(ax-by)^3+(bx-cy)^3+(cx-ay)^3$
$=3(ax-by)(bx-cy)(cx-ay).$

12. $(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3$
$=3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab).$

निम्नलिखित तादात्म्यों को सिद्ध करोः—

13. $(y-z)(y+z-2x)^3+(z-x)(z+x-2y)^3$
$+(x-y)(x+y-2z)^3=0.$

14. $(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4$
$=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2.$

15. $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$
$=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c).$

16. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$
$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c).$

17. $(b+c-2a)(c+a-2b)+(c+a-2b)(a+b-2c)$
$+(a+b-2c)(b+c-2a)=3\{(a-b)(b-c)$
$+(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)\}.$

18. यदि $a+b+c+d=0$ हो, तो सिद्ध करो कि
$a^3+b^3+c^3+d^3+3(b+c)(c+a)(a+b)=0.$

19. यदि $a+b+c=s$ हो, तो सिद्ध करो कि,

(i) $(s-a)+(s-b)+(s-c)=2s$;

(ii) $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2+s^2$;

(iii) $(a-b)(as+b^2-ac)+(b-c)(bs+c^2-ab)$
$+(c-a)(cs+a^2-bc)=0$;

(iv) $s^3-3(s-a)(s-b)(s-c)=a^3+b^3+c^3$;

(v) $a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)=(s-a)(s-b)(s-c)$
$-2abc$;

(vi) $a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)+3abc$
$=\frac{1}{2}s(s^2-a^2-b^2-c^2)$.

20. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,

(i) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$
$=\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3-3abc)$;

(ii) $s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)$
$=ab+bc+ca$.

21. यदि $3s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4=2(s-b)^2(s-c)^2+$
$2(s-c)^2(s-a)^2+2(s-a)^2(s-b)^2$.

22. यदि $bc+ca+ab=1$ हो, तो सिद्ध करो कि,

(i) $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$;

(ii) $(1-bc)(1-ca)(1-ab)=abc(b+c)(c+a)(a+b)$.

23. यदि $x+y+z=1$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$(x+yz)(y+z)=(y+zx)(z+x)=(z+xy)(x+y)$
$=(1-x)(1-y)(1-z)$.

24. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$(ax+by)^2-(bx+cy)(cx+ay)=(bx+cy)^2-(cx+ay)$
$(ax+by)=(cx+ay)^2-(ax+by)(bx+cy)$

25 $x+y+z=3$, $xy+yz+zx=4$ और $xyz=5$ हो,
तो $(x+yz)(y+zx)(z+xy)$ का मान बताओ।

26. यदि $x = a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$(x-a)(x-b)(x-c) = (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc.$$

27. यदि $a+b+c=0$, अथवा $x+y+z=0$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$(ax+by+cz)^3+(ay+bz+cx)^3+(az+bx+cy)^3$$
$$=3(ax+by+cz)(ay+bz+cx)(az+bx+cy).$$

28. यदि $2s = a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2.$$

29. यदि $x = a^3+a^2$, $y = a^2+a$ और $z = a+1$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$(x+y)(x+z)(x^2-yz) = (x+y+z)(x-z)(x^2+y^2).$$

:○:——

उन्नीसवाँ अध्याय

शेषफल नियम (Remainder Theorem) और विभाज्यत्व (Divisibility)

228. फल और चल (Functions and Variables).

यदि किसी व्यंजक का मान एक या एक से अधिक राशि के मान के ऊपर निर्भर रहता है तो उस व्यंजक को उक्त राशि का या राशियों का फल (Function) कहते हैं और उक्त राशियों को चल (Variable) कहते हैं [अनु० 27 देखो]। फल में केवल एक चल रहने पर वह चल साधारणतः x द्वारा सूचित होता है। फल में चल के अतिरिक्त जो अन्य समस्त संख्यात्मक आक्षरिक राशियाँ रहती हैं उन सब को अचल (Constant) राशियाँ कहते हैं।

किसी फल के पद अकरणीगत चिह्न से युक्त न होने पर फल को अकरणीगत (Rational) कहते हैं और x के घात-समूह के घातांक धनात्मक पूर्णांक होने पर उसे x का अभिन्न या पूर्ण (Integral) फल कहते हैं।

जैसे, ax^2+bx+c, px^3+qx^2+rx+s ये सब x के अकरणीगत और पूर्ण फल (Rational integral Function) कहे जाते हैं। यहाँ a, b, c, p, q इत्यादि अचल हैं।

यहाँ केवल अकरणीगत और पूर्ण फलों के सम्बन्ध में ही विचार किया जायगा। ये साधारण तौर से $f(x)$ या $F(x)$ के द्वारा सूचित होते हैं।

फल का चल, जैसे इस स्थान पर x है किसी विशेष मान से युक्त होने पर उनके संकेत के मध्य में भी x के बदले वही मान लिखना होता है।

जैसे, यदि $f(x)\equiv 3x^2+5x+7$ हो, तो $f(2)\equiv 3.2^2+5.2+$, 7 अर्थात् $x=2$ होने पर फल का जो मान होता है, वह $f(2)$ से सूचित होता है।

साधारण भाव से x का मान a होने पर उस फल का मान $f(a)$ द्वारा सूचित होता है।

229. भाग सम्बन्धी कुछ आवश्यक सिद्धान्त।

सिद्धान्त 1. px^2+qx+r को $x-a$ से भाग देने पर x-रहित भागशेष pa^2+qa+r होगा।

साधारण भाग-क्रिया के द्वारा ज्ञात होता है कि,

$$\begin{array}{l} x-a\,\big)\, px^2+qx+r\,\big(\, px+(ap+q) \\ \qquad\quad \underline{px^2-apx\qquad} \\ \qquad\quad (ap+q)x+r \\ \qquad\quad \underline{(ap+q)x-a(ap+q)} \\ \qquad\quad pa^2+qa+r \end{array}$$

अतएव सिद्धान्त प्रमाणित होगया।

px^2+qx+r को $f(x)$ द्वारा सूचित करने पर भागशेष $f(a)$ द्वारा सूचित होगा।

विकल्प प्रमाण। मान लो कि उक्त भाग-क्रिया में Q भागफल और R भागशेष है; तो स्मरण रखना होगा कि R के किसी भी पद में x नहीं रहेगा।

इसलिए $f(x) \equiv px^2+qx+r=(x-a)\times Q+R.$

यह एक तादात्म्य है। इसलिए x का मान चाहे कुछ भी क्यों न हो, दोनों पक्षों की समानता स्थायी रहेगी।

इसलिए उक्त तादात्म्य के दोनों पक्षों में $x=a$ लिखने से,

$$f(a)\equiv pa^2+qa+r=(a-a)\times Q+R=0\times Q+R;$$

$$\therefore\quad R=f(a)\equiv pa^2+qa+r.$$

सिद्धान्त 2. $f(x)\equiv px^3+qx^2+rx+s$ को $x-a$ से भाग देने पर x-सहित भागशेष pa^3+qa^2+ra+s होगा।

साधारण भाग-क्रिया के द्वारा ज्ञात होता है कि

$$\begin{array}{l}
x-a\,\big)\,px^3+qx^2+rx+s\,\big(\,px^2+(pa+q)x+(pa^2+qa+r) \\
\qquad\quad \underline{px^3-pax^2} \\
\qquad\quad (pa+q)x^2+rx \\
\qquad\quad \underline{(pa+q)x^2-(pa+q)ax} \\
\qquad\qquad\qquad (pa^2+qa+r)x+s \\
\qquad\qquad\qquad \underline{(pa^2+qa+r)x-(pa^2+qa+r)a} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad pa^3+qa^2+ra+s
\end{array}$$

अतएव यह सिद्धान्त प्रमाणित होगया।

भागशेष $=f(a)=pa^3+qa^2+ra+s.$

विकल्प प्रमाण। स्मरण रखो कि उक्त भाग-क्रिया में भागफल Q और x-रहित भागशेष R है।

$$\therefore\quad f(x)\equiv px^3+qx^2+rx+s\equiv(x-a)\times Q+R.$$

यह एक तादात्म्य है, इसलिए x का मान चाहे कुछ भी क्यों न हो, दोनों पक्षों की समानता स्थायी रहेगी।

$\therefore$ दोनों पक्षों में $x=a$ लिखने से,

$$f(a)\equiv pa^3+qa^2+ra+s=(a-a)\times Q+R=0.Q+R.$$

$$\therefore\quad R=f(a)\equiv pa^3+qa^2+ra+s.$$

उक्त नियम दो शेषफल नियम नामक एक साधारण नियम का विशेष रूप है। इस नियम के विषय में अगले अनुच्छेद में विचार किया जायगा।

उदाहरण। $5x^3+3x^2-7x+4$ को $x-3$ से भाग देने पर,

$$\text{भागशेष} = 5.3^3+3.3^2-7\times3+4$$
$$=135+27-21+4=145.$$

230. शेषफल नियम (Remainder Theorem).

यदि x के किसी अकरणीगत (Rational) व पूर्ण (Integral) व्यंजक को $x-a$ द्वारा भाग किया जाय तो दिये हुए व्यंजक में x के बदले a प्रयोग करने पर x-रहित शेषफल प्राप्त होता है।

प्रत्येक अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक को $f(x)\equiv px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots\ldots+lx+m$ आकार में लिखा जाता है। यहाँ n धनात्मक पूर्णांक है। इसके द्वारा व्यंजक का घात (Degree) सूचित होता है।

मान लो कि जहाँ तक भागशेष में x से बना हुआ कोई पद नहीं रहता वहाँ तक उस व्यंजक को $x-a$ द्वारा भाग देने पर Q भागफल और R भागशेष रहता है। उस अवस्था में

$$f(x)\equiv px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots+lx+m=(x-a)\times Q+R.$$

स्मरण रहे कि R के किसी भी पद में x नहीं है।

यह एक तादात्म्य है, अतएव x का चाहे कुछ भी मान क्यों न हो, दोनों पक्षों की समानता बनी रहेगी और x के बदले कोई भी मान प्रयोग करने पर R में कोई परिवर्त्तन नहीं होगा क्योंकि R में x से बना हुआ अर्थात् x से युक्त कोई पद नहीं है।

अब स्मरण रखो कि x के बदले a प्रयोग करने पर Q का मान Q′ होता है; अतएव उक्त तादात्म्य के दोनों पक्षों में $x=a$ लिखने से

$$f(a)\equiv pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\ldots\ldots+la+m=(a-a)\times Q'+R$$
$$=0\times Q'+R$$
$$=R;\ ..$$

$$\therefore \text{भागशेष } R=f(a)\equiv pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\ldots\ldots+la+m.$$

231. गुणनखण्ड सम्बन्धी नियम (Factor Theorem).

यदि x के बदले a लिखने पर x-वाले किसी अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक का मान (Value) शून्य हो, तो उस दशा में $x-a$ उक्त व्यंजक का एक गुणनखण्ड होता है अर्थात् वह $x-a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

यह नियम पूर्व अनुच्छेद में कहे गये शेषफल नियम से अनायास ही सिद्ध किया जा सकता है। कारण यह है कि उक्त नियम से ज्ञात होता है कि $f(x)$ को $x-a$ से भाग देने पर भागशेष $f(a)$ रहता है किन्तु यहाँ $f(a)=0$ है।

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $x-a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है अर्थात् $x-a$ उसका एक गुणनखण्ड है।

उपसिद्धान्त। $f(-a)=0$ होने पर $f(x)$ फल $x+a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा।

उदाहरण 1. a का कितना मान होने पर x^3+x^2-5x-a व्यंजक, $x-2$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा?

यदि $f(x)=x^3+x^2-5x-a$ व्यंजक, $x-2$ से पूर्णरूप से विभाज्य होगा, तो $f(2)$ का मान शून्य होगा।

किन्तु $f(2)=2^3+2^2-5\times2-a=2-a$;

$\therefore\ 2-a=0$, या $a=2$.

उदाहरण 2. कौन शर्त सिद्ध होने पर x^2+px+q और $x^2+p'x+q'$ व्यंजकों का एक साधारण गुणनखण्ड $x+a$ आकार का होगा?

$x+a$ दोनों ही व्यंजकों का गुणनखण्ड है; अतएव,

$(-a)^2+p(-a)+q=0$, अर्थात् $a^2-pa+q=0$, ... (1)

और $(-a)^2+p'(-a)+q'=0$, अर्थात् $a^2-p'a+q'=0$; ... (2)

(1) और (2) से वज्रगुणन द्वारा

$$\frac{a^2}{p'q-pq'}=\frac{a}{q-q'}=\frac{1}{p-p'};$$

$$\therefore\ a^2=\frac{p'q-pq'}{p-p'} \text{ और } a=\frac{q-q'}{p-p'};$$

$$\therefore\ \frac{p'q-pq'}{p-p'}=a^2=\left(\frac{q-q'}{p-p'}\right)^2,$$

या $(p-p')(p'q-pq')=(q-q')^2$, यही निर्णेय शर्त है।

प्रश्नावली 83.

1. यदि $f(x) \equiv x^3 - 3x + 5$ हो, तो $f(2)$, $f(-3)$ और $f(5)$ का मान बताओ।

2. (i) यदि $f(n) = n^2 + 2n$ हो, उस दशा में $f(n+1) - f(n)$ का मान बताओ।

   (ii) यदि $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ हो, तो उस दशा में दिखाओ कि $x = f(y)$.

3. भाग न देकर किसी अन्य उपाय से नीचे लिखे हुए प्रत्येक उदाहरण में भागशेष निकालो :—

   (i) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) \div (x - 2)$;

   (ii) $(x^4 + 3x^2 + 6x + 7) \div (x + 3)$;

   (iii) $(x^5 - 8x^3 + 6x^2 - 4) \div (x + 2)$.

4. सिद्ध करो कि $x - y$, $a - b$, $b - c$ और $c - a$ में से हर एक $(ax + by)(bx + cy)(cx + ay) - (ay + bx)(by + cx)(cy + ax)$ व्यंजक के एक गुणनखण्ड हैं।

5. बिना भाग दिये अन्य उपाय से सिद्ध करो कि,

   (i) $x - 1$ द्विपद राशि $x^{12} - 1$, $x^4 - 2x^2 + 1$ और $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x - 4$ में से हर एक का गुणनखण्ड है।

   (ii) $x - 2$ राशि, $x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ और $x^4 - 3x^2 + 2x - 8$ इन दो व्यंजकों का एक साधारण गुणनखण्ड है।

   (iii) $x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ और $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ इन दोनों व्यंजकों में से प्रत्येक का एक गुणनखण्ड $(x + 3)$ है।

6. यदि $x^2 - 3px + q^2$ व्यंजक, $x - p$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य हो, तो सिद्ध करो कि $2p^2 = q^2$.

7. p का मान कितना हो कि $x^5 - 61x + p$ व्यंजक, $x + 1$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य हो सके ?

8. $x^3 + 3x^2 + 4x + p$ और $x^3 + x^2 + 8$ इन दोनों व्यंजकों को $x + 3$ से भाग देने पर दोनों हालतों में एक ही भागशेष आता है, तो बताओ कि p का मान क्या होगा।

9. भाग दिये बिना अन्य उपाय से सिद्ध करो कि $3a^3-2a^2b-13ab^2+10b^3$ व्यंजक $a-2b$ के द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

10. बताओ b और c में किस प्रकार का सम्बन्ध हो कि x^3+bx+c और x^3+cx+b का एक साधारण गुणनखण्ड हो।

11. यदि $x+p$ राशि ax^2+bx+c और cx^2+bx+a आदि दोनों व्यंजकों का म० स० हो, तो सिद्ध करो कि $a+b+c=0$, अथवा $a+c=b$.

12. कौन सी शर्त सिद्ध होने पर $x^3+(p+q)x+a$ व्यंजक $x+p+q$ द्वारा पूर्णरूप से विभक्त हो सकता है?

13. a का मान (शून्य के अतिरिक्त) कितना हो कि x^2+x-a और x^3-x-a का एक साधारण गुणनखण्ड हो?

14 सिद्ध करो कि $(ax+by)^3+(bx+ay)^3$ व्यंजक $a+b$ और $x+y$ इन दोनों राशियों से पूर्णरूप से विभाज्य है।

15. सिद्ध करो कि $a=1$ होने पर $x^{2n+1}+1$ व्यंजक $x+a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य नहीं होगा।

232. विभाज्यत्व (Divisibility) सम्बन्धी कुछ प्रयोजनीय नियम।

नियम 1. n सम या विषम चाहे कोई भी धनात्मक पूर्ण संख्या क्यों न हो, a^n-b^n सदा ही $a-b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा।

मान लो कि a^n-b^n को $a-b$ द्वारा भाग करने पर भजनफल Q और a रहित शेषफल R पाया जाता है।

$\therefore\ a^n-b^n\equiv(a-b)\times Q+R$ एक तादात्म्य है।

अब R में a से युक्त कोई पद न होने के कारण a का कोई भी मान स्वीकार करने पर भी R के मान में कोई परिवर्त्तन नहीं होगा, किन्तु Q में a होने के कारण ऐसा करने से Q का मान परिवर्तित होगा। मान लो कि $a=b$ लिखने पर Q का मान Q′ होता है। अतएव उक्त तादात्म्य में $a=b$ लिखने से

$$b^n-b^n=(b-b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R,$$

अथवा, $\quad R=0.$

अतएव शेषफल R शून्य होने के कारण यह नियम प्रमाणित होगया।

सरलतापूर्वक ही प्रमाणित होता है कि

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1}).$$

उदाहरण। a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4, a^5-b^5 इत्यादि हर एक $a-b$ से पूर्णरूप से विभाज्य है।

नियम 2. यदि n एक धनात्मक सम राशि हो, तो a^n-b^n व्यंजक $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा; किन्तु यदि n विषम राशि हो, तो ऐसा न होगा।

पूर्व नियम में प्रयोग किये गये अक्षरों का उपयोग करने से,

$a^n - b^n \equiv (a+b)\times Q + R$ यह तादात्म्य पाया जाता है।

अब चूँकि R में a से युक्त कोई पद वर्तमान नहीं है, अतएव a का कोई भी मान प्रयोग क्यों न किया जाय, R के मान में कोई परिवर्तन न होगा। अतएव उक्त तादात्म्य में $a=-b$ लिखने से,

$$(-b)^n - b^n = (-b+b)\times Q' + R = 0\times Q' + R = R.$$

अब यदि n सम राशि है, तो $(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$;

किन्तु यदि n विषम राशि है, तो $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$.

$\therefore$ यदि n सम राशि है, तो $R=0$; किन्तु n विषम राशि होने पर शेषफल R शून्य नहीं होता बल्कि $-2b^n$ है।

$\therefore$ n सम राशि होने पर a^n-b^n व्यंजक $a+b$ द्वारा विभाज्य है; किन्तु n यदि विषम राशि है, तो ऐसा न होगा।

सरलतापूर्वक ही यह सिद्ध किया जाता है कि,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - b^{n-1}).$$

उदाहरण। a^2-b^2, a^4-b^4 इत्यादि में से प्रत्येक व्यंजक $a+b$ से पूर्णरूप से विभाज्य है; किन्तु a^3-b^3, a^5-b^5 इत्यादि में से कोई भी $a+b$ से विभाज्य नहीं है।

नियम 3. यदि n एक धनात्मक विषम राशि हो तो a^n+b^n व्यंजक $a+b$ से पूर्णरूप से विभाज्य होगा; किन्तु यदि n सम राशि हो, तो ऐसा न होगा।

पहले नियम में प्रयोग किये गये अक्षरों को काम में लाने से,

$a^n+b^n \equiv (a+b)\times Q+R$ यह तादात्म्य पाया जाता है ।

दोनों पक्षों में $a=-b$ लिखने से,

$$(-b)^n+b^n=(-b+b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R$$

अब यदि n एक विषम राशि हो, तो

$$(-b)^n+b^n=-b^n+b^n=0;$$

किन्तु यदि n सम राशि हो, तो $(-b)^n+b^n=b^n+b^n=2b^n$;

अतएव यदि n विषम राशि हो, तो $R=0$ होता है; किन्तु यदि n सम राशि हो, तो $R=0$ नहीं होता ।

$\therefore$ n विषम राशि होने पर a^n+b^n व्यंजक $a+b$ से विभाज्य होगा; किन्तु n के सम राशि होने से ऐसा न होगा ।

सरलतापूर्वक ही सिद्ध हो सकता है कि,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1}).$$

उदाहरण । a^3+b^3, a^5+b^5 इत्यादि में से प्रत्येक व्यंजक $a+b$ से विभाज्य है; किन्तु a^2+b^2, a^4+b^4 इत्यादि में से कोई भी $a+b$ से विभाज्य नहीं है ।

नियम 4. n सम अथवा विषम चाहे कोई भी राशि क्यों न हो, a^n+b^n व्यंजक किसी हालत में $a-b$ से पूर्णरूप से विभाज्य न होगा ।

पहले के अक्षरों का उपयोग करने पर,

$a^n+b^n=(a-b)\times Q+R$ तादात्म्य पाया जाता है ।

दोनों पक्षों में $a=b$ लिखने से,

$$b^n+b^n=(b-b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R;$$

$\therefore$ $R=2b^n$. स्पष्ट ही ज्ञात होता है कि n के किसी भी मान से R का मान शून्य नहीं हो सकता; अतएव a^n+b^n कभी $a-b$ से विभाज्य नहीं हो सकता ।

उदाहरण । a^2+b^2, a^3+b^3, a^4+b^4 इत्यादि कोई व्यंजक $a-b$ से विभाज्य नहीं है ।

प्रश्नावली 84.

निम्नलिखित प्रश्नों में दिखाओ कि पहला व्यंजक दूसरे व्यंजक से पूर्ण रूप से विभाज्य है या नहीं। यदि विभाज्य है तो भागफल बताओ :—

1. $a^3-b^3,\ a+b.$
2. $a^4+b^4,\ a-b.$
3. $a^5+b^5,\ a-b.$
4. $x^5+y^5,\ x+y.$
5. यदि n एक धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो सिद्ध करो कि $(1-x)^2$ व्यंजक $1-x-x^n+x^{n+1}$ का एक गुणनखण्ड है।
6. n यदि एक धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो सिद्ध करो कि 7^n-1 सदा ही 6 द्वारा विभाज्य है।
7. यदि n एक धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो सिद्ध करो कि 3^n+2^n राशि का अन्तिम अंक 5 होगा।
8. ऐसी कौनसी संख्या है जिसके अंकों का योग यदि 9 द्वारा विभाज्य हो, तो वह संख्या भी 9 द्वारा विभाज्य होगी ?
9. सिद्ध करो कि n धनात्मक पूर्ण संख्या होने पर $4^{2n+1}+1$ व्यंजक 5 द्वारा विभाज्य है।
10. सिद्ध करो कि यदि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या हो, तो $(a+2b)^{2n+1}+a^{2n+1}$ व्यंजक $a+b$ द्वारा विभाज्य है।
11. यदि n एक धनात्मक पूर्ण अङ्क हो, तो सिद्ध करो कि $9^{2n+1}+1$ संख्या का अन्तिम अङ्क शून्य होगा।
12. सिद्ध करो कि $a-b,\ b-c,\ c-a$ में से हर एक $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$ का एक गुणनखण्ड है।
13. n चाहे कोई भी पूरी राशि क्यों न हो, $(2x+y)^n-(x+2y)^n-x^n+y^n$ व्यंजक सदा ही x^2-y^2 से पूर्णरूप से विभाज्य है।
14. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक राशि हो, तो m का आकार किस प्रकार का होने पर a^m-x^m व्यंजक a^n+x^n और a^n-x^n दोनों ही द्वारा विभाज्य होगा ?

15. n चाहे कोई धनात्मक पूर्ण राशि क्यों न हो, $(a-1)a^n + (b-1)b^n$ व्यंजक कभी भी $a+b$ द्वारा विभाज्य नहीं है ।

16. यदि n एक धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो दिखाओ कि $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ व्यंजक $(x-1)^2$ द्वारा विभाज्य होगा ।

17 सिद्ध करो कि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या होने पर $(ab)^n - (bc)^n + (cd)^n - (da)^n$ व्यंजक $ab - bc + cd - da$ द्वारा विभाज्य होगा ।

18. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ को $x - p$ से भाग देने पर x- रहित जो शेषफल पाया जाता है उसे वास्तविक भाग-क्रिया के अतिरिक्त किसी अन्य उपाय से निर्धारित करो ।

इसी प्रकार सिद्ध करो कि $a + c = d$ होने पर $x^6 + ax^5 + cx^3 + dx^2 - 1$ व्यंजक $x + 1$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है ।

गुणनखण्ड नियम सम्बन्धी नियम द्वारा सिद्ध करो कि,

19. $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

20. $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$.

21. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$
$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

22. $b^2c^2(b^2-c^2) + c^2a^2(c^2-a^2) + a^2b^2(a^2-b^2)$
$$= -(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b).$$

——:o:——

बीसवाँ अध्याय

कठिन म० स० और ल० स० अ०

233. दो बहुपद व्यंजकों का म० स०।

तेरहवें अध्याय में दो या दो से अधिक व्यंजकों का म० स० निकालते समय जिस प्रक्रिया का अवलम्बन किया गया था उसके अन्तर्निहित साधारण तत्त्व निम्नलिखित दोनों बातों पर प्रतिष्ठित है—

(1) यदि A का एक गुणनखण्ड H हो, तो mA, अर्थात् A के किसी भी अपवर्त्य का एक गुणनखण्ड H होगा।

कारण यह है कि A को H से भाग देने पर भागफल a हो, तो $A=aH$ अतएव $mA=maH$; $\therefore$ mA का एक गुणनखण्ड H है।

(2) A और B का एक साधारण गुणनखण्ड H होने पर यह A और B के किसी भी अपवर्त्य के योग और अन्तर में भी (जैसे $ma \pm nb$) एक गुणनखण्ड होगा।

मान लो कि $A=pH$ और $B=qH$. उस अवस्था में $mA=mpH$ और $nB=nqH$.

$$\therefore \quad mA \pm nB = mpH \pm nqH = (mp \pm nq)H.$$

अतः ज्ञात होता है कि $mA \pm nB$ का एक गुणनखण्ड H है।

234. म० स० निकालने का नियम।

जिन दो व्यंजकों का म० स० निकालना होगा उनमें से किसी भी एक का एकपद गुणनखण्ड नहीं भी रह सकता अथवा उनमें से एक का या दोनों का ही एकपद गुणनखण्ड हो सकता है। इन दोनों विषयों पर अलग अलग विचार किया जायगा।

पहले कल्पना करो कि A और B दोनों व्यंजकों में से किसी भी एक का एकपद गुणनखण्ड नहीं है।

A और B को उनमें दिये हुए किसी साधारण अक्षर के घातों के अवरोह अथवा आरोह क्रमानुसार सजाओ और कल्पना करो कि साधारण अक्षर के हिसाब से B की अपेक्षा A निम्नतर घात का व्यंजक नहीं है। A को B से

भाग दो और कल्पना करो कि इस भाग-क्रिया में भागफल p और शेषफल C है। अब C का एकपद गुणनखण्ड m होने पर $C=mD$; m का परित्याग करके D को एक नूतन भाजक और B को एक नूतन भाज्य के रूप में लो। B को D द्वारा भाग देते समय भिन्न का अपहरण करने के लिए आवश्यकता पड़ने पर B को एक उपयुक्त एकपद गुणनखण्ड n के द्वारा गुणा करके nB को D से भाग दो। इस भाग-क्रिया का भागफल q और शेषफल E होने पर फिर D को E से भाग दो। कल्पना करो कि इस बार भागफल r हुआ; किन्तु कुछ शेष नहीं बचा।

पूर्वोक्त नियम के अनुसार A और B के साधारण गुणनखण्डों में से हर एक $A-Bp$, अर्थात् mD का एक गुणनखण्ड है; इसलिए D का भी एक गुणनखण्ड है। अतएव A और B का कोई साधारण गुणनखण्ड B और D का भी एक साधारण गुणनखण्ड है। पक्षान्तर में B और D का कोई साधारण गुणनखण्ड $Bp+mD$, अर्थात् A का भी एक गुणनखण्ड होगा इसलिए A और B का एक साधारण गुणनखण्ड होगा। अतएव A और B का साधारण गुणनखण्ड-समूह और B और D का साधारण गुणनखण्ड समूह ठीक एक है।

इसी प्रकार सिद्ध किया जाता है कि D और E का साधारण गुणनखण्ड-समूह और B और D का साधारण गुणनखण्ड-समूह स्वभावतः A और B का साधारण गुणनखण्ड-समूह पूर्णरूप से एक है। ऊपर की भाग-क्रिया में और भी शेषफल रहने पर इसी नियम के अनुसार अग्रसर होना पड़ेगा। A, B, D और E व्यंजकों का घात (Degree) क्रमशः घटता जाता है; किन्तु फिर भी A और B, B और D, D और E सबके साधारण गुणनखण्ड एक ही हैं।

D को E से भाग देने पर कोई शेषफल (भागशेष) न रहने के कारण D और E का महत्तम समापवर्त्तक E है। अतएव A और B का म० स० E है।

पुनः, मान लो कि A और B दोनों ही का एकपद गुणनखण्ड है, अर्थात् $A=ax$ और $B=by$, a और b क्रमशः A और B के एकपद गुणनखण्डों का गुणनफल है। a और b का कोई साधारण गुणनखण्ड न होने पर X और Y का म० स० ही A और B का म० स० होगा; किन्तु a और b का कोई साधारण गुणनखण्ड होने पर X और Y के साधारण

गुणनखण्डों के अतरिक्त वह A और B का एक साधारण गुणनखण्ड होगा। अब X और Y का म० स० पूर्वोक्त रीति के अनुसार निकाला जाता है। इस प्रकार निकाले गये X और Y के म० स० को a और b के साधारण गुणनखण्डों के द्वारा गुणा करने से ही A और B का म० स० निकल आवेगा।

टीका 1—a और b में से किसी एक का मान 1 होने पर भी अर्थात् दिये हुए दो व्यंजकों में से केवल एक का एकपद गुणनखण्ड होने पर भी इस नियम का प्रयोग किया जायगा।

टीका 2—सुविधा के लिए किसी भी शेषफल से उसके गुणनखण्ड का अपसारण किया जाता है अथवा दिये हुए व्यंजक और अवशिष्ट को किसी एकपद गुणनखण्ड के द्वारा गुणा किया जाता है।

235. नियम।

किसी भी दो व्यंजकों के साधारण गुणनखण्डों में से हर एक उनके म० स० के भी गुणनखण्ड होंगे।

मान लो कि A और B दोनों व्यंजकों का म० स० E है।

$$B\big)\ \begin{array}{c}A\\ Bp\\ \hline C=mD\end{array}\ \big(p \qquad\qquad D\big)\ \begin{array}{c}nB\\ qD\\ \hline E\end{array}\ \big(q$$

अब A और B का एक साधारण गुणनखण्ड a होने पर

$$A=p'a \text{ और } B=q'a.$$

यहाँ p' और q' दोनों ही धनात्मक पूर्ण संख्या हैं,

$$\therefore \quad C=mD=A-Bp=p'a-pq'a=(p'-pq')a,$$

$$\therefore \quad D=\frac{p'-pq'}{m}.a=k.a.$$

फिर $E=nB-qD=nq'a-kqa=(nq'-kq)a$;

$\therefore$ E का एक गुणनखण्ड a है।

टीका—E राशि A और B के साधारण गुणनखण्डों का गुणनफल है।

236. तीन या तीन से अधिक व्यंजकों का म० स०—पहली रीति।

मान लो कि A, B और C तीन व्यंजकों का म० स० निकालना है। A और B का म० स० H होने पर H और C का म० स० ही A, B और C का म० स० होगा।

कारण यह है कि A और B के साधारण गुणनखण्डों के द्वारा ही H बना है; H का कोई और गुणनखण्ड नहीं है। स्वभावतः H और C के साधारण गुणनखण्डों के भीतर A, B और C के साधारण गुणनखण्डों में ही हर एक पाये जाते हैं और उनके अतिरिक्त और कोई भी गुणनखण्ड नहीं है। अतएव H और C का म० स० ही A, B और C का म० स० होगा।

इसी नियम से किसी भी संख्या के व्यंजकों का म० स० निकाला जा सकता है। व्यंजकों की संख्या तीन से अधिक होने पर उनका म० स० अन्य प्रणाली से भी निकाला जा सकता है।

जब A, B, C और D का म० स० निकालना हो, तो पहले A और B का म० स० X, और C और D का म० स० Y निकालने के बाद X और Y का म० स० निकाल लेना ही काफ़ी होगा। अन्यान्य दशाओं में भी ऐसा ही किया जाता है।

237. दूसरी रीति।

अनेक स्थलों में पहले बतलाई गई रीति की अपेक्षा और भी सरलता-पूर्वक म० स० निकाला जाता है। इस रीति में ऊपर दिये हुए दो व्यंजकों से निम्नतर घात के ऐसे दो व्यंजक निकालना होता है जिनका म० स० दिये हुए दोनों व्यंजकों के म० स० के समान हो। नीचे लिखे हुए नियम से इसकी सत्यता का प्रमाण मिल जायगा।

यदि A और B दो बिना एकपद गुणनखण्डवाले व्यंजक हों और l, m, p, q ऐसी चार अंक की संख्याएँ हों कि $lq-mp \neq 0$, उस दशा में $lA+mB$ और $pA+qB$ के म० स० से उसका अंक गुणनखण्ड निकाल देने पर ही A और B का म० स० निकल आवेगा।

मान लो कि A व B का म० स० H है। चूँकि A व B के साधारण गुणनखण्ड में से हर एक $lA+mB$ और $pA+qB$ इन दोनों ही व्यंजकों का साधारण गुणनखण्ड है, अतएव वह अन्त में बतलाये गये दोनों व्यंजकों का साधारण गुणनखण्ड होगा।

पुनः $q(lA+mB)-m(pA+qB)=(lq-mp)A \quad \ldots \quad (1)$

और $l(pA+qB)-p(lA+mB)=(lq-mp)B \quad \ldots \quad (2)$

(1) और (2) से ज्ञात होता है कि $(lA+mB)$ और $(pA+qB)$ का प्रत्येक साधारण गुणनखण्ड $(lq-mp)A$ और $(lq-mp)B$ इन दोनों ही व्यंजकों का गुणनखण्ड है। अब चूँकि $lq-mp$ एक अंक है, अतएव उक्त दोनों व्यंजकों के अंक गुणनखण्ड छोड़कर और सब साधारण गुणनखण्ड A और B दोनों ही के गुणनखण्ड होंगे, अर्थात् A व B का भी साधारण गुणनखण्ड होगा।

इसलिए $lA+mB$ और $pA+qB$ के साधारण गुणनखण्डों में से अंक गुणनखण्डों को छोड़ देने पर ही A व B के साधारण गुणनखण्ड पाये जायँगे। अर्थात् $lA+mB$ और $pA+qB$ के म० स० में से अंक गुणनखण्ड निकाल देने पर ही A और B का म० स० पाया जायगा।

टीका— l, m, p, q ये सब किसी भी संख्यात्मक मान से युक्त हो सकते हैं केवल $lq-mp \neq 0$ के विशेष विशेष मान स्वीकार करने पर दिये हुए दोनों व्यंजकों के बदले समान म० स० से युक्त अधिक सरल राशि पाई जाती है।

व्यावहारिक क्षेत्र में दिये हुए दोनों व्यंजकों के सब से उच्च और सब से निम्न पदों को पर्याय क्रम से सजाने के बाद अनु० 170 में बतलाये गये नियम के अनुसार क्रिया की जाती है।

उपसिद्धान्त 1. $l=1, m=1, p=1$ और $q=-1$ लिखने पर ज्ञात होता है कि $A+B$ और $A-B$ का म० स० ही A और B का म० स० है।

उपसिद्धान्त 2. $l=1, m=\pm 1, p=0$ और $q=1$ लिखने पर ज्ञात होता है कि $A \pm B$ और B का म० स० ही A और B का म० स० है।

इसी प्रकार $A \pm B$ और A का म० स० ही A और B का म० स० है।

उदाहरण। $x^4-115x+24$ और $24x^4-115x^3+1$ का म० स० निकालो।

मान लो कि $A \equiv x^4-115x+24$ और $B \equiv 24x^4-115x^3+1$;

तो, $24A-B=24(x^4-115x+24)-(24x^4-115x^3+1)$

$$=115x^3-2760x+575$$

$$=115(x^3-24x+5);$$

और $A-24B=(x^4-115x+24)-24(24x^4-115x^3+1)$

$$=-575x^4+2760x^3-115x$$

$$=-115x(5x^3-24x^2+1);$$

$\therefore$ A और B का म० स० और $A' \equiv x^3-24x+5$ व $B' \equiv 5x^3-24x^2+1$ का म० स० एक ही है ।

चूँकि $5A'-B'=5(x^3-24x+5)-(5x^3-24x^2+1)$

$$=24x^2-120x+24=24(x^2-5x+1),$$

और $A'-5B'=(x^3-24x+5)-5(5x^3-24x^2+1)$

$$=-24x^3+120x^2-24x$$

$$=-24x(x^2-5x+1);$$

इसलिए A′ और B′ का म० स० x^2-5x+1.

$\therefore$ निर्णेय म० स० $=x^2-5x+1$.

प्रश्नावली 85.

निम्नलिखित व्यंजकों का म० स० निकालो:—

1. $3x^3-5x^2+7$ और $6x^4-7x^3-5x^2+14x+7$.
2. $3a^3+5a^2+5a+2$ और $2a^3+5a^2+5a+3$.
3. $x^4+2x^3-7x^2+16x+15$ और $x^4-9x^3+20x^2-21x-15$.
4. $2x^4+19x^3+20x^2-31x+8$ और $2x^4+7x^3-64x^2+62x-16$.
5. $2x^3-7x^2-46x-21$ और $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$.
6. $8x^4+3x+10$ और $10x^4+3x^3+8$.
7. $8x^4-21x^3+1$ और $x^4-21x+1$.
8. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ और $5x^4-3x^2-8x-3$.
9. $x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$ और x^4-4x+3.
10. $6x^4+25x^3+25x^2+13x+3$ और $3x^4+11x^3+13x^2+7x+2$.
11. x^3-4x^2+x+6, $x^3-3x^2-4x+12$ और $x^3-7x^2+16x-12$.

12. $x^4-x^3+x^2+x-2,\ x^4+2x^2+x+2$
और $2x^4-5x^3+8x^2-7x+2.$

13. $x^3-4x^2+5x-2,\ x^3-3x-2$ और $x^3-7x+6.$

14. $x^4-8x^3+28x^2-53x+42,\ x^4+6x^3-42x^2+129x-154$
और $x^4+3x^3-38x^2+123x-189.$

15. $x^5+x^4-4x^3+2x^2+6x-9,\ x^4-x^2+6x-9$
और $x^4+2x^3-5x^2-6x+9.$

238. तीन या तीन से अधिक व्यंजकों का ल० स० अ० निकालना।

अनु० 178 के अनुसार A, B, C, D ...... आदि व्यंजकों का ल० स० अ० निकालने का निम्नलिखित नियम पाया जाता है :—

1. A और B का ल० स० अ० निकालो; मान लो कि वह L है।
2. L और C का ल० स० अ० निकालो; मान लो कि वह M है।
3. M और D का ल० स० अ० निकालो; मान लो कि वह N है।

इसी तरह करते जाने पर अन्त में प्राप्त हुआ ल० स० अ० ही निर्णेय ल० स० अ० होगा।

उदाहरण। $2x^3+5x^2-22x+15,\ x^2+4x-5$ और $2x^3+11x^2-x-30$ का ल० स० अ० निकालो।

पहले दो व्यंजकों का ल० स० अ० $2x^3+5x^2-22x+15$; फिर $2x^3+5x^2-22x+15$ और सबसे अन्त के व्यंजक का ल० स० अ० $2x^4+9x^3-12x^2-29x+30$ है।

$\therefore$ निर्णेय ल० स० अ० $=2x^4+9x^3-12x^2-29x+30.$

239. नियम।

दो या दो से अधिक व्यंजकों का कोई साधारण गुणनखण्ड उनके ल० स० अ० का भी एक अपवर्त्य है।

मान लो कि A और B व्यंजकों का एक साधारण गुणनखण्ड m है और उनका ल० स० अ० L है; और मान लो कि m को L से भाग देने

पर r और (सम्भव स्थल में) शेषफल s होता है। (L का मान s से अधिक उच्च है)।

इसलिए $m = r\text{L} + s$; $\therefore \quad s = m - r\text{L}$.

अब m और L दोनों ही A और B से विभाज्य हैं; अतएव $m - r\text{L}$ भी (अर्थात् s) A और B के द्वारा विभाज्य है। $\therefore$ A और B का एक साधारण गुणनखण्ड s है, किन्तु s की अपेक्षा L अधिक उच्च मान का है। इसलिए A और B का ल० स० अ० L नहीं हो सकता। किन्तु यह कल्पना (Assumption) के विपरीत है। अतएव स्वभावतः m, L से पूरा पूरा बाँटा जासकता है और कुछ भी शेषफल नहीं बचेगा अर्थात् m, L का एक अपवर्त्य है।

प्रश्नावली 86.

ल० स० अ० निकालो :—

1. $x^3 - 7x^2 - 80x + 576$, $3x^2 - 14x - 80$ और $3x^2 + 17x - 90$.
2. $x^5 + x^3 + x^2 + 1$, $x^4 - x^3 + x - 1$ और $x^5 + 2x^4 - x - 2$.
3. $27x^4 + x$, $87x^2 + 8x - 7$ और $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$.
4. दो व्यंजकों का म० स० $x^2 - x - 2$ और ल० स० अ० $x^4 - 5x + 4$ है; उनमें से एक व्यंजक यदि $x^3 - 2x^2 - x + 2$ हो, तो दूसरा व्यंजक बताओ।
5. दो व्यंजकों का ल० स० अ० $5x^5 - 9x^4 - 17x^3 + 7x^2 + 12x + 2$ और म० स० $5x^2 + 6x + 1$ है। उन दोनों व्यंजकों को बताओ।
6. यदि $x^2 + ax + b$ और $x^2 + a'x + b'$ का म० स० $x + c$ हो, तो सिद्ध करो कि उनका ल० स० अ० $x^3 + (a + a' - c)x^2 + (aa' - c^2)x + (a - c)(a' - c)c$ होगा।

——:o:——

इक्कीसवाँ अध्याय

कठिन भिन्न

240. भिन्नों का सरलीकरण (Simplification of Fractions).

इससे पहले भिन्नों के आसान प्रश्नों पर विचार किया जाचुका है। इस अध्याय में कठिन प्रश्नों पर विचार किया जायगा और सरल करने की कई नई रीतियाँ बतलाई जायँगी।

उदाहरण 1. सरल करो :—

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)}.$$

मान लो कि $b-c=x,\ \ c-a=y$ और $a-b=z$;

तो, $\qquad x+y+z=0$;

$\therefore\quad$ अंश $=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$$=-2(xy+yz+zx);$$

और हर $=z(-y)+x(-z)+y(-x)=-(xy+yz+zx)$.

$\therefore\quad$ दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{-2(xy+yz+zx)}{-(xy+yz+zx)}=2.$$

उदाहरण 2. सरल करो :—

$$\frac{(a+b)^3-c^3}{(a+b)^2-c^2}+\frac{(b+c)^3-a^3}{(b+c)^2-a^2}+\frac{(c+a)^3-b^3}{(c+a)^2-b^2}-2(a+b+c).$$

प्रथम भिन्न $=\dfrac{(a+b-c)\{(a+b)^2+c(a+b)+c^2\}}{(a+b-c)(a+b+c)}$

$$=\frac{(a+b)^2+c(a+b)+c^2}{a+b+c}.$$

द्वितीय भिन्न

$$=\frac{(b+c-a)\{(b+c)^2+a(b+c)+a^2\}}{(b+c-a)(a+b+c)}$$

$$=\frac{(b+c)^2+a(b+c)+a^2}{a+b+c}.$$

तृतीय भिन्न

$$=\frac{(c+a-b)\{(c+a)^2+b(c+a)+b^2\}}{(c+a-b)(a+b+c)}$$

$$=\frac{(c+a)^2+b(c+a)+b^2}{a+b+c}.$$

प्रथम तीन पदों के योग का अंश

$$=\{(a+b)^2+c(a+b)+c^2\}+\{(b+c)^2+a(b+c)+a^2\}$$
$$+\{(c+a)^2+b(c+a)+b^2\}$$

$$=3(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca).$$

∴ प्रथम तीनों पदों का योग

$$=\frac{3(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

$$=\frac{3(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

$$=3(a+b+c)-\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}.$$

अतएव, दिया हुआ व्यंजक

$$=3(a+b+c)-\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}-2(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)-\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{a+b+c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

उदाहरण 3. सरल करो :—

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^2+x-2}+\frac{2}{x^2+3x+2}.$$

दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{(x-1)(x+2)}+\frac{2}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{2(x+2)+3(x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{7x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

241. आंशिक भिन्न (Partial Fractions) द्वारा सरलीकरण ।

बहुधा एक भिन्न एक से अधिक भिन्नों में विश्लेषण करके सरल की जाती है। भिन्न का हर दो गुणनखण्डों का गुणनफल होने पर उसका विश्लेषण करके भिन्न को दो आंशिक भिन्नों के योग या अन्तर के रूप में प्रकट किया जाता है।

उदाहरण । सरल करो :—

$$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}+\frac{y-z}{(a+y)(a+z)}+\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}.$$

$$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}=\frac{x-y}{x-y}\left(\frac{1}{a+y}-\frac{1}{a+x}\right)=\frac{1}{a+y}-\frac{1}{a+x};$$

$$\frac{y-z}{(a+y)(a+z)}=\frac{y-z}{y-z}\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a+y}\right)=\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a+y};$$

$$\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}=\frac{z-x}{z-x}\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+z}\right)=\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+z};$$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+x}=0.$

प्रश्नावली 87.

सरल करो :—

1. $\frac{2-x}{1-2x}-\frac{2+x}{1+2x}-\frac{1-6x}{4x^2-1}.$

2. $\frac{b-1}{b+2}-\frac{b+1}{b-2}-\frac{12}{4-b^2}+\frac{6}{2+b}.$

3. $\frac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}.$

4. $\frac{(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3}{(y+z)(y-z)^3+(z+x)(z-x)^3+(x+y)(x-y)^3}.$

5. $\frac{1}{x+a}+\frac{a}{x^2-a^2}+\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{2x^3}{x^4+a^4}.$

6. $\dfrac{x^4-x^3y-xy^3+y^4}{x^4+3x^3y+4x^2y^2+3xy^3+y^4}$.

7. $\dfrac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$.

8. $\dfrac{a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)}{a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)}$.

9. $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+2a}+\dfrac{1}{x+3a}-\dfrac{1}{x+4a}$.

10. $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^2}{x^4-y^4}$.

11. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8-1}$.

12. $\dfrac{1}{x^2+x-6}+\dfrac{2}{x^2-2x-15}+\dfrac{3}{x^2-7x+10}$.

13. $\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{2x^3}{x^4-1}$.

14. $\dfrac{1}{(x+2)(2x+1)}+\dfrac{1}{(2x+1)(4x+1)}+\dfrac{1}{(4x+1)(6x+1)}$.

15. $\dfrac{1}{(x+a)(2x+3a)}+\dfrac{1}{(2x+3a)(3x+5a)}+\dfrac{1}{(3x+5a)(5x+7a)}$.

16. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

17. $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-10x+24}+\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-35}+\dfrac{x^2-x-6}{x^2-13x+42}$.

18. $\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}+\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}+\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

19. $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$.

20. $\dfrac{1}{(x^2+x+7)(x^2+2x+6)}+\dfrac{1}{(x^2+2x+6)(x^2+3x+5)}$
$+\dfrac{1}{(x^2+3x+5)(x^2+4x+4)}$.

21. $1+\frac{a}{x-a}+\frac{bx}{(x-a)(x-b)}+\frac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
$+\frac{dx^3}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$

22. $1+\frac{a}{b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{2a^2}{a^2-b^2}.$

23. $\frac{9y^2-(4z-2x)^2}{(2x+3y)^2-16z^2}+\frac{16z^2-(2x-3y)^2}{(3y+4z)^2-4x^2}+\frac{4x^2-(3y-4z)^2}{(4z+2x)^2-9y^2}.$

24. $\frac{yz(y-z)(y^2+z^2)+zx(z-x)(z^2+x^2)+xy(x-y)(x^2+y^2)}{y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)+x^2y^2(x-y)}.$

25. $\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$

26. $\frac{7x^3-2x^2y-63xy^2+18y^3}{5x^4-3x^3y-43x^2y^2+27xy^3-18y^4}.$

242. **चक्र-क्रमवाली भिन्न** (Fractions involving Cyclic Order).

अक्षर यदि चक्र-क्रम में दिये जायें तो इस प्रकार की भिन्नों के सरल करने में विशेष सुविधा होती है ।

उदाहरण । सरल करो:—

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

पहले पद के हर में अक्षर चक्र-क्रम में नहीं हैं; किन्तु $a-c=-(c-a)$, **इसलिए** $(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$; **अन्तवाले पद में अक्षर चक्र-क्रम में हैं ।**

अतएव $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}=-\frac{a^2}{(a-b)(c-a)}.$

इसी प्रकार, $\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}=-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}.$

और $\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=-\frac{c^2}{(c-a)(b-c)},$

हरों का ल० स० अ० $=(a-b)(b-c)(c-a);$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक

$$= -\left\{\frac{a^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(b-c)}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$= -\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1.$$

243. चक्र-क्रमवाली भिन्नों के सम्बन्ध में कुछ आवश्यक फल।

निम्नलिखित फलों की सहायता से बहुत आसानी से चक्र-क्रम सम्बन्धी बहुत ही कठिन भिन्नें सरल की जाती हैं :—

1\. यदि $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)} \equiv X, \dfrac{1}{(b-c)(b-a)} \equiv Y$

और $\dfrac{1}{(c-a)(c-b)} \equiv Z$ हो,

तो, (*i*) $X+Y+Z=0$; (*ii*) $aX+bY+cZ=0$;

(*iii*) $bcX+caY+abZ=1$; (*iv*) $a^2X+b^2Y+c^2Z=1$;

(*v*) $a^3X+b^3Y+c^3Z=a+b+c$;

(*vi*) $a^4X+b^4Y+c^4Z=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$.

2\. यदि $P \equiv \dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x\pm a)}$, $Q \equiv \dfrac{1}{(b-a)(b-c)(x\pm b)}$,

$R \equiv \dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x\pm c)}$ और $S \equiv \dfrac{1}{(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)}$ हो,

तो, (*i*) $P+Q+R=S$; (*ii*) $a^2P+b^2Q+c^2R=Sx^2$.

उदाहरण 1. सरल करो :—

$$\frac{a(a+1)+1}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(b+1)+1}{(b-a)(b-c)} + \frac{c(c+1)+1}{(c-a)(c-b)}.$$

व्यंजक $= \left\{\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}\right\}$

$$+\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$=(a^2X+b^2Y+c^2Z)+(aX+bY+cZ)+(X+Y+Z)$$
$$=1+0+0=1.$$

उदाहरण 2. सरल करो :—

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

$$\text{व्यंजक} = -\frac{a}{(a-b)(c-a)(x-a)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)(x-b)}$$
$$-\frac{c}{(c-a)(b-c)(x-c)}$$

$$=-\frac{a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a-b)(x-a)(x-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

अन्त में कही गई भिन्न का अंश $=a(b-c)\{x^2-(b+c)x+bc\}$
$$+b(c-a)\{x^2-(c+a)x+ca\}+c(a-b)\{x^2-(a+b)x+ab\}$$
$$=a(b-c)x^2-a(b^2-c^2)x+abc(b-c)$$
$$+b(c-a)x^2-b(c^2-a^2)x+bca(c-a)$$
$$+c(a-b)x^2-c(a^2-b^2)x+cab(a-b)$$
$$=\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}x^2$$
$$-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}x$$
$$+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$$
$$=\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}x$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)x.$$

$$\therefore\ \text{व्यंजक} = -\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)x}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{\quad}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

244. सममित व्यंजक (Symmetrical Expression).

यदि किसी व्यंजक के दो अक्षरों का स्थान-विनिमय करके लिखने पर भी व्यंजक में कोई परिवर्तन नहीं होता, तो वह व्यंजक उन दोनों अक्षरों का सममित कहा जाता है। जैसे, a^2+b^2+2ab व्यंजक a और b का सममित है।

इसी प्रकार तीन अक्षरों में से किसी भी दो अक्षरों का स्थान-विनिमय करने से यदि व्यंजक पहले की भाँति बना रहे, तो उस व्यंजक को उन तीन अक्षरों का सममित कहते हैं। जैसे, $a^3+b^3+c^3-3abc$ एक सममित व्यंजक है जो a, b और c इन तीन अक्षरों का सममित है।

उदाहरण। सरल करो :—

$$\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}.$$

हरों का ल० स० अ० $=(a+b)(b+c)(c+a)$;

∴ दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{(a^2+bc)(b+c)+(b^2+ca)(c+a)+(c^2+ab)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2\{(b+c)(c+a)(a+b)-2abc\}}{(a+b)(b+c)(c+a)}=2-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

प्रश्नावली 88.

सरल करो:—

1. $\frac{ax}{(a-b)(a-c)}+\frac{bx}{(b-c)(b-a)}+\frac{cx}{(c-a)(c-b)}.$

2. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}.$

3. $\frac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}.$

4. $\frac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{x-b}{(b-a)(b-c)}+\frac{x-c}{(c-a)(c-b)}.$

5. $\frac{bc(x+a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x+b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab(x+c)}{(c-a)(c-b)}.$

6. $\frac{(b+c-x)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a-x)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(a+b-x)}{(c-a)(c-b)}.$

7. सिद्ध करो कि,

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}.$$

सरल करो :—

8. $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}.$

9. $\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}.$

10. $\frac{a}{bc(a-b)(a-c)}+\frac{b}{ca(b-a)(b-c)}+\frac{c}{ab(c-a)(c-b)}.$

11. $\frac{x^2yz+1}{(x-y)(x-z)}+\frac{xy^2z+1}{(y-z)(y-x)}+\frac{xyz^2+1}{(z-y)(z-x)}.$

12. $\frac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^3}{(z-y)(z-x)}.$

13. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$

14. $\frac{(a-x)(a-y)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-x)(b-y)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c-x)(c-y)}{(c-a)(c-b)}.$

15. $\frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^2+qb+r}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^2+qc+r}{(c-a)(c-b)}.$

16. $\frac{b^2-ca}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2-ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{a^2-bc}{(c-a)(a-b)}.$

17. $\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(b-c)}.$

18. $\frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}.$

19. $\frac{(a-b)^3+(b-c)^3}{a-c}+\frac{(b-c)^3+(c-a)^3}{b-a}+\frac{(c-a)^3+(a-b)^3}{c-b}.$

20. $\frac{1}{a^2+2bc-b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+2ca-c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+2ab-a^2-b^2}.$

21. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$

22. $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}.$

23. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$

24. $\dfrac{b+c-a}{(b+c)(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a-b}{(c+a)(a-b)(b-c)}+\dfrac{a+b-c}{(a+b)(b-c)(c-a)}.$

25. $\dfrac{(x+1)^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{(y+1)^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{(z+1)^2}{(z-x)(z-y)}.$

26. $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}.$

27. $\dfrac{x+y}{(x^2-yz)(y^2-zx)}+\dfrac{y+z}{(y^2-zx)(z^2-xy)}+\dfrac{z+x}{(z^2-xy)(x^2-yz)}.$

28. $\dfrac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2}{(z+x)(z+y)}+\dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$

29. सिद्ध करो कि,

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2.$$

245. मिश्र भिन्नें (Complex Fractions).

जिन भिन्नों के अंश व हर अथवा दोनों ही एक एक भिन्न हैं उनको मिश्र भिन्नें कहते हैं।

जैसे, $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$, $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ में से प्रत्येक मिश्र भिन्न है।

मिश्र भिन्न को जब सरल करना हो, तो हर व अंश दोनों को अलग अलग सरल कर लेना चाहिये। तत्पश्चात् अंश को हर से भाग दे देना चाहिये।

उदाहरण 1. सरल करो :— $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$.

अंश $=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ और हर $=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)\div\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

उदाहरण 2. सरल करो :—

$$\frac{\dfrac{a+b}{1-ab}+\dfrac{a-b}{1+ab}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}\div\frac{\dfrac{a+b}{1-ab}-\dfrac{a-b}{1+ab}}{1+\dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}.$$

पहली भिन्न का अंश

$$=\frac{(a+b)(1+ab)+(a-b)(1-ab)}{1-a^2b^2}=\frac{2a(1+b^2)}{1-a^2b^2};$$

पहली भिन्न का हर

$$=1-\frac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}=\frac{1-a^2b^2-a^2+b^2}{1-a^2b^2}=\frac{(1+b^2)(1-a^2)}{1-a^2b^2};$$

$\therefore$ पहली भिन्न

$$=\frac{2a(1+b^2)}{1-a^2b^2}\div\frac{(1+b^2)(1-a^2)}{1-a^2b^2}=\frac{2a}{1-a^2}, \qquad \dots \qquad (1)$$

इसी प्रकार, दूसरी भिन्न $=\dfrac{2b}{1-b^2}$; $\qquad \dots \qquad (2)$

$\therefore$ (1) और (2) से दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{2a}{1-a^2}\div\frac{2b}{1-b^2}=\frac{a(1-b^2)}{b(1-a^2)}.$$

246. वितत भिन्न (Continued Fraction).

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\cdots}}}$$ इस प्रकार की भिन्न को वितत भिन्न कहते हैं ।

जब इस प्रकार की भिन्न को सरल करना हो, तो अङ्कगणित की रीति से सब से नीचे के अंश से क्रिया आरम्भ करके क्रमशः ऊपर चढ़ना चाहिये ।

उदाहरण । सरल करो :—

$$\cfrac{x}{x-\cfrac{x}{x-\cfrac{x}{1-x}}}$$

दिया हुआ व्यंजक

$$=\cfrac{x}{x-\cfrac{x}{\cfrac{x-x^2-x}{1-x}}}=\cfrac{x}{x-\cfrac{x}{\cfrac{x^2}{x-1}}}=\cfrac{x}{x-\cfrac{x(x-1)}{x^2}}$$

$$=\cfrac{x}{x-\cfrac{x(x-1)}{x^2}}=\frac{x^3}{x^3-x^2+x}=\frac{x^3}{x(x^2-x+1)}=\frac{x^2}{x^2-x+1}.$$

247. कठिन भिन्न-सम्बन्धी समीकरण ।

उदाहरण 1. हल करो :—

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=\frac{2}{3}.$$

बायें पक्ष को वितत भिन्न को सरल करने पर x आता है;

$\therefore \quad x=\frac{2}{3}$, निर्णेय मान ।

उदाहरण 2. हल करो:—

$$\frac{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}=1.$$

बायाँ पक्ष सरल करने पर $\dfrac{a^2+x^2}{2ax}$ होता है;

$\therefore$ $a^2+x^2=2ax$, या $(a-x)^2=0$; $\therefore$ $x=a$.

प्रश्नावली 89.

सरल करो:—

1. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}}$. 2. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}$. 3. $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}$.

4. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}$. 5. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\times\left\{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}$.

6. $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{y-z}+\dfrac{z}{z-x}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y+z}{y-z}+\dfrac{z+x}{z-x}+3}$. 7. $\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}\div\dfrac{1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

8. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$.

9. $\dfrac{x-\dfrac{x-y}{1+xy}}{1+\dfrac{x(x-y)}{1+xy}}$. 10. $\dfrac{\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2}\right)\left(\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)}$.

11. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$.

12. $x+1-\dfrac{x}{x+2-\dfrac{x+1}{x+\dfrac{1}{x+2}}}$.

13. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{2-x}}}$.

14. $\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{a-1}}}$.

15. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{2y-x}{x-y}}}}$.

16. $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1+x+\dfrac{x}{1-x+x^2}}}$.

17. $\dfrac{y^2-zx}{y+z-\dfrac{y(x+y+z)}{y+z-\dfrac{zx}{x+y}}}$.

18. $\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}}{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)}\times\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{ab}}$.

19. यदि $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ हो, तो $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}$ का सरलतम मान कितना होगा ?

20. $x=\dfrac{1}{t+1}$ होने पर $\dfrac{x^2-2}{x+1}$ को t द्वारा प्रकट करो और जो कुछ फल प्राप्त हो उसको सरल करो ।

21. $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}$ होने पर $\dfrac{ay}{a+y}$ का मान बताओ ।

22. $x=\dfrac{a}{b}$ होने पर निम्नलिखित व्यंजकों का सरलतम मान कितना होगा, निर्णय करो :—

(i) $\dfrac{x^2+2x}{4x-1}$; (ii) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{b}}$.

23. $x=\dfrac{2a-3b}{a-b}$ होने पर $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}}$ के मान को लघुतम रूप में प्रकट करो।

24. $x=\dfrac{a+b}{a+ab}$ होने पर $\dfrac{1-x}{1+x}$ का लघुतम मान क्या होगा ?

25. $x=\dfrac{a+b}{1-ab}$ और $y=\dfrac{a-b}{1+ab}$ होने पर $\dfrac{x+y}{1-xy}$ और $\dfrac{x-y}{1+xy}$ का मान कितना होगा ? प्राप्त हुए दोनों फलों को सरल करके लिखो।

26. $x=\dfrac{t-1}{t+1}$ और $y=\dfrac{t+1}{t-1}$ हो, तो $\dfrac{(x-y)^2}{(x-y^2)}$ का मान बताओ।

27. $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ हो, तो $\dfrac{ay+b}{cy-a}$ का मान x द्वारा प्रकट करो।

28. $x=\dfrac{3ab}{b-a}$ होने पर $\dfrac{1}{x-2a}+\dfrac{2}{x+b}+\dfrac{1}{b}$ का मान बताओ।

29. $x=\dfrac{1+a}{1-a}$ और $y=\dfrac{1-a}{1+a}$ हो, तो $\dfrac{x-y}{1+xy}$ का मान क्या होगा ?

30. निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

(i) $4=\dfrac{3}{4-\dfrac{2}{4-x}}$; (ii) $1=\dfrac{3}{4-\dfrac{3}{4-\dfrac{3}{4-x}}}$;

(iii) $\dfrac{\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{x}}+\dfrac{9}{4}=0$; (iv) $x=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$;

(v) $\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-x}}}=1$; (vi) $2=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-x}}}$.

248. भिन्न सम्बन्धी तादात्म्य (Fractional Identities).

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि,

$$\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}.$$

बायें पक्ष में $\frac{3}{x}$ घटाने से,

$$\left\{\frac{a}{x(a+x)}-\frac{1}{x}\right\}+\left\{\frac{b}{x(b+x)}-\frac{1}{x}\right\}+\left\{\frac{c}{x(c+x)}-\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\frac{a-(a+x)}{x(a+x)}+\frac{b-(b+x)}{x(b+x)}+\frac{c-(c+x)}{x(c+x)}$$

$$=-\frac{x}{x(a+x)}-\frac{x}{x(b+x)}-\frac{x}{x(c+x)}$$

$$=-\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}-\frac{1}{c+x};$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}$.

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि,

$$\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}=(b+c)(c+a)(a+b).$$

मान लो कि $b-c=x$, $c-a=y$ और $a-b=z$;

उस दशा में $x+y+z=0$; $\therefore$ $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

पुनः मान लो कि $b^2-c^2=X$, $c^2-a^2=Y$ और $a^2-b^2=Z$;

उस दशा में $X+Y+Z=0$; $\therefore$ $X^3+Y^3+Z^3=3XYZ$;

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=\frac{X^3+Y^3+Z^3}{x^3+y^3+z^3}=\frac{3XYZ}{3xyz}$

$$=\frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

उदाहरण 3. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}.$$

चूँकि, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, अर्थात् $\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$,

$\therefore \quad (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0,$

या, $(b+c)(c+a)(a+b)=0;$

$\therefore$ तीनों गुणनखण्डों में से एक अवश्य शून्य होगा।

$b+c=0$ होने पर $\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0; \qquad \therefore \quad \frac{1}{b}=-\frac{1}{c};$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{b}\right)^{2n+1}=\frac{1}{b^{2n+1}}=\left(-\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=-\frac{1}{c^{2n+1}},$$

क्योंकि $2n+1$ एक विषम संख्या है;

$$\therefore \quad \frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=0.$$

फिर, $b^{2n+1}=(-c)^{2n+1}; \qquad \therefore \quad b^{2n+1}+c^{2n+1}=0\cdot$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{a^{2n+1}} \qquad \left[\because \frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=0\right]$$

$$=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}} \qquad [\because b^{2n+1}+c^{2n+1}=0]$$

अथवा, $=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}} \qquad [\because b+c=0]$

इसी प्रकार, $c+a=0$, अथवा $a+b=0$ होने पर भी यह तादात्म्य सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$
$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$

बायाँ पक्ष $=\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c^2}{a^2}+2+\frac{a^2}{c^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\frac{1}{a^2}(c^2+b^2)+a^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{c^2+b^2}{bc}\right)+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{bc}{a^2}+\frac{a^2}{bc}\right)$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c}+\frac{a^2}{bc}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{bc}{a^2}\right)\right\}$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\frac{c}{a}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right\}$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

उदाहरण 5. यदि $abc=1$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+(a+b)(b-c)(a-c)=1.$$

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=(a+b-c)\left(\frac{bc+ca-ab}{abc}\right)$$

$=(a+b-c)(bc+ca-ab)$ [$\because abc=1.$]

$=-(a+b+x)(bx+xa+ab)$ [$x=-c$ लिखकर]

$=-\{(a+b)(b+x)(x+a)+abx\}$ [अनु० 203.]

$=-(a+b)(b-c)(a-c)+abc;$

$$\therefore\ (a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+(a+b)(b-c)(a-c)=abc=1.$$

उदाहरण 6. यदि $xy+yz+zx=1$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=3.$$

$\because$ $$xy+yz+zx=1;$$

$\therefore$ दोनों पक्षों में x^2 जोड़ने से, $x^2+xy+yz+zx=1+x^2$,

अर्थात्, $(x+y)(x+z)=1+x^2$; $\therefore$ $\dfrac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}=1$

इसी प्रकार, $\dfrac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}=1$ और $\dfrac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1$;

$$\therefore \quad \frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}$$
$$=1+1+1=3.$$

उदाहरण 7. यदि $x=\dfrac{a-1}{a+1}$ और $y=\dfrac{2a-1}{2a+1}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$xy-1=3(x-y).$$

$$xy-1=\frac{(a-1)(2a-1)}{(a+1)(2a+1)}-1=\frac{(a-1)(2a-1)-(a+1)(2a+1)}{(a+1)(2a+1)}$$
$$=\frac{(2a^2-3a+1)-(2a^2+3a+1)}{(a+1)(2a+1)}=\frac{-6a}{(a+1)(2a+1)};$$

फिर, $$3(x-y)=3\left\{\frac{(a-1)}{a+1}-\frac{(2a-1)}{2a+1}\right\}$$
$$=3\left\{\frac{(a-1)(2a+1)-(a+1)(2a-1)}{(a+1)(2a+1)}\right\}$$
$$=\frac{-6a}{(a+1)(2a+1)}; \quad \therefore\ xy-1=3(x-y).$$

उदाहरण 8. यदि $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

चूँकि, $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1;$

इसलिए $\frac{a^2}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{ac}{a+b}=a$ [दोनों पक्षों को a से गुणा करने से]

$\frac{ab}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{bc}{a+b}=b$ [„ b „ „]

और $\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=c$ [„ c „ „]

जोड़ने से,

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{bc}{a+b}\right)+\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}\right)$$
$$+\left(\frac{bc}{c+a}+\frac{ab}{c+a}\right)=a+b+c,$$

अथवा, $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+(a+b+c)=a+b+c;$

$$\therefore\quad \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

प्रश्नावली 90.

1. यदि $x=\frac{4ab}{a+b}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2.$$

2. यदि $x+y=2z$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=1 \text{ और } \frac{x}{x-z}+\frac{y}{y-z}=2.$$

3. यदि $y=\frac{1+x}{1-x}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)=4\frac{xy+1}{x-y}.$$

4. यदि $\frac{a-b}{1+ab}+\frac{c-d}{1+cd}=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a-d}{1+ad}=\frac{b-c}{1+bc} \text{ और } \frac{a+c}{1-ac}=\frac{b+d}{1-bd}.$$

5. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

6. यदि $\frac{a-1}{x}-\frac{a-2}{y}=\frac{1}{b}$ और $\frac{b-1}{x}-\frac{b-2}{y}=\frac{1}{a}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{c-1}{x}-\frac{c-2}{y}=\frac{c}{ab}$.

7. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

8. $2s=a+b+c$ होने पर सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

9. $x^2+y^2=1$ होने पर सिद्ध करो कि

$$x\left(1+\frac{x}{y}\right)+y\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

10. $xyz=1$ होने पर सिद्ध करो कि

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$$
$$=4+\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

यदि $x+y+z=0$ हो, तो सिद्ध करो कि—

11. $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2z^2}+\frac{y^2}{z^2x^2}+\frac{z^2}{x^2y^2}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2.$

12. $\frac{xy}{x^2+xy+y^2}+\frac{yz}{y^2+yz+z^2}+\frac{zx}{z^2+zx+x^2}=-1.$

13. $\frac{x^2}{2x^2+yz}+\frac{y^2}{2y^2+zx}+\frac{z^2}{2z^2+xy}=1.$

14. $$\frac{1}{(x^2-yz)(y^2-zx)}+\frac{1}{(y^2-zx)(z^2-xy)}+\frac{1}{(z^2-xy)(x^2-yz)}=\frac{3}{(xy+yz+zx)^2}.$$

15. यदि $x+y+z=1$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x+yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y+zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z+xy}{(z+x)(z+y)}=3.$$

यदि $x+y+z=xyz$ हो, तो सिद्ध करो कि—

16. $$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

17. $$\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}=\frac{y+z}{1-yz}\times\frac{z+x}{1-zx}\times\frac{x+y}{1-xy}.$$

18. $$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1.$$

यदि $xy+yz+zx=xyz$ हो, तो सिद्ध करो कि—

19. $$\frac{x+y}{xy(z-1)}+\frac{y+z}{yz(x-1)}+\frac{z+x}{zx(y-1)}=1.$$

20. $$\frac{1}{x-yz}+\frac{1}{y-zx}+\frac{1}{z-xy}=\frac{4xyz}{(x-yz)(y-zx)(z-xy)}.$$

21. यदि $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{xyz}{abc}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}-1=\frac{2abc}{(a+x)(b+y)(c+z)}.$$

22. यदि $x=a+b+\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}$ और $y=\frac{a+b}{4}+\frac{ab}{a+b}$ हो, तो सिद्ध करो कि $(x-a)^2-(y-b)^2=b^2$.

23. यदि $x=a(b-c)$, $y=b(c-a)$ और $z=c(a-b)$ हो, तो सिद्ध करो कि $\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3=\frac{3xyz}{abc}$.

यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि—

24. $\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}+2=\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$.

25. $c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$.

26. $\frac{s-a}{(s-b)(s-c)}+\frac{s-b}{(s-c)(s-a)}+\frac{s-c}{(s-a)(s-b)}$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

27. $\frac{a(b-c)(s-a)}{(s-b)(s-c)}+\frac{b(c-a)(s-b)}{(s-c)(s-a)}+\frac{c(a-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)}=0$.

28. सिद्ध करो कि $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$$=1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right).$$

29. यदि $\frac{y+x}{y-x}+\frac{y+z}{y-z}=2$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$.

30. यदि $\frac{a^2(b-c)}{a-d}=\frac{b^2(a-c)}{b-d}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$;

अथवा $a=b$.

31. $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+3=x+y+z$ और $x+y+z\neq 0$; तो

सिद्ध करो कि $\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y}+(x+y+z)$

$$=(xy+yz+zx).$$

32. यदि $\frac{a}{x}(b-c)+\frac{b}{y}(c-a)+\frac{c}{z}(a-b)=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x}{a}(y-z)+\frac{y}{b}(z-x)+\frac{z}{c}(x-y)=0.$$

33. यदि $ab+bc+ca=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

34. यदि $a^2=by+cz$, $b^2=cz+ax$ और $c^2=ax+by$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+c}=1.$

35. यदि $\frac{1}{x^2(y+z)}+\frac{1}{y^2(z+x)}+\frac{1}{z^2(x+y)}=\frac{1}{xyz}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{x^3(y+z)}+\frac{1}{y^3(z+x)}+\frac{1}{z^3(x+y)}=0.$

36. सिद्ध करो कि

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=a+b+c.$$

37. यदि $x=\frac{a+1}{a-1}$, $y=\frac{b+1}{b-1}$ और $z=\frac{c+1}{c-1}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}{(1+yz)(1+zx)(1+xy)}=\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}.$$

38. सिद्ध करो कि

$$\frac{a-b}{m+ab}+\frac{b-c}{m+bc}+\frac{c-a}{m+ca}=\frac{m(a-b)(b-c)(c-a)}{(m+ab)(m+bc)(m+ca)}.$$

39. सिद्ध करो कि

$$\frac{a(x-b)(x-c)}{bc(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{ca(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{ab(c-a)(c-b)}=\frac{x^2}{abc}.$$

——:o:——

बाईसवाँ अध्याय

एकघात वाले युगपत् समीकरण
(Simultaneous Linear Equations)

249. अनिर्णीत समीकरण (Indeterminate Equation).

किसी एकघात (Linear) समीकरण में दो अव्यक्त राशियाँ होने पर एक का कोई भी मान स्वीकार करके दूसरी का मान निकाला जाता है।

$2x-y=1$ समीकरण में x और y दो अव्यक्त राशियाँ हैं। x के भिन्न भिन्न मान स्वीकार करने पर y के भी मान भिन्न भिन्न पाये जाते हैं; जैसे, $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=3$; $x=4$, $y=7$, इत्यादि।

इससे ज्ञात होता है कि दो राशियों के असंख्य मानों द्वारा समीकरण सिद्ध होता है। अतः जिस समीकरण के असंख्य मूल होते हैं, उसको अनिर्णीत समीकरण कहते हैं।

250. युगपत् समीकरण (Simultaneous Equations).

किसी समीकरण में दो अव्यक्त राशियाँ होने पर उस समीकरण के असंख्य मूल होते हैं। कभी कभी इन सारे मूलों में से एक या एक से अधिक के द्वारा उसी प्रकार का एक और समीकरण सिद्ध हो सकता है या नहीं, यह जानना आवश्यक है।

नीचे के दो समीकरणों की विवेचना करो:—

$2x-y=1$ या $y=2x-1$, ...(1)

और $3x-y=3$ या $y=3x-3$, ...(2)

इसमें पहला $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=3$; $x=3$, $y=5$; $x=4$, $y=7$;......आदि असंख्य मानों द्वारा सिद्ध होता है और दूसरा $x=1$, $y=0$; $x=2$, $y=3$; $x=3$, $y=6$; $x=4$, $y=9$; ......आदि असंख्य मानों द्वारा सिद्ध होता है। अतएव दोनों समीकरणों में से हर एक स्वतन्त्रतापूर्वक दो अव्यक्त राशियों के असंख्य मानों द्वारा सिद्ध हो सकते

हैं। किन्तु इन सब मानों में से केवल एक जोड़ा ($x=2$, $y=3$) द्वारा दोनों ही समीकरण सिद्ध होते हैं।

इन दोनों समीकरणों को **युगपत् समीकरण** (Simultaneous Equations) कहते हैं।

दो अव्यक्त राशियों से बने हुए दो समीकरणों के एक ही मान-समूह द्वारा सिद्ध होने पर दोनों समीकरणों को उक्त दोनों अव्यक्त राशियों का **युगपत् समीकरण** कहते हैं।

युगपत् समीकरण में दो से अधिक भी अव्यक्त राशियाँ वर्त्तमान रह सकती हैं; किन्तु साधारणतः समीकरणों की संख्या अव्यक्त राशियों की संख्या के समान होने पर अव्यक्त राशियों के एक ही मान-समूह द्वारा समीकरण सिद्ध होते हैं।

जैसे, $x+y+z=6$, $x-y+z=2$ और $x+y-z=0$ इन तीन समीकरणों में तीन अव्यक्त राशियाँ वर्त्तमान हैं। इनमें से प्रत्येक x, y, z के एक ही मान ($x=1$, $y=2$, $z=3$) द्वारा सिद्ध होते हैं।

251. असङ्गत (Inconsistent) समीकरण।

कभी कभी ऐसा भी होता है कि दो अव्यक्त राशियों के किसी भी मान के जोड़े द्वारा दोनों समीकरण एक साथ सिद्ध नहीं होते। ऐसे दो समीकरणों को असङ्गत (Inconsistent) **समीकरण** कहते हैं।

जैसे, $3x+2y=3$ और $3x+2y=5$ में दोनों असङ्गत समीकरण हैं क्योंकि x और y के किसी भी मान द्वारा $3x+2y$ एक ही साथ दो विभिन्न संख्याएँ 3 और 5 के समान नहीं हो सकता।

252. एकघात वाले युगपत् समीकरण (Simultaneous Linear Equation).

दो या दो से अधिक समीकरणों में अव्यक्त राशियों में से प्रत्येक यदि एकघात वाली हो और उनका कोई उच्चतर घात अथवा गुणनफल वाला कोई पद वर्त्तमान न हो, तो उन युगपत् समीकरणों को **एकघात वाले युगपत् समीकरण** कहते हैं।

जैसे, $2x+3y=8$ और $3x-y=1$ ये दोनों एकघात वाले युगपत् समीकरण हैं; कारण $x=1$, $y=2$ मान द्वारा ये दोनों ही समीकरण सिद्ध होते हैं और इन दोनों समीकरणों में x और y का केवल एकघात पाया जाता है और उनका कोई उच्चतर घात अथवा गुणनफल वाला पद नहीं पाया जाता है। किन्तु

$$x+y=5 \text{ और } xy=6,$$

ये दोनों समीकरण होने पर भी एकघात वाले युगपत् समीकरण नहीं हैं, क्योंकि पहला एकघात समीकरण होने पर भी दूसरे में दो अव्यक्त राशियों का गुणनफल वर्त्तमान है और इसीलिए वे दोनों एकघात वाले युगपत् समीकरण नहीं हैं। इसके साथ ही $x=2$, $y=3$ और $x=3$, $y=2$ इन दोनों मान-समूहों द्वारा दोनों ही समीकरण सिद्ध होते हैं।

टीका—युगपत् समीकरणों में से प्रत्येक का स्वाधीन होना आवश्यक है अर्थात् जिससे किसी एक का दूसरे से पाया जाना सम्भव न हो। जैसे, $x+y=2$ और $2x+2y+3=7$ ये दोनों समीकरण आकार में भिन्न भिन्न होने पर भी स्वाधीन नहीं हैं क्योंकि पहले से सरलतापूर्वक ही (2 से गुणा करने से) दूसरा पाया जाता है। देखने में वे दोनों एक दूसरे से विभिन्नता रखते हैं तथापि वे दोनों वास्तव में एक ही समीकरण के विभिन्न रूप हैं।

253. लुप्तीकरण प्रक्रिया (Process of Elimination).

दो समीकरणों में एक ही राशि वर्त्तमान रहने पर उन दोनों ही समीकरणों को समवाय करने से एक ऐसा समीकरण निर्णय किया जाता है जिसमें वह साधारण राशि नहीं रहती। इस प्रक्रिया को लुप्तीकरण प्रक्रिया कहते हैं।

जैसे, $ax+b=0$ और $cx+d=0$ इन दोनों समीकरणों में पहले से $x=-\frac{b}{a}$ और दूसरे से $x=-\frac{d}{c}$; x के इन दोनों मानों को 'बराबर है' चिह्न द्वारा जोड़ने से $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$, अर्थात् $ad=bc$.

अन्त में कहा गया समीकरण दिये हुए दोनों समीकरणों से बना है और इसमें x के अतिरिक्त दोनों समीकरणों में विद्यमान अन्यान्य राशियाँ वर्त्तमान हैं। यहाँ दिये हुए दोनों समीकरणों में से x को लुप्त किया गया है।

इस प्रकार समीकरण की संख्या यथेष्ट होने पर अर्थात् लुप्त की जाने वाली राशि की संख्या की अपेक्षा समीकरण की संख्या कम से कम 1 अधिक होने पर दोनों में से अधिक संख्या वाली राशि का ही लुप्तीकरण किया जाता है।

254. हल करने की पहली पद्धति ।

दो अव्यक्त राशियों से युक्त एकघात वाले युगपत् समीकरणों को हल करते समय निम्नलिखित नियमों का अवलम्बन करना होता है:—

(1) दिये हुए दोनों समीकरणों में दोनों अव्यक्त राशियों में से किसी एक का (मान लो y का) मान दूसरी के द्वारा प्रकट करो।

(2) दोनों प्राप्त मानों को 'बराबर है' चिह्न (=) द्वारा संयुक्त करो, तो केवल एक अव्यक्त राशि वाला एक सरल समीकरण पाया जायगा।

(3) प्राप्त समीकरण को हल करके x का मान निकालो।

(4) दिये हुए दोनों समीकरणों में से किसी एक में x के बदले इस मान को रखने से केवल y से युक्त एक सरल समीकरण पाया जायगा। इसको हल करके y का मान निकालो।

टीका 1—इस प्रक्रिया को भी लुप्तीकरण प्रक्रिया (Process of Elimination) कहते हैं। दोनों अव्यक्त राशियों में से किसी राशि को लुप्त करके हल करने में सरलता होगी। यह स्थिर करना अभ्यास पर निर्भर है। साधारणतः दोनों अव्यक्त राशियों में से जिस राशि का गुणक (Co-efficient) छोटा हो, उसी को लुप्त करना सुविधाजनक है।

टीका 2—यदि दोनों समीकरणों में x और y न रहकर उनकी व्युत्क्रम (Reciprocal) राशि $\frac{1}{x}$ और $\frac{1}{y}$ रहे, तो उनके बदले क्रम से u और v लिखकर u और v का मान निकाला जाता है। बाद को सरलतापूर्वक ही x और y का मान निकाला जा सकता है।

उदाहरण 1. हल करो :—

$$x+y=9, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x-y=3. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

यहाँ यदि y को लुप्त करना हो, तो

(1) से $y=9-x$,

(2) से $y=x-3$.

अब y के इन दोनों मानों को 'बराबर है' चिह्न से संयुक्त करने से,

$9-x=x-3$; $\quad\therefore\quad x=6$.

(1) में x के बदले प्राप्त हुआ मान लिखने से,

$6+y=9$, $\quad$ या, $\quad y=3$.

$\therefore\quad x=6,\ y=3$, निर्णेय मूल।

टीका—यदि दिये हुए दोनों समीकरण ऊपर के आकार वाले हों, तो उनके योग तथा अन्तर के द्वारा अत्यन्त ही सरलतापूर्वक लुप्तीकरण क्रिया सम्पादित हो सकती है। इसे मिलन-प्रणाली (Rule of Concurrence) कहा जा सकता है। (लीलावती अनु० 55)।

उदाहरण 2. हल करो :—

$$3x+2y=16,$$
$$2x+3y=19.$$

दोनों समीकरणों से क्रमश :

$$y=\frac{16-3x}{2} \text{ और } y=\frac{19-2x}{3};$$

$$\therefore\quad \frac{16-3x}{2}=\frac{19-2x}{3},$$

या, $\quad 48-9x=38-4x$; $\quad\therefore\quad x=2$.

पहले समीकरण में x के बदले ऊपर प्राप्त हुआ मान लिखने से,

$$6+2y=16,$$

$\therefore\quad y=5$; $\quad\therefore\quad x=2,\ y=5$.

उदाहरण 3. हल करो :— $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=16,\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=19.$

$\frac{1}{x}=u$ और $\frac{1}{y}=v$ लिखने से

$$3u+2v=16,$$
$$2u+3v=19.$$

पूर्व आकार में हल करने से, $u=2$, और $v=5$,

$$\therefore \quad x=\frac{1}{u}=\frac{1}{2} \text{ और } y=\frac{1}{v}=\frac{1}{5}.$$

प्रश्नावली 91.

हल करो:—

1. $x+y=10$,
   $x-2y=4$.

2. $x+3y=-2$,
   $4x+5y=13$.

3. $\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{2}(y-1)$,
   $x-y=1$.

4. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8$,
   $\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$.

5. $3x+4y=27$,
   $5x-3y=16$.

6. $\frac{x+2}{3}+8y=31$,
   $\frac{y+5}{4}+2x=40$.

7. $\frac{3x}{2}+\frac{3y}{2}=4x-y$,
   $3x-2y=1$.

8. $x-2y=1=3x+5y$.

9. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3$, $x-2y=2$.

10. $\frac{2}{3}x+\frac{5}{7}y=15$, $\frac{7}{15}x-\frac{4}{3}y=-21$.

11. $\frac{x+y}{3}+\frac{3x-2y}{4}=\frac{3}{4}$, $17x-31y=\frac{3}{2}$.

12. $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=3$,
    $\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=48$.

13. $x+\frac{2}{y}=13$,
    $2x-\frac{5}{y}=-1$.

14. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y+1}=10=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{y+1}$.

15. $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$, $\frac{8}{x}-\frac{7}{y}=-\frac{1}{6}$.

255. दूसरी पद्धति ।

इस प्रक्रिया में दिये हुए दोनों समीकरणों को ऐसी दो राशियों द्वारा गुणा करना होता है कि दोनों प्राप्त समीकरणों में दोनों अव्यक्त राशियों में से किसी एक के गुणक दोनों एक ही हों; तो प्राप्त हुए दोनों समीकरणों का योग करने या अन्तर निकालने पर जो समीकरण प्राप्त होगा उसमें केवल एक अव्यक्त राशि वर्त्तमान होगी और दूसरी कभी न होगी। अनेक स्थानों में इस प्रणाली द्वारा सरलतापूर्वक ही लुप्तीकरण प्रक्रिया सम्पादित की जाती है।

दोनों अव्यक्त राशियों में से किसी एक को (मान लो y को) लुप्त करने के लिए,

(1) पहले समीकरण को दूसरे समीकरण में वर्त्तमान y के गुणक से गुणा करो।

(2) दोनों प्राप्त समीकरणों में y के दोनों गुणक भिन्न-भिन्न चिह्नों के होने पर दोनों समीकरणों का योग करो और एक ही चिह्न से युक्त होने पर अन्तर निकालो।

(3) इस प्रकार योग करने या अन्तर निकालने से जो समीकरण पाया जायगा उसमें केवल x रहेगा। इसलिए उससे x का मान निकाल कर बाद को दिये गये दोनों समीकरणों में से किसी एक से y का मान निकाला जा सकता है।

उदाहरण 1. हल करो:— $4x+27y=179$,

$$6x-13y=1.$$

यहाँ x के दोनों गुणक y के दोनों गुणकों से छोटे हैं इसलिए दिये हुए दोनों समीकरणों में से x को लुप्त करना ही सुविधाजनक है।

पहले समीकरण को 3 से और दूसरे समीकरण को 2 से गुणा करने पर (कारण, ऐसा करने से प्राप्त हुए दोनों समीकरणों में x के दोनों गुणक परस्पर समान होंगे।),

$$12x+81y=537,$$
$$\underline{12x-26y=2}$$

घटाने से, $107y=535$, $\therefore\ y=5$.

पहले समीकरण में y के बदले इस मान को रखने से,

$$4x+135=179$$

या, $4x=44, \quad \therefore \quad x=11.$

$\therefore \quad x=11, \ y=5$, निर्णेय मूल।

उदाहरण 2. हल करो :— $3x-\frac{4}{y}=2,$

$$4x+\frac{7}{y}-13\frac{3}{4}=0.$$

यहाँ दोनों ही समीकरणों में y की व्युत्क्रम राशि $\frac{1}{y}$ है और y नहीं है। $\frac{1}{y}$ के स्थान पर v लिखने और दूसरे समीकरण को भिन्न रहित करने से,

$$3x-4v=2,$$
$$16x+28v=55;$$

उपर्युक्त प्रक्रिया के अनुसार इन दोनों समीकरणों के हल करने से,

$x=1\frac{32}{37}$ और $v=\frac{133}{148}$;

$$\therefore \quad y=\frac{1}{v}=\frac{148}{133}=1\frac{15}{133}.$$

प्रश्नावली 92.

हल करो :—

1. $2x+5y=51,$
   $5x+2y=54.$

2. $6x-7y+16,$
   $9x-5y=35.$

3. $3x+\frac{4}{y}=19.$
   $5x-\frac{3}{y}=13.$

4. $x+\frac{2}{y}=3\frac{2}{3},$
   $2x-\frac{5}{y}=4\frac{1}{3}.$

5. $13x+11y=70,$
   $11x+13y=74.$

6. $3\cdot75x-1\cdot5y=27,$
   $7x+6y=68.$

7. $4\cdot5x+7\cdot5y=11\cdot25,$
   $8\cdot4x-\cdot21y=1\cdot617.$

8. $11x+12y=58,$
   $12x+11y+57.$

9. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=2,\ \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=5.$

10 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=6\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2x}\right)=2.$

11. $7x+\dfrac{5y+9x}{11}=17,$

$6y+\dfrac{11y+9x}{17}=21.$

12. यदि $x+2y=4$ और $2x+3y=7$ हो, तो $x-8y$ और $15y-x$ का मान बताओ।

13. यदि $y=ax+b$ समीकरण $x=4, y=8$ और $x=12, y=20$ इन मूलों द्वारा सिद्ध हो, तो a और b का मान बताओ।

256. तीसरी पद्धति।

इस पद्धति के अनुसार हल करते समय निम्नलिखित नियमों का पालन करना चाहिये :—

(1) दोनों समीकरणों में से एक की किसी अव्यक्त राशि का (मान लो y का) मान x द्वारा प्रकट करो।

(2) दूसरे समीकरण में y के बदले इस मान को लिखो।

(3) प्राप्त समीकरण में अब केवल x रह जायगा। इसमें से x का मान निकाल लो।

(4) x का यह मान दिये हुए दोनों समीकरणों में से किसी एक में लिखकर y का मान निकालो।

इसको स्थानापन्न क्रिया (Methcd of Substitution) कहते हैं।

उदाहरण 1. हल करो:—

$$3x+2y=7,\ 8x-y=6.$$

दूसरे समीकरण से $y=8x-6$.

y का यह मान पहले समीकरण में लिखने से $3x+2(8x-6)=7$,

या $19x=19$; $\therefore\ x=1$,

अब दूसरे समीकरण में x के बदले ऊपर प्राप्त मान लिखने से,

$$y=8\times1-6=2;\ \therefore\ x=1,\ y=2.$$

उदाहरण 2. हल करोः—

$$\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{7(y-2)}=\frac{2}{3},$$
$$\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{3(y-2)}=\frac{1}{6}.$$

यहाँ $u=\frac{1}{x-1}$ और $v=\frac{1}{y-2}$ मानने पर निम्नलिखित दोनों समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$\frac{u}{3}-\frac{v}{7}=\frac{2}{3},\quad \frac{u}{2}-\frac{v}{3}=\frac{1}{6}.$$

भिन्न से युक्त करने पर, $7u-3v=14,\ 3u-2v=1.$

ऊपर वर्णन किये गये नियम के अनुसार हल करने से, $u=5,\ v=7.$

इसलिए $\frac{1}{x-1}=u=5$ और $\frac{1}{y-2}=v=7$;

$\therefore\quad x-1=\frac{1}{5}$ या $x=1+\frac{1}{5}=1\frac{1}{5}$;

$y-2=\frac{1}{7}$ या $y=2+\frac{1}{7}=2\frac{1}{7}$.

प्रश्नावली 93.

हल करोः—

1. $2x+\cdot4y=1\cdot2,$
   $3\cdot4x-\cdot02y=\cdot01.$

2. $5x+2y=2xy,$
   $4x+3y=2\frac{3}{10}xy.$

3. $\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5,$
   $\frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}=18-5x.$

4. $\frac{x+y}{5}+\frac{x-y}{2}=1\frac{1}{2},$
   $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=2\frac{1}{6}.$

5. $1\cdot5(x+3)+1\cdot25y=19,$
   $1\cdot2(x+3)+0\cdot75y=13\cdot2.$

6. $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{y+1}=1,$
   $\frac{7}{2x-4}+\frac{25}{3y+3}=3.$

7. $\frac{6x+7}{3}+\frac{4x-y}{3x-4}=\frac{4x-5}{2}$, $\frac{5y-6}{10}+\frac{3x-2y}{2y-5}=\frac{8y-9}{16}$.

8. $\frac{x+1}{3}-\frac{2}{y-1}=1$, $\frac{x+1}{4}+\frac{3}{y-1}=3$.

9. $\frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=5$, $\frac{2}{x+y}+\frac{5}{x-y}=5\frac{2}{3}$.

10. $\frac{4}{2x-y+3}+\frac{1}{x-2y-4}=2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2x-y+3}-\frac{2}{x-2y-4}=\frac{1}{2}$.

11. $\frac{4x+5y}{40}=x-y$, $\frac{2x-y}{3}+2y=\frac{1}{2}$.

12. $\frac{7}{3x-2}-\frac{5}{4y+3}=\frac{4}{(3x-2)(4y+3)}$, $\frac{3}{3x-2}-\frac{2}{4y+3}=\frac{2}{(3x-2)(4y+3)}$.

257. आक्षरिक गुणक वाले युगपत् समीकरण ।

उदाहरण 1. हल करोः—
$$x+y=a^2+b^2,$$
$$ax+by=a^3+b^3.$$

पहले समीकरण को b से गुणा करने से प्राप्त गुणनफल को दूसरे समीकरण में से घटाओ, तो

$$(a-b)x=(a^3+b^3)-b(a^2+b^2)$$
$$=a^3-a^2b=a^2(a-b);$$
$$\therefore \quad x=a^2.$$

अब पहले समीकरण में x के बदले इस मान को लिखने से,

$$y=a^2+b^2-a^2=b^2;$$
$$\therefore \quad x=a^2,\ y=b^2.$$

उदाहरण 2. हल करोः—
$$\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=3a-2b,$$
$$\frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}=5a+b.$$

दोनों समीकरणों में $\frac{1}{x}=u$ और $\frac{1}{y}=v$ लिखने से,

$$au-bv=3a-2b, \qquad \text{..............(1)}$$

और $(a+b)u+(a-b)v=5a+b$. ....(2)

(1) को $(a-b)$ से और (2) को b से गुणा करके दोनों समीकरणों को जोड़ो, तो

$$a(a-b)u-b(a-b)v=(3a-2b)(a-b)$$
$$b(a+b)u+b(a-b)v=b(5a+b)$$
$$\{a(a-b)+b(a+b)\}u=(3a-2b)(a-b)+b(5a+b)$$

या $(a^2+b^2)u=3(a^2+b^2)$; $\therefore \quad u=3$.

$\therefore$ समीकरण (1) से, $3a-bv=3a-2b$;

$\therefore \quad bv=2b$, अतएव $v=2$;

$\therefore \quad x=\frac{1}{u}=\frac{1}{3}$ और $y=\frac{1}{v}=\frac{1}{2}$.

प्रश्नावली 94.

1. $ax+by=c$,
$a^2x+b^2y=c^2$.

2. $ax+by=a+b$,
$a^2x+b^2y=a^2+b^2$.

3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$,
$ax-by=a^2-b^2$.

4. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a+b$,
$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=2$.

5. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a$,
$ax-by=(a+b)(a-b)^2$.

6. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b-a}=5m$,
$\frac{x}{b}+\frac{y}{a-b}=7m$.

7. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{c}$,
$\frac{y}{a}+\frac{x}{b}=1+\frac{y}{c}$.

8. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m$,
$\frac{b}{x}+\frac{a}{y}=n$.

9. $(a+b)x+(a-b)y=2a$,
$(a-b)x+(a+b)y=2b$.

10. $2ab(x-y)=xy(a-b)$,
$2ab(x+y)+xy(a+b+2ab)=0$.

11. $a(x+y)=b(x-y)=2ab$.

12. $x-y=2a$,
$ax+by=a^2+b^2$.

13. $(a+b)x+by=ax+(b+a)y=a^3-b^3$.

258. वज्रगुणन-प्रणाली (Method of Cross Multiplication).

इससे पहले अपनयन क्रिया की सहायता से युगपत् समीकरणों को हल करने की रीति बतलाई जा चुकी है। यह वज्रगुणन नियम का ही एक विशेष रूप है ! नीचे के उदाहरणों से इस सम्बन्ध में बहुत ही स्पष्ट धारणा हो जायगी।

उदाहरण 1. हल करो:— $ax+by+c=0,$
$a'x+b'y+c'=0.$

साधारण नियम के अनुसार दिये हुए दोनों समीकरणों से x और y का अपनयन करना होगा। y का अपनयन करते समय दूसरे समीकरण के y के गुणक b' द्वारा पहले समीकरण को और पहले समीकरण के y के गुणक b से दूसरे समीकरण को गुणा करना होगा, और इस प्रकार प्राप्त हुए दोनों गुणनफलों का अन्तर निकालना होगा ; अतएव,

$$(ab'-a'b)x=bc'-b'c; \qquad \therefore \quad x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \quad \text{.........(1)}$$

इसी प्रकार x का अपनयन करने पर $y=\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$ ....(2)

(1) और (2) से x और y का मान निम्नलिखित रूप में पाया जाता है :—

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}.$$

यह सिद्धान्त निम्नलिखित उपाय से सरलतापूर्वक ध्यान में रखा जा सकता है :—

1. x के नीचे का व्यंजक = (पहले समीकरण के y का गुणक × दूसरे समीकरण का अन्तिम पद) − (दूसरे समीकरण के y का गुणक × पहले समीकरण का अन्तिम पद)।

2. y के नीचे का व्यंजक = (दूसरे समीकरण के x का गुणक × पहले समीकरण का अन्तिम पद) − (पहले समीकरण के x का गुणक × दूसरे समीकरण का अन्तिम पद)।

3. एक (1) के नीचे का व्यंजक = (पहले समीकरण के x का गुणक $\times$ दूसरे समीकरण के y का गुणक) $-$ (दूसरे समीकरण के x का गुणक $\times$ पहले समीकरण के y का गुणक)।

उदाहरण 2. हल करो:—

$$5x+2y-1=3x-y+14=x+19y+6.$$

यहाँ $5x+2y-1=3x-y+14$;

$\therefore$ पक्षान्तर द्वारा, $2x+3y-15=0.$ ....(1)

फिर, $5x+2y-1=x+19y+6$;

$4x-17y-7=0.$ ....(2)

अब वज्रगुणन द्वारा समीकरण (1) और (2) को हल किया जा सकता है।

यहाँ $a=2$, $b=3$, $c=-15$ और $a'=4$, $b'=-17$, $c'=-7$.

$$\therefore \frac{x}{3\times(-7)-(-15)\times(-17)}=\frac{y}{(-15)\times 4-(-7)\times 2}=\frac{1}{2\times(-17)-3\times 4};$$

या, $\frac{x}{-276}=\frac{y}{-46}=\frac{1}{-46}$,

$\therefore$ $x=6$, $y=1$.

259. अनिर्णीत गुणक-प्रणाली (Method of Undetermined Multipliers).

दो अव्यक्त राशि के एकघात वाले युगपत् समीकरण इस रीति से भी हल किये जाते हैं। नीचे दिये हुए उदाहरणों से यह प्रणाली भली भाँति स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 1. हल करो:— $ax+by=c$, ...(1)

$a'x+b'y=c'$. ....(2)

(1) को l द्वारा और (2) को m द्वारा गुणा करने से जो समीकरण प्राप्त होते हैं उन्हें जोड़ने से,

$(al+a'm)x+(bl+b'm)y=cl+c'm.$ ....(3)

l और m का कोई भी मान स्वीकार किया जा सकता है। l और m का कोई ऐसा मान स्वीकार करो जिसके द्वारा (3) में y का गुणक शून्य हो, अर्थात् कल्पना करो कि,

$$bl+b'm=0, \text{ अर्थात् } \frac{l}{m}=-\frac{b'}{b}.$$

अब समीकरण (3) में l और m के बदले समीकरण $(al+a'm)x=cl+c'm$ आकार का पाया जाता है।

$$\therefore \quad x=\frac{cl+c'm}{al+a'm}=\frac{c.\frac{l}{m}+c'}{a.\frac{l}{m}+a'}=\frac{c\left(-\frac{b'}{b}\right)+c'}{a\left(-\frac{b'}{b}\right)+a'}=\frac{bc'-b'c}{a'b-ab'}.$$

फिर l और m का ऐसा मान लो जिससे (3) में x का गुणक $al+a'm=0$ हो, अर्थात् $\frac{l}{m}=-\frac{a'}{a}$ हो।

अब समीकरण (3) में l और m के बदले इस प्रकार के दो मान को रखने से समीकरण $(bl+b'm)y=cl+c'm$ रूप को प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad y=\frac{cl+c'm}{bl+b'm}=\frac{c.\frac{l}{m}+c'}{b.\frac{l}{m}+b'}=\frac{c\left(-\frac{a'}{a}\right)+c'}{b\left(-\frac{a'}{a}\right)+b'}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

$$=\frac{ca'-c'a}{a'b-ab'}.$$

उदाहरण 2. हल करो:— $5x+3y-11=0$, ...(1)

$6x+4y-12=0$. ....(2)

(1) को l द्वारा और (2) को m द्वारा गुणा करके दोनों गुणनफलों को जोड़ने से,

$$(5l+6m)x+(3l+4m)y=11l+12m \qquad \dots \quad (3)$$

मान लो कि $3l+4m=0$, अर्थात् $\frac{l}{m}=-\frac{4}{3}$.

अतएव समीकरण (3) से $(5l+6m)x=11l+12m$;

$$\therefore \quad x=\frac{11l+12m}{5l+6m}=\frac{11.\frac{l}{m}+12}{5.\frac{l}{m}+6}=\frac{11\times(-\frac{4}{3})+12}{5\times(-\frac{4}{3})+6}=4.$$

फिर मान लो कि $5l+6m=0$, अर्थात् $\frac{l}{m}=-\frac{6}{5}$.

$\therefore$ समीकरण (3) से $(3l+4m)y=11l+12m$;

$$\therefore \quad y=\frac{11l+12m}{3l+4m}=\frac{11\cdot\frac{l}{m}+12}{3\cdot\frac{l}{m}+4}=\frac{11\times(-\frac{6}{5})+12}{3\times(-\frac{6}{5})+4}=-3;$$

$$\therefore \quad x=4, \qquad y=-3.$$

प्रश्नावली 95.

वज्रगुणन-प्रणाली अथवा अनिर्णीत गुणन-प्रणाली द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

1. $3x+5y=8$, $4x+3y=7$.
2. $3x+4y=14$, $4x-3y=2$.
3. $7x-3y=1$, $9x-2y=5$.
4. $lx+my=n$, $mx+ny=l$.
5. $7x+4y=8$, $9x-6y=1$.
6. $12x+34y=8\frac{1}{15}$, $34x+12y=8\frac{4}{5}$.
7. $\frac{2x+2y-3}{5}=\frac{3x-7y+4}{6}=\frac{8y-x+2}{7}$.
8. $3x+20=4y-10$, $4(x-1)=3(y-3)$.
9. $5x+7y=43$, $11x+9y=69$.
10. $2x+y=0$, $4x-5y=3\frac{2}{3}$.

260. प्रक्रिया का विशेष कौशल ।

कभी कभी समीकरण की आकार वाली कुछ विशेष कौशलों का अवलम्बन करने से हल करने में सुविधा होती है। आगे कुछ उदाहरण दिये जारहे हैं।

उदाहरण 1. हल करो :—

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=a, \qquad \text{...............(1)}$$

$$\frac{n}{x}+\frac{m}{y}=b. \qquad \text{...............(2)}$$

(1) और (2) को जोड़ने से, $\frac{m+n}{x}+\frac{m+n}{y}=a+b,$

$m+n$ द्वारा भाग देने से, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{a+b}{m+n}.$ ....(3)

(1) में से (2) को घटाने से, $\frac{m-n}{x}-\frac{m-n}{y}=a-b,$

$m-n$ से भाग देने से, $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{a-b}{m-n}.$ ....(4)

(3) और (4) को जोड़ने से, $\frac{2}{x}=\frac{a+b}{m+n}+\frac{a-b}{m-n}=\frac{2(am-bn)}{m^2-n^2};$

$\therefore \quad x=\frac{m^2-n^2}{am-bn};$ इसी प्रकार $y=\frac{m^2-n^2}{bm-an}.$

उदाहरण 2. हल करो :— $3x+5y=10,$

$5x+3y=22.$

दोनों समीकरणों को जोड़ने और घटाने से,

	$8x+8y=32,$	या,	$x+y=4;$
और	$2x-2y=12,$	या,	$x-y=6;$
$\therefore$	$x=5,$		$y=-1.$

261. तीन अव्यक्त राशि वाले युगपत् समीकरणों को हल करने का उपाय ।

दिये हुए तीनों समीकरणों में से तीनों अव्यक्त राशियों में से किसी एक का अपनयन करने से जो दो एकघात वाले युगपत् समीकरण पाये जाते हैं उनमें केवल दो अव्यक्त राशियाँ रहती हैं । उन दोनों समीकरणों को हल करने से दो अव्यक्त राशियों का मान निकाला जाता है । बाद को उन दोनों मानों को दिये हुए तीनों समीकरणों में से किसी एक में बैठा देने पर ही तीसरी राशि का मान निकल आता है । निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखने से यह बात समझ में आजायगी ।

*उदाहरण । हल करो :—

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \qquad \text{..............(1)}$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \qquad \text{..............(2)}$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \qquad \text{..............(3)}$$

पहले (1) और (2) से निम्नलिखित उपाय द्वारा z का अपनयन करो:—

(1) को c_2 और (2) को c_1 से गुणा करो । इनसे जो दो गुणनफल प्राप्त हों उनमें से एक में से दूसरे को घटाओ । ऐसा करने से निम्नलिखित समीकरण पाया जायगा :—

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=c_2d_1-c_1d_2. \quad \text{...........(4)}$$

इसी प्रकार (2) और (3) में से z का अपनयन करने से,

$$(a_2c_3-a_3c_2)x+(b_2c_3-b_3c_2)y=c_3d_2-c_2d_3 \quad \text{...........(5)}$$

अब अनु० 258 में वर्णित वज्रगुणन-प्रणाली द्वारा (4) और (5) में से x और y का मान निकालो । तत्पश्चात् दिये हुए तीनों समीकरणों में से किसी एक में x और y के बदले उनके मानों को रखकर z का मान निकाल लो ।

टीका 1—z के बदले में x और y में से किसी भी एक का अपनयन किया जा सकता है । उस अवस्था में अवशिष्ट दो अक्षरों से बने हुए दो समीकरण प्राप्त होंगे । किस अक्षर का अपनयन करना होगा यह दिये हुए समीकरणों के आकार पर निर्भर होता है ।

*इन उदाहरणों में प्रयोग किये गये संकेतों को बहुत ही स्पष्ट रूप से समझना होगा । 1, 2 आदि अंकों से युक्त अक्षर एक दूसरे से बिलकुल भिन्न हैं; जैसे, a_1, a_2, a_3 आदि । इसी प्रकार b_1, b_2, b_3 आदि और c_1, c_2, c_3 आदि सभी एक दूसरे से भिन्न हैं । भिन्न समीकरणों के सजातीय पदों के गुणकों को इस प्रकार भिन्न उत्तरस्थ अंकवाले एक ही अक्षर से सूचित करने से समीकरण को स्मरण रखने में सुविधा होती है । कभी कभी अक्षर-गुणकों को अंक द्वारा उत्तरस्थ न करके मात्रा द्वारा ऐसा ही अर्थ सूचित किया जाता है; जैसे, a', a'' आदि कभी कभी व्यवहार में लाये जाते हैं । इनके लिये भी यह याद रखना होगा कि ये एक दूसरे से भिन्न हैं ।

टीका 2—तीन से अधिक अव्यक्त राशि वाले एकघात युगपत् समीकरणों को हल करने में इस प्रणाली का प्रयोग किया जाता है। केवल इतना स्मरण रखना होगा कि दिये हुए समीकरणों की संख्या अव्यक्त राशियों की संख्या के समान होना आवश्यक है।

उदाहरण 1. हल करो:—

$$x+y+z=6, \qquad \ldots\ldots(1)$$
$$2x+3y+4z=20, \qquad \ldots\ldots(2)$$
$$3x+y+2z=11. \qquad \ldots\ldots(3)$$

(1) को 4 से गुणा करने से और गुणनफल में से समीकरण (2) को घटाने से,

$$\begin{array}{l} 4x+4y+4z=24 \\ \underline{2x+3y+4z=20} \\ 2x+y \quad\quad = \ 4 \end{array} \qquad \ldots\ldots(4)$$

(3) को 2 से गुणा करके गुणनफल में से समीकरण (2) को घटाने से,

$$\begin{array}{l} 6x+2y+4z=22 \\ \underline{2x+3y+4z=20} \\ 4x-y \quad\quad = \ 2 \end{array} \qquad \ldots\ldots(5)$$

(4) और (5) को जोड़ने से $6x=6$; $\quad \therefore \quad x=1$.

(4) में x के बदले प्राप्त मान को रखने से $y=2$; और (1) में x और y का मान लिखने से $z=3$.

$$\therefore \quad x=1,\ y=2 \text{ और } z=3.$$

उदाहरण 2. हल करो:—

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{6z}=12,$$
$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}-\frac{1}{6x}=8,$$
$$\frac{1}{3z}+\frac{1}{2x}=10.$$

यहाँ $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ और $\frac{1}{z}$ प्रत्येक समीकरण में विद्यमान है।

अतएव तीनों समीकरणों में $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$ और $\frac{1}{z}=w$ मानने से, और प्राप्त तीनों समीकरणों को भिन्न रहित करने से,

$$3u+2v+w=72, \qquad \text{...............(1)}$$
$$3v+2w-u=48, \qquad \text{...............(2)}$$
$$2w+3u=60. \qquad \text{...............(3)}$$

अब निम्नलिखित रूप से (1) और (2) में से v का अपनयन करो:—

(1) को 3 से गुणा करने से, $9u+6v+3w=216$

(2) को 2 से गुणा करने से, $-2u+6v+4w=\ \ 96$

घटाने से, $11u \qquad -w=120$ ....(4)

अब (3) और (4) में से w का अपनयन करो:—

(4) को 2 से गुणा करने से, $22u-2w=240$

और $\qquad 3u+2w=\ \ 60$

जोड़ने से, $\qquad 25u \qquad =300$

$$\therefore \quad u=12=\frac{1}{x}, \text{ अर्थात् } x=\frac{1}{12}.$$

(4) में u के बदले इस मान को लिखने से,

$$w=\frac{1}{z}=132-120=12; \qquad \therefore \quad z=\frac{1}{12}.$$

अब (1) में u और w के बदले प्राप्त दोनों मानों को लिखने से,

$$2v=72-3u-w=24,$$

$$\therefore \quad v=\frac{1}{y}=12; \text{ या } y=\frac{1}{12};$$

$$\therefore \quad x=y=z=\frac{1}{12}.$$

प्रश्नावली 96.

हल करो:—

1. $x+y+z=10,$
$2x+3y+4z=33,$
$3x-y+z=8.$

2. $4x-3y+2z=18,$
$5x+2y+3z=21,$
$7y-4z=12.$

3. $x+y+z=1,$
$2x+3y+z=4,$
$4x+9y+z=16.$

4. $x-y-z=-15,$
$y+x+2z=40,$
$4z-5x-6y=-150.$

5. $x+y+z=6,$
$3x-2y+5z=14,$
$4x+3y-2z=4.$

6. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=12-\frac{1}{6}z,$
$\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}x=8,$
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}z=10.$

7. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{4z}=1,$
$\frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{5z}=1,$
$\frac{1}{4x}+\frac{1}{5y}+\frac{1}{6z}=1.$

8. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12,$
$\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=10,$
$\frac{5}{x}-\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=2.$

9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12,$
$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=14,$
$\frac{3}{x}+\frac{5}{y}-\frac{7}{z}=-6.$

10. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=k,$
$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=k^2,$
$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}=k^3.$

262. अनिर्णीत गुणक-प्रणाली (Method of Undetermined Multipliers).

तीन (या तीन से अधिक) अव्यक्त राशि के एकघात वाले युगपत् समीकरण अनु० 259 में बतलाई गई गुणन-प्रणाली से भी हल किये जाते हैं।

निम्नलिखित समीकरणों की विवेचना करो:—

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \qquad \text{...............(1)}$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \qquad \text{...............(2)}$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \qquad \text{...............(3)}$$

समीकरण (2) को p और (3) को q से गुणा करने से प्राप्त हुए दोनों समीकरणों को (1) में जोड़ने से,

$$(a_1+a_2p+a_3q)x+(b_1+b_2p+b_3q)y+(c_1+c_2p+c_3q)z$$
$$=d_1+d_2p+d_3q \qquad \text{...............(4)}$$

उक्त p और q का मान इच्छानुसार निर्वाचित किया जाता है ।

अब p और q का कोई ऐसा मान निर्वाचित करो जिससे कि समीकरण (4) में y और z दोनों के गुणक शून्य हों, अर्थात् मान लो कि,

$$b_1+b_2p+b_3q=0,$$

और, $$c_1+c_2p+c_3q=0.$$

इन दोनों समीकरणों से अनु० 258 में बतलाई गई गुणन-प्रणाली के द्वारा,

$$\frac{1}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{p}{b_3c_1-b_1c_3}=\frac{q}{b_1c_2-b_2c_1};$$

$$\therefore \quad p=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_2c_3-b_3c_2} \text{ और } q=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_2c_3-b_3c_2}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

समीकरण (4) में p और q के बदले उक्त मानों के लिखने से,

$$(a_1+a_2p+a_3q)x=d_1+d_2p+d_3q;$$

$$\therefore \qquad x=\frac{d_1+d_2p+d_3q}{a_1+a_2p+a_3q}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

p और q के बदले समीकरण (5) में प्राप्त दोनों मानों के लिखने और सरल करने से,

$$x=\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

इस प्रकार यदि p और q का कोई ऐसा मान निर्वाचित किया जाता है जिससे x और z के गुणक शून्य हों, तो उस दशा में ऊपर लिखे हुए नियम से y का मान निकाला जायगा और यदि x और y दोनों के गुणक शून्य हों, तो z का मान निकल आवेगा ।

टीका 1—(6) में a_1, a_2, a_3 के बदले क्रमशः b_1, b_2, b_3 लिखने से y का मान और c_1, c_2, c_3 लिखने से z का मान प्राप्त होता है । इसके विपरीत y और z के मान से x का मान निकाला जाता है ।

टीका 2—x, y और z के मान एक ही हर से युक्त हैं ।

उदाहरण । हल करो:—

$$2x-y+3z=7, \quad \ldots\ldots(1)$$
$$x+2y+z=8, \quad \ldots\ldots(2)$$
$$4x-3y+3z=9. \quad \ldots\ldots(3)$$

(2) को p और (3) को q से गुणा करने से प्राप्त दोनों फलों को (1) में जोड़ने से,

$$(2+p+4q)x+(2p-3q-1)y+(3+p+3q)z$$
$$=7+8p+9q. \quad \ldots\ldots (4)$$

(i) (4) में y और z दोनों के गुणकों को शून्य मानने से,

$$2p-3q-1=0,$$

और $$p+3q+3=0;$$

$$\therefore \quad \frac{p}{-9+3}=\frac{q}{-1-6}=\frac{1}{6+3},$$

या, $p=-\frac{2}{3}$ और $q=-\frac{7}{9}$;

$$\therefore \quad (4) \text{ से } x=\frac{7+8p+9q}{2+p+4q}=\frac{7+8\times(-\frac{2}{3})+9\times(-\frac{7}{9})}{2+(-\frac{2}{3})+4\times(-\frac{7}{9})}$$
$$=\frac{7-\frac{16}{3}-7}{2-\frac{2}{3}-\frac{28}{9}}=\frac{-16\times3}{18-6-28}=\frac{-48}{-16}=3.$$

(ii) (4) में x और z दोनों के गुणकों को शून्य मानने से,

$$p+4q+2=0,$$

और, $$p+3q+3=0;$$

हल करने से $p=-6$ और $q=1$;

$$\therefore \quad (4) \text{ से } y=\frac{7+8p+9q}{2p-3q-1}=\frac{-32}{-16}=2.$$

(iii) (4) में x और y दोनों के गुणकों को शून्य मानने से,

$$p+4q+2=0,$$

और, $$2p-3q-1=0;$$

हल करने से $p=-\frac{2}{11}$ और $q=-\frac{5}{11}$;

$$\therefore \quad (4) \text{ से } z=\frac{7+8p+9q}{3+p+3q}=\frac{16}{16}=1;$$

$$\therefore \quad x=3,\ y=2 \text{ और } z=1.$$

टीका—उक्त प्रक्रिया के द्वारा किसी भी दो अव्यक्त राशियों का मान निकालने पर प्राप्त हुए दोनों मानों को समीकरण (1), (2) और (3) में से किसी भी एक में लिखकर बहुत ही सरलतापूर्वक तीसरी अव्यक्त राशि का मान निकाला जा सकता है ।

प्रश्नावली 97.

हल करो :—

1. $x-3y+4z=1,$
$5x+y-2z=3,$
$-3x+4y+6z=31.$

2. $x+y-z=1,$
$8x+3y-6z=1,$
$3z-4x-y=1.$

3. $x+5y-4z=\frac{1}{12},$
$3x-4y+5z=\frac{19}{24},$
$-4x+5y+6z=\frac{1}{4}.$

4. $x+y+z=24,$
$2x+3y-4z=2,$
$3x-y+z=22.$

5. $2x-7y+5z=9,$
$6x+2y-z=2,$
$4x-y+6z=19.$

6. $x+ay+a^2z=a^3,$
$x+by+b^2z=b^3,$
$x+cy+c^2z=c^3.$

7. $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=2\cdot 9,$
$\frac{5}{x}-\frac{6}{y}-\frac{7}{z}=-10\cdot 4,$
$\frac{9}{y}+\frac{10}{z}-\frac{8}{x}=14\cdot 9.$

8. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=14,$
$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=11,$
$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=11.$

9. $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=28,$
$\frac{7}{x}+\frac{3}{y}-\frac{5}{z}=3,$
$\frac{9}{x}+\frac{10}{y}-\frac{11}{z}=4.$

263. वज्रगुणन-प्रणाली (Rule of Cross-Multiplication).

बहुत से स्थानों में नीचे के नियम की सहायता से तीन अव्यक्त राशि के एकघात वाले समीकरणों के हल करने में विशेष सुविधा होती है।

नियम 1. यदि $a_1x+b_1y+c_1z=0,$ ....(1)

और $a_2x+b_2y+c_2z=0.$ ....(2)

हो, तो $\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{z}{a_1b_2-a_2b_1};$

पहले निम्नलिखित नियम से समीकरण (1) और (2) में z का अपनयन करो:—

(1) को c_2 और (2) को c_1 से गुणा करने से प्राप्त हुए दोनों फलों में से एक को दूसरे में से घटाओ; उस दशा में,

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=0;$$

पक्षान्तर करने से, $(a_1c_2-a_2c_1)x=(b_2c_1-b_1c_2)y;$

$$\therefore \quad \frac{x}{b_2c_1-b_1c_2}=\frac{y}{a_1c_2-a_2c_1}.$$

इसी प्रकार (1) और (2) में से y का अपनयन करने से,

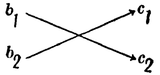
$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1};$$

अतएव, $\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{a_2c_1-a_1c_2}=\dfrac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$ ....(3)

समीकरण (1) और (2) में से x, y और z के बीच परस्पर सम्बन्ध निकालने की इस प्रणाली को भी वज्रगुणन-प्रणाली कहते हैं। अनु० 258 में बतलाई गई प्रक्रिया उक्त नियम का एक विशेष रूप है। इस नियम में $z=1$ लिखने से अनु० 258, उदा० 1 का फल पाया जाता है।

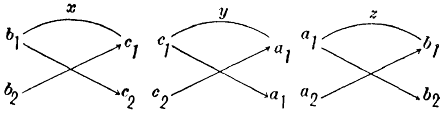
नीचे वर्णन किये गये नियम के अनुसार उक्त भिन्नों के हर एक साथ ही निकाल लिये जाते हैं।

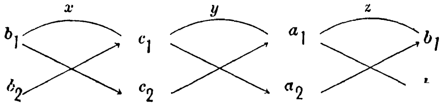
यदि x वाली भिन्न का हर निकालना हो, तो दिये हुए दोनों समीकरणों में से y और z के गुणकों को बगल में दिये गये चित्र के अनुसार लिखो और तीरों से दिखाई गई रीति के अनुसार उनका वज्रगुणन करके b_1c_2, b_2c_1, इन दोनों गुणनफलों का अन्तर निकालो। नीचे की ओर अङ्कित किये गये तीर के चिह्नों के द्वारा सूचित फल से ऊपर की ओर अङ्कित तीर चिह्न द्वारा सूचित फल का अन्तर ही निर्णय हर है।



इसी प्रकार y और z वाली भिन्नों के हर भी निकाले जाते हैं।

सम्पूर्ण नियम नीचे दिखाया गया है:—





264. युगपत् समीकरण का विशेष आकार।

निम्नलिखित युगपत् समीकरणों के हल करने में ऊपर कहे गये नियम का उपयोग विशेष कार्यकर है:—

$$a_1x+b_1y+c_1z=0, \qquad ....(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0, \qquad ....(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d. \qquad ....(3)$$

उक्त नियम के अनुसार, समीकरण (1) और (2) से

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}=k, \text{ मानलो,}$$

$$\therefore \quad x=k(b_1c_2-b_2c_1) \qquad ....(4)$$

$$y=k(c_1a_2-c_2a_1) \qquad ....(5)$$

$$z=k(a_1b_2-a_2b_1) \qquad ....(6)$$

समीकरण (3) में x, y और z के मानों को लिखने से,

$$a_3k(b_1c_2-b_2c_1)+b_3k(c_1a_2-c_2a_1)+c_3k(a_1b_2-a_2b_1)=d,$$

या, $k\{a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\}=d,$

$\therefore\ a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\equiv D$

लिखने से, $k=\frac{d}{D}$ ....(7)

इसलिए (4), (5) और (6) से,

$$x=\frac{d}{D}(b_1c_2-b_2c_1),\quad y=\frac{d}{D}(c_1a_2-c_2a_1),\ z=\frac{d}{D}(a_1b_2-a_2b_1);$$

यहाँ $D\equiv a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)$.

उदाहरण 1. हल करो :— $x-2y+z=0$, ...(1)

$9x-8y+3z=0$, ... (2)

$2x+3y+5z=36$. ....(3)

समीकरण (1) और (2) से, वज्रगुणन-प्रणाली द्वारा,

$$\frac{x}{(-2)\times3-1\times(-8)}=\frac{y}{1\times9-1\times3}=\frac{z}{1\times(-8)-(-2)\times9},$$

या, $\frac{x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{z}{10}=k$ (मान लो);

$\therefore\ x=2k,\ y=6k$ और $z=10k$,

x, y और z का उक्त मान समीकरण (3) में लिखने से,

$4k+18k+50k=36$, या $72k=36$, $\therefore\ k=\frac{1}{2}$;

$\therefore\ x=2k=1,\ y=6k=3,\ z=10k=5.$

उदाहरण 2. हल करो :— $x+y+z=0$, ...(1)

$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$, ...(2)

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{abc}$. ....(3)

समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{x}{(a+b)-(c+a)}=\frac{y}{(b+c)-(a+b)}=\frac{z}{(c+a)-(b+c)},$$

या, $$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k \text{ (मान लो)},$$

$$\therefore \quad x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b);$$

x, y और z के इन मानों को समीकरण (3) में लिखने से,

$$\frac{k(b-c)}{a}+\frac{k(c-a)}{b}+\frac{k(a-b)}{c}=\frac{1}{abc}$$

अतएव,

$$k=\frac{1}{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}=-\frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)};$$

$$\therefore \quad x=-\frac{(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)};$$

इसी प्रकार, $y=\frac{1}{(b-a)(b-c)}$ और $z=\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

265. वज्रगुणन-प्रणाली का प्रयोग ।

इस प्रक्रिया द्वारा तीन अव्यक्त राशि के किसी भी एकघात वाले युगपत् समीकरण को हल किया जाता है ।

निम्नलिखित समीकरणों की विवेचना करो :—

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \quad \text{..............(1)}$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \quad \text{..............(2)}$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \quad \text{..............(3)}$$

पहले दिये गये तीनों समीकरणों से दो ऐसे समीकरण बनाने होंगे जिनमें कोई अचल राशि (Constant Term) न हो ।

स्पष्ट है कि (1) को d_2 और (2) को d_1 से गुणा करके दोनों गुणनफलों में से एक में से दूसरे को घटाने से और (2) को d_3 और (3) को d_2 से गुणा करने से प्राप्त दो गुणनफलों में से एक में से दूसरे को घटाने से नीचे के अचल राशि रहित दोनों समीकरण पाये जाते हैं :—

$$(a_1d_2-a_2d_1)x+(b_1d_2-b_2d_1)y$$
$$+(c_1d_2-c_2d_1)z=0, \quad \text{..............(4)}$$

और $$(a_2d_3-a_3d_2)x+(b_2d_3-b_3d_2)y$$
$$+(c_2d_3-c_3d_2)z=0. \quad \text{..............(5)}$$

समीकरण (4) और (5) और दिये हुए तीन समीकरणों में से किसी एक से अनु० 264 में वर्णन की गई प्रक्रिया के अनुसार x, y और z का मान निकाला जाता है ।

उदाहरण 1. हल करो :—

$$x + y + z = 12, \qquad \text{..............(1)}$$
$$3x - y + z = 10, \qquad \text{..............(2)}$$
$$5x - 2y - z = 2. \qquad \text{..............(3)}$$

समीकरण (2) को 12 से और (1) को 10 से, क्रम से गुणा करने से,

$$36x - 12y + 12z = 120$$

और, $$10x + 10y + 10z = 120$$

घटाने से, $$26x - 22y + 2z = 0 \qquad \text{..............(4)}$$

(3) को 10 और (2) को 2 से गुणा करने से,

$$50x - 20y - 10z = 20$$
$$6x - 2y + 2z = 20$$

घटाने से $$44x - 18y - 12z = 0 \qquad \text{..............(5)}$$

(4) और (5) से,

$$\frac{x}{(-22)\times(-12) - 2\times(-18)} = \frac{y}{44\times 2 - 26\times(-12)} = \frac{z}{26\times(-18) - (-22)\times 44},$$

या, $$\frac{x}{300} = \frac{y}{400} = \frac{z}{500},$$

या, $$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k \text{ (मान लो)};$$

$\therefore$ $$x = 3k, \quad y = 4k, \quad z = 5k;$$

(1) में x, y और z के बदले उनके इन मानों को लिखने से,

$$3k + 4k + 5k = 12, \text{ अथवा } k = 1;$$

$\therefore$ $$x = 3k = 3, \quad y = 4k = 4, \quad z = 5k = 5.$$

उदाहरण 2. हल करो:—

$$x+y+z=a+b+c, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=a^3+b^3+c^3. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

समीकरण (1) और (2) को नीचे लिखे रूप में लिखा जाता है:—

$$(x-a)+(y-b)+(z-c)=0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

इसमें से वज्रगुणन द्वारा,

$$\frac{x-a}{b-c}=\frac{y-b}{c-a}=\frac{z-c}{a-b}=k \text{ (मान लो)};$$

$\therefore \quad x-a=k(b-c), \quad y-b=k(c-a), \quad z-c=k(a-b);$

दूसरे समीकरण से, $a^2(x-a)+b^2(y-b)+c^2(z-c)=0.$

इस प्रकार के आकार में लिखकर और $x-a$, $y-b$ और $z-c$ के बदले ऊपर पाये गये मानों को रखने से,

$$k\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=0;$$

अतएव $\qquad k=0,$

$\therefore \qquad x=a, \quad y=b, \quad z=c.$

प्रश्नावली 98.

हल करो:—

1. $4x-5y+2z=0,$
$2x-9y+3z=0,$
$13x+y+z=5.$

2. $3x-8y+7z=0,$
$7x-8y-5z=0,$
$3x+4y+7z=48.$

3. $x+y+z=0,$
$ax+by+cz=0,$
$\dfrac{x}{b-c}+\dfrac{y}{c-a}+\dfrac{z}{a-b}=1.$

4. $2x+y-2z=0,$
$7x+6y-9z=0,$
$13x+14y-15z=40.$

5. $x+y+z=d,$
$ax+by+cz=0,$
$a^2x+b^2y+c^2z=0.$

6. $x+y+z=0,$
$ax+by+cz=0,$
$a^2x+b^2y+c^2z$
$+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

7. $x-2y+z=0,$
$5z-3x-4y=0,$
$7x+8y+9z=98.$

8. $x+y+z=2,$
$4x-6y+5z=31,$
$5x-11y-13z=22.$

9. $x+y+z=1,$
$ax+by+cz=d,$
$a^2x+b^2y+c^2z=d^2.$

10. $x+y+z=a+b+c,$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3,$
$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2.$

11. $x+y+z=0,$
$bcx+cay+abz=0,$
$ax+by+cz+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

12. $x+y+z=a+b+c,$
$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2,$
$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

13. $x+y+z=0,$
$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0,$
$bcx+cay+abz=1.$

14. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,$
$\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}=0,$
$\frac{x}{m-n}+\frac{y}{n-l}+\frac{z}{l-m}$
$=a+b+c.$

15. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$
$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=0,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=(b-c)(c-a)(a-b).$

16. $x+y+z=0,$
$ax+by+cz=0,$
$a^3x+b^3y+c^3z=abc.$

17. $x+y+z=a^2+b^2+c^2,$
$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=3,$
$a(x-a^2)+b(y-b^2)$
$+c(z-c^2)=0.$

18. $x+y+z=a+b+c,$
$bx+cy+az=cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2.$

19. $x+y+z=0$,

$$\frac{x}{a-b}+\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c-a}=3,$$

$$(a^2+ab+b^2)x+(b^2+bc+c^2)y+(c^2+ca+a^2)z=0.$$

20. $x+y+z=0$,

$$\frac{x}{b+c}+\frac{y}{c+a}+\frac{z}{a+b}=0,$$

$$\frac{x}{b-c}+\frac{y}{c-a}+\frac{z}{a-b}=2(a+b+c).$$

21. $x+y+z=ab+bc+ca$,

$ax+by+cz=a^2b+b^2c+c^2a$,

$bx+cy+az=ab^2+bc^2+ca^2$.

22. $x+y+z=ax+by+cz=0$,

$$\frac{x}{b-c}+\frac{y}{c-a}+\frac{z}{a-b}=1.$$

23. $x+y+z=a+b+c$,

$ax+by+cz=bc+ca+ab$,

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$.

24. $x+y+z=a+b+c$,

$bx+cy+az=cx+ay+bz=ab+bc+ca$.

25. $x+y+z=a+b+c$,

$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$,

$a^2(y-z)+b^2(z-x)+c^2(x-y)=(c-b)(c-a)(a-b)$.

26. $x+ay+bcz=a^2$,

$x+by+caz=b^2$,

$x+cy+abz=c^2$.

27. $x+y+z=0$,

$ax+by+cz=0$,

$a^2x+b^2y+c^2z=1$.

28. **कौनसी शर्त सिद्ध होने पर नीचे लिखे तीनों समीकरण युगपत् सिद्ध होंगे ?**

$a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$ **और**

$a_3x+b_3y+c_3z=0$.

266. विविध उपाय।

कभी कभी किसी साधारण प्रक्रिया का प्रयोग करना सम्भव नहीं होता। ऐसी अवस्था में समीकरणों के आकार के अनुसार विशेष विशेष प्रकार के उपाय खोज कर व्यवहार में लाये जाते हैं।

नीचे कुछ उदाहरण दिये जा रहे हैं :—

उदाहरण 1. हल करो :— $y+z=a,$
$z+x=b,$
$x+y=c.$

तीनों समीकरणों को जोड़ने से $2(x+y+z)=a+b+c,$

$$\text{या,}\quad x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

इस समीकरण में से तीनों समीकरणों में से क्रमशः हर एक को घटाने से,

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-a=\tfrac{1}{2}(b+c-a),$$
$$y=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-b=\tfrac{1}{2}(c+a-b),$$
$$z=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-c=\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

उदाहरण 2. हल करो :—

$$\frac{xy}{x+y}=1, \qquad \text{...............(1)}$$

$$\frac{yz}{y+z}=\tfrac{1}{3}, \qquad \text{...............(2)}$$

$$\frac{zx}{z+x}=\tfrac{1}{5}. \qquad \text{...............(3)}$$

(1) में से, $\frac{x+y}{xy}=1,$ या $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,$ ....(4)

(2) में से, $\frac{y+z}{yz}=3,$ या $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3,$ ....(5)

(3) में से, $\frac{z+x}{zx}=5,$ या $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=5.$ ....(6)

अब समीकरण (4), (5) और (6), उदाहरण 1 की प्रक्रिया के अनुसार हल करने से $x=\tfrac{2}{3},\quad y=-2,\quad z=\tfrac{2}{7}.$

उदाहरण 3. हल करो :— $bz+cy=a,$ ....(1)

$cx+az=b,$ ....(2)

$ay+bx=c.$ ....(3)

(1) को a द्वारा, (2) को b द्वारा और (3) को c द्वारा गुणा करने से और प्राप्त गुणनफलों को जोड़ने से,

$$abz+acy=a^2, \quad \text{...............(4)}$$

$$bcx+abz=b^2, \quad \text{...............(5)}$$

$$acy+bcx=c^2. \quad \text{...............(6)}$$

$$\therefore \quad 2(bcx+cay+abz)=a^2+b^2+c^2$$

$$\therefore \quad bcx+cay+abz=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \quad \text{...............(7)}$$

अब, (7) में से (4) को घटाने से,

$$bcx=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-a^2=\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2);$$

$$\therefore \quad x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

इस प्रकार, $y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ और $z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

उदाहरण 4. हल करो :— $\dfrac{x+a}{b+c}=\dfrac{y+b}{c+a}=\dfrac{z+c}{a+b},$

$x+y+z=a+b+c.$

मान लो कि तीनों समान भिन्नों में से हर एक k के समान है।

$$\therefore \quad x+a=k(b+c), \quad \text{या} \quad x=-a+k(b+c),$$

$$y+b=k(c+a), \quad \text{या} \quad y=-b+k(c+a),$$

$$z+c=k(a+b), \quad \text{या} \quad z=-c+k(a+b).$$

दिये हुए समीकरण में से अन्त वाले में x, y और z के बदले उनके इन मानों को लिखने से,

$$k\{(b+c)+(c+a)+(a+b)\}=2(a+b+c); \text{ अतएव } k=1;$$

$$\therefore \quad x=-a+(b+c)=b+c-a, \; y=-b+(c+a)=c+a-b,$$

$$z=-c+(a+b)=a+b-c.$$

प्रश्नावली 99.

हल करो :—

1. $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=1.$

2. $xy=yz=zx=xyz.$

3. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1$

4. $bx+ay=cy+bz=cz+ax=2.$

5. $\frac{x+y}{xy}=\frac{y+z}{yz}=\frac{z+x}{zx}=\frac{2}{3}.$

6. $\frac{ayz}{y+z}=\frac{bzx}{z+x}=\frac{cxy}{x+y}=1.$

7. $xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)=c(xy-yz-zx).$

8. $2xy=3(x+y),$
$3yz=4(y+z),$
$4zx=5(z+x).$

9. $ax+by+cz=bx+cy+az$
$=cx+ay+bz$
$=a^3+b^3+c^3-3abc.$

10. $ax+by+cz=a+b,$
$bx+cy+az=b+c,$
$cx+ay+bz=c+a.$

11. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$
$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2.$

12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3,\ y+z=5yz,\ z+x=4zx.$

13. $ax+by-cz=ax-by+cz=-ax+by+cz=2abc.$

14. $x+y-3z=-a,$
$z+x-3y=-b,$
$y+z-3x=-c.$

15. $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=1.$

16. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

17. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5,\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7,\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=6.$

18. $x+y+z=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ax}{b}+\frac{by}{c}+\frac{cz}{a}=\frac{ax}{c}+\frac{by}{a}+\frac{cz}{b}.$

——:o:——

तेईसवाँ अध्याय

एकघात वाले युगपत् समीकरण सम्बन्धी प्रश्नावली

267. एक से अधिक शर्त वाले प्रश्नों को हल करने में अव्यक्त राशियों के बदले x, y, z आदि अक्षर लिखकर शर्तों को बीजगणित की भाषा में प्रकट करने से प्रत्येक शर्त से एक समीकरण प्राप्त होगा ।

इस प्रकार प्राप्त हुए समीकरणों की संख्या अव्यक्त राशि की संख्या के समान होने पर ही समीकरणों को हल करने से अव्यक्त राशियों का मान निकालना सम्भव होगा ।

268. संख्या सम्बन्धी प्रश्न ।

उदाहरण 1. एक ऐसी भिन्न बताओ जिसके अंश में यदि 7 जोड़ें तो वह 1 हो जाय और यदि हर में से 2 घटादें, तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाय ।

यहाँ अंश और हर दोनों ही अव्यक्त राशियाँ हैं । उन्हें क्रमशः x और y द्वारा सूचित करने से निर्णेय भिन्न $=\frac{x}{y}$.

पहली शर्त के अनुसार, $\frac{x+7}{y}=1$, ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार, $\frac{x}{y-2}=\frac{1}{2}$, ...(2)

(1) से, $x+7=y$, अर्थात् $y=x+7$, ...(3)

और (2) से, $2x=y-2$, अर्थात् $y=2x+2$. ....(4)

समीकरण (3) और (4) हल करने से $x=5$ और $y=12$;

$\therefore$ निर्णेय भिन्न $=\frac{5}{12}$.

उदाहरण 2. तीन संख्याओं में से पहली और दूसरी के योग को उनके गुणनफल से भाग देने पर $\frac{1}{2}$ आता है। दूसरी और तीसरी के योग को उनके गुणनफल द्वारा भाग करने से $\frac{1}{3}$ आता है और पहली और तीसरी के योग को उनके गुणनफल से भाग करने पर $\frac{1}{4}$ आता है। बताओ वे तीनों संख्याएँ कौन कौनसी हैं ?

मान लो कि तीनों निर्णेय संख्याएँ x, y और z हैं। ऐसी दशा में प्रश्न की शर्त के अनुसार,

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2},\ \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{3}\ \text{और}\ \frac{z+x}{zx}=\frac{1}{4}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

इन तीनों समीकरणों को जोड़ने से,

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{24}.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

(B) में से (A) के तीनों समीकरणों को क्रमशः घटाने से,

$$\frac{1}{z}=\frac{13}{24}-\frac{1}{2}=\frac{1}{24},\qquad \therefore\quad z=24;$$

$$\frac{1}{x}=\frac{13}{24}-\frac{1}{3}=\frac{5}{24},\qquad \therefore\quad x=\frac{24}{5}=4\tfrac{4}{5},$$

$$\frac{1}{y}=\frac{13}{24}-\frac{1}{4}=\frac{7}{24},\qquad \therefore\quad y=\frac{24}{7}=3\tfrac{3}{7}.$$

$\therefore$ निर्णेय संख्याएँ $4\frac{4}{5}$, $3\frac{3}{7}$ और 24 हैं।

269 काम सम्बन्धी प्रश्न।

उदाहरण 1. A और B मिलकर किसी काम को 3 दिन में, और B और C मिलकर 5 दिन में कर सकते हैं। बताओ वे सब अलग अलग कितने दिनों में कर सकेंगे।

मान लो कि पूरे w काम करने में A को x दिन, B को y दिन और C को z दिन लगते हैं।

ऐसी दशा में 1 दिन में A काम का $\frac{1}{x}$ भाग अर्थात् $\frac{w}{x}$ भाग करता है,

1 ,, B ,, $\frac{1}{y}$,, ,, $\frac{w}{y}$,, ,, ,

1 ,, C ,, $\frac{1}{z}$,, ,, $\frac{w}{z}$,, ,, ।

अब प्रश्न के अनुसार,

$$\left(\frac{w}{x}+\frac{w}{y}\right)\times 3=w, \text{ अर्थात् } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3};$$

$$\left(\frac{w}{y}+\frac{w}{z}\right)\times 4=w, \text{ अर्थात् } \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{w}{z}+\frac{w}{x}\right)\times 5=w, \text{ अर्थात् } \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5};$$

अनु० 266 के अनुसार समीकरणों को हल करने से $x=7\frac{1}{17}$, $y=5\frac{5}{23}$, और $z=17\frac{1}{7}$.

$\therefore$ A, $7\frac{1}{17}$ दिन, B, $5\frac{5}{23}$ दिन और C, $17\frac{1}{7}$ दिन में कर सकेगा ।

270. आपेक्षिक गति (Relative Motion) सम्बन्धी प्रश्न ।

उदाहरण 1. एक स्टीमर को बहाव के प्रतिकूल 9 मील तथा अनुकूल 22 मील चलने में कुल 5 घंटे का समय लगता है। बहाव के प्रतिकूल 3 मी० चलने में उसे जितना समय लगता है उतने ही समय में वह बहाव के अनुकूल 11 मी० जाता है। बताओ जल के प्रवाह का वेग क्या है और स्थिर जल में स्टीमर किस चाल से चल सकता है ।

टीका—इस प्रकार के उदाहरण में अनुकूल गति का वेग, स्टीमर के वेग और प्रवाह के वेग का योग और प्रतिकूल गति का वेग उनके अन्तर के समान होगा। (अनु० 197, उदा० 3, देखो ।)

मान लो कि स्थिर जल में स्टीमर का वेग प्रति घंटा x मी० और प्रवाह का वेग प्रति घंटा y मी० है ।

∴ स्टीमर प्रवाह के प्रतिकूल घंटे में $x-y$ मी० और अनुकूल घंटे में $x+y$ मी० चल सकता है।

∴ $$\frac{9}{x-y}+\frac{22}{x+y}=5 \qquad \text{...............(1)}$$

और $$\frac{11}{x+y}=\frac{3}{x-y} \qquad \text{...............(2)}$$

(1) और (2) से,

$$\frac{9}{x-y}+\frac{6}{x-y}=5, \text{ या } \frac{15}{x-y}=5, \qquad \therefore\ x-y=3;$$

∴ (2) से, $x+y=11$.

अन्त वाले दोनों समीकरणों को हल करने से $x=7$ और $y=4$.

∴ प्रवाह का वेग 4 मी० प्रति घंटा, और स्थिर जल में स्टीमर का वेग 7 मी० प्रति घंटा है।

271. अङ्क (Digits) सम्बन्धी प्रश्न।

उदाहरण 1. 100 से छोटी किसी संख्या के अङ्कों का योग 8 है। इस संख्या के अङ्कों को उलट कर लिखने से बनने वाली संख्या निर्णय संख्या से 18 कम है। बताओ वह कौनसी संख्या है।

यहाँ संख्या दो अङ्कों से बनी है। मान लो कि दहाई का अङ्क x और इकाई का अङ्क y है। ऐसी अवस्था में वह संख्या $10x+y$ है;

फिर $x+y=8$. ....(1)

अङ्कों को उलट कर लिखने से $10y+x$ प्राप्त होती है;

∴ $10y+x+18=10x+y$, या $9x-9y=18$,

या $x-y=2$. ....(2)

समीकरण (1) और (2) को हल करने से $x=5$ और $y=3$;

∴ निर्णय संख्या 53 है।

272. क्षेत्रफल (Area) सम्बन्धी प्रश्न।

किसी आयताकार आँगन की सीमा 60 फ़ु० है। यदि उसकी लम्बाई 3 फ़ु० बढ़ाकर चौड़ाई 3 फ़ु० कम कर दी जाय, तो उसका क्षेत्रफल 21 वर्ग फ़ु० कम हो जाता है। बताओ आँगन की लम्बाई और चौड़ाई कितनी है।

मान लो कि आँगन की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः x और y फ़ु० है। ऐसी दशा में सीमा $=(2x+2y)$ फ़ु०, और क्षेत्रफल $=xy$ वर्ग फ़ुट।
लम्बाई और चौड़ाई में दिया हुआ परिवर्तन कर देने से,
नये आयताकार आँगन का क्षेत्रफल $=(x+3)(y-3)$ वर्ग फ़ुट।

∴ प्रश्न की शर्त के अनुसार,

$$2(x+y)=60, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

और, $$(x+3)(y-3)=xy-21, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

समीकरण (1) और (2) को हल करने से $x=17$ और $y=13$.

∴ आँगन की लम्बाई 17 फ़ु० और चौड़ाई 13 फ़ु० है।

273 विविध प्रश्नावली।

उदाहरण 1. किसी थियेटर का टिकट 5 रु०, 3 रु० और 1 रु० है। 3 रु० वाले टिकटों के बिकने से जितने रुपये मिले उनकी संख्या शेष दो दर्जों के टिकटों से प्राप्त हुए रुपयों से 10 रु० अधिक है। दर्शकों की संख्या 530 थी और टिकटों की बिक्री से कुल 1010 रु० की आय हुई। बताओ प्रत्येक दर्जे के कितने टिकट बिके।

मान लो कि 5 रु०, 3 रु० और 1 रु० के जितने टिकट बिके उनकी संख्या क्रमशः x, y और z है। ऐसी अवस्था में,

$$x+y+z=530. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

5 रु० प्रति टिकट की दर से x टिकटों का दाम $=5x$ रु०,
3 ,, ,, ,, ,, y ,, ,, $=3y$ रु०,
1 ,, ,, ,, ,, z ,, ,, $=1z$ रु०।

∴ $$5x+z+10=3y, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

और $$5x+3y+z=1010, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

समीकरण (1), (2) और (3) को हल करने से,
$x=35$, $y=170$ और $z=325$.

∴ 5 रु० वाले 35 टिकट, 3 रु० वाले 170 टिकट और 1 रु० वाले 325 टिकट बिके।

उदाहरण 2. एक मील की दौड़ की प्रतियोगिता में पहली बार B के 44 गज़ बढ़ जाने पर A ने दौड़ना आरम्भ किया और उसने 51 सेकण्ड से B को हरा दिया। दूसरी बार B ने A से 1 मिनट 15 सेकण्ड पहले दौड़ना आरम्भ किया, परन्तु 88 गज़ से A पराजित हुआ। बताओ A और B में से कौन कितने समय में 1 मील दौड़ सकता है।

मान लो कि 1 मील दौड़ने में A को x घंटे और B को y घंटे लगते हैं।

ऐसी अवस्था में 1 घंटा में A, $\frac{1}{x}$ मील अर्थात् $\frac{1760}{x}$ गज़ और B $\frac{1760}{y}$ गज़ दौड़ेगा।

पहली बार B के 44 गज़ दौड़ लेने पर A ने दौड़ना आरम्भ किया और B से 51 सेकण्ड पहले नियुक्त स्थान पर पहुँच गया।

परन्तु B को 44 गज़ दौड़ने में $\frac{44y}{1760}$ घंटे अर्थात् $\frac{y}{40}$ घंटे का समय लगा और बाद को x घंटा दौड़ने के बाद भी नियुक्त स्थान पर पहुँचने में उसे 51 सेकण्ड अर्थात् $\frac{51}{60\times60}$ घटे लगे। अब 1 मी० दौड़ने में B को कुल y घं० लगे।

$$\therefore\ y=\frac{y}{40}+x+\frac{51}{60\times60}\ \text{या}\ \frac{39}{40}y=x+\frac{51}{3600}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

दूसरी बार B ने A से 1 मि० 15 से० अर्थात् $\frac{1}{48}$ घं० पहले दौड़ना आरम्भ किया और जिस समय वह नियुक्त स्थान पर पहुँचा उस समय A को 88 गज़ दौड़ना बाक़ी था। यह 88 गज़ दौड़ने में A को

$$\frac{88x}{1760}\ \text{या}\ \frac{x}{20}\ \text{घंटे लगेंगे।}$$

इसलिए जब B, y घंटा तक दौड़ चुका था उस समय A केवल $(y-\frac{1}{48})$ घं० दौड़ा था। इससे A को 1 मी० की दौड़ समाप्त करने के लिए $\frac{x}{20}$ घं० और दौड़ना आवश्यक था।

$$\therefore\ x=(y-\tfrac{1}{48})+\frac{x}{20},\ \text{या}\ \frac{19}{20}x=y-\tfrac{1}{48},\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) से, $3600x=3510y-51,$ …………(3)

और (2) से, $228x=240y-5.$ …………(4)

समीकरण (3) और (4) को हल करने से, $x=\frac{1}{12}$ और $y=\frac{1}{10}$.

$\therefore$ 1 मी० दौड़ने में A को $\frac{1}{12}$ घं० अर्थात् 5 मि० और B को $\frac{1}{10}$ घंटा अर्थात् 6 मि० लगते हैं ।

उदाहरण 3. गणित की कक्षा में एक विद्यार्थी को किसी संख्या में 3 जोड़कर योगफल को 2 से भाग करने को कहा गया। विद्यार्थी ने ग़लती से उस संख्या में से 2 घटाकर शेष को 3 से गुणा कर दिया, परन्तु ऐसा करने से भी उसका उत्तर ठीक ही आया। बताओ वह संख्या कौनसी थी।

मान लो कि निर्णेय संख्या x और गणित के प्रश्न का उत्तर y है।

ऐसी अवस्था में $\frac{x+3}{2}=y$, अर्थात् $x+3=2y$, ...(1)

और, $(x-2)\times 3=y$, अर्थात् $3x-6=y$, ...(2)

(1) और (2) से, $x=3$; यही निर्णेय संख्या है।

उदाहरण 4. पति और पत्नी की वर्त्तमान अवस्था का योग उनके पुत्र और कन्याओं की वर्त्तमान अवस्था के योग का 6 गुना है। 2 वर्ष पहले यह 10 गुना था और 6 वर्ष बाद केवल 3 गुना रह जायगा। बताओ कि पुत्र-कन्याओं की संख्या कितनी है।

मान लो कि पुत्र-कन्याओं की संख्या x, पति और पत्नी की वर्त्तमान अवस्था का योग y और पुत्र-कन्याओं की वर्त्तमान अवस्था का योग z है।

ऐसी अवस्था में, $y=6z$. .... (1)

2 वर्ष पहले पति और पत्नी की अवस्था का योग $y-4$ और पुत्र-कन्याओं की अवस्था का योग $z-2x$ था;

$\therefore$ $y-4=10(z-2x)$. .... (2)

6 वर्ष के बाद पति और पत्नी की अवस्था का योग $y+12$ और पुत्र-कन्याओं की अवस्था का योग $z+6x$ होगा;

$\therefore$ $y+12=3(z+6x)$. ....(3)

समीकरण (1) (2) और (3) से y और z का अपनयन करने से, $x=3$;

$\therefore$ पुत्र-कन्याओं की संख्या 3 है।

उदाहरण 5. एक परिवार में प्रति मास चावल का ख़र्च समान मात्रा में होता है और अन्य आवश्यक कार्य्यों में जितने रुपये ख़र्च होते हैं उनकी भी संख्या समान ही होती है। जिस समय चावल प्रति रुपया 10 सेर के भाव से मिलता था उस समय उस परिवार का कुल मासिक व्यय 72 रु० था और जब चावल का भाव प्रति रुपया 8 सेर होगया तब उसका व्यय 75 रु० मासिक होगया। बताओ चावल के अतिरिक्त अन्य आवश्यक कार्य्यों में प्रति मास कितने रुपये लगते हैं।

मान लो कि अन्य कार्य्यों में प्रति मास x रुपयों का व्यय होता है और y सेर चावल खर्च होता है। 10 सेर प्रति रुपया के हिसाब से y सेर चावल का दाम $\frac{1}{10}y$ रुपये और 8 सेर के हिसाब से $\frac{1}{8}y$ रुपया है।

अतएव, $x+\frac{1}{10}y=72$ और $x+\frac{1}{8}y=75$.

उक्त दोनों समीकरणों से $x=60$ और $y=120$.

$\therefore$ अन्य आवश्यक कार्य्यों में परिवार का मासिक व्यय $=60$ रु०।

उदाहरण 6. राम ने यदु से कहा, "मेरे पास जितने रुपये हैं उनका तीसरा भाग मैं दान कर दूँ और तुम अपने रुपयों का चौथाई मुझे दे दो, तो मेरे पास 130 रुपये हो जायँगे।" इसके उत्तर में यदु ने कहा, "यदि मैं अपने रुपयों का तीसरा भाग दान कर दूँ और तुम अपने रुपयों का तीसरा भाग मुझे दे दो, तो मेरे पास भी 130 रुपये हो जायँगे।" बताओ उन दोनों में से किसके पास कितने रुपये हैं।

मान लो कि राम के पास x रु० और यदु के पास y रु० हैं। राम यदि अपने रुपयों का तीसरा भाग दान करदे तो उसके पास $\left(x-\frac{x}{3}\right)$ रु० अर्थात् $\frac{2}{3}x$ रु० शेष रहेंगे।

$\therefore$ $\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y=130$, ...(1)

इसी प्रकार, $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}x=130$. ....(2)

दोनों समीकरणों को हल करने से $x=150$, और $y=120$.

$\therefore$ राम के पास 150 रु०, और यदु के पास 120 रु० हैं।

उदाहरण 7. एक हौज़ में तीन नल लगे हुए हैं। इन तीनों में से दो नलों से पानी बराबर ही बराबर आता है। तीनों नल एक साथ खोल दिये गये और जब 4 घंटे में हौज़ का $\frac{5}{12}$ भाग भर गया तो जिन दो नलों से पानी बराबर बराबर आता था उनमें से एक को बन्द कर दिया गया और शेष दो नल खुले रहे जिनसे 10 घं० 40 मि० में हौज़ का $\frac{7}{9}$ भाग भर गया। बताओ उन तीनों में से हर एक नल हौज़ को कितनी देर में भर सकता है।

मान लो कि जिन दो नलों से बराबर बराबर पानी आता है उनमें से हर एक हौज़ को x घंटे में और तीसरा y घंटे में भर सकता है। ऐसी हालत में वे तीनों नल हौज़ का क्रमशः $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$ और $\frac{1}{y}$ भाग एक घंटा में भर सकते हैं।

इसलिए प्रश्न के अनुसार,

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).4=\frac{5}{12}, \qquad \text{..............(1)}$$

और, $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).10\frac{2}{3}=\frac{7}{9}. \qquad \text{..............(2)}$$

(1) और (2) से,

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{48}, \qquad \text{..............(3)}$$

और, $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{96}. \qquad \text{..............(4)}$$

(3) में से (4) को घटाने से,

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{48}-\frac{7}{96}=\frac{1}{32}; \qquad \text{..............(5)}$$

(4) में $\frac{1}{x}$ के बदले $\frac{1}{32}$ रखने से,

$$\frac{1}{y}=\frac{7}{96}-\frac{1}{32}=\frac{1}{24}. \qquad \text{..............(6)}$$

$\therefore$ (5) और (6) से $x=32$ और $y=24$.

इसलिए बराबर पानी भरनेवाले दोनों नलों में से हर एक 32 घं० में और तीसरा नल 24 घं० में हौज़ को भर सकता है।

उदाहरण 8. एक चुनाव में दो उम्मेदवार थे। उनमें से जीते हुए उम्मेदवार को हारे हुए उम्मेदवार से 88 वोट अधिक मिले। यदि जीते हुए उम्मेदवार के पक्ष के प्रत्येक 8 व्यक्तियों में से 1 व्यक्ति उसके विरुद्ध वोट देता तो वह 18 वोटों से हार जाता। बताओ हर एक उम्मेदवार को कितने वोट मिले।

मान लो कि जीते हुए उम्मेदवार को x वोट और हारे हुए उम्मेदवार को y वोट मिले।

$\therefore \qquad x-y=88. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

अब उसके पक्ष के हर 8 व्यक्तियों में से यदि 1 व्यक्ति उसके विपक्ष वोट देता तो वर्तमान वोटों का आठवाँ भाग, अर्थात् $\frac{x}{8}$ संख्या के वोट उसके विरुद्ध दिये गये होते।

$\therefore$ उसके पक्ष में $x-\frac{1}{8}x$, अर्थात् $\frac{7}{8}x$ वोट रहते और उसके प्रतिवादी के पक्ष में $y+\frac{1}{8}x$ वोट रहते।

$\therefore \qquad \left(y+\frac{x}{8}\right)-\frac{7}{8}x=18. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

समीकरण (1) और (2) से, $x=424$ और $y=336$.

उदाहरण 9. टिन का जितना वज़न हवा में रहता है पानी में उसका $\frac{1}{7}$ भाग कम होजाता है। परन्तु सीसे के वज़न का $\frac{1}{12}$ भाग कम होता है। टिन और सीसे के मिश्रण का वज़न यदि हवा में 270 पौं० और पानी में 240 पौं० हो, तो बताओ कि उस मिश्रण में कौन सी धातु कितने पौंड मिलाई गई है।

मान लो कि इस मिश्रण में x पौं० टिन और y पौं० सीसा है।

उस अवस्था में, $\quad x+y=270. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

चूँकि टिन का वज़न हवा में जितना होता है पानी में उसका $\frac{1}{7}$ भाग कम होजाता है, इसलिए पानी में x पौं० टिन का वज़न $=\frac{6x}{7}$ पौं०।

इसी प्रकार पानी में y पौं० सीसे का वज़न $=\frac{11y}{12}$ पौं०;

$\therefore \quad \frac{6x}{7}+\frac{11y}{12}=240$, अर्थात् $72x+77y=20160. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) और (2) को हल करने से $x=126$, $y=144$.

$\therefore$ उक्त मिश्रण में 126 पौं० टिन और 144 पौं० सीसा है।

प्रश्नावली 100.

1. दो ऐसी संख्याएँ बतलाओ जिनमें से बड़ी संख्या के चौथाई में छोटी संख्या का एक-तिहाई भाग जोड़ देने पर योगफल 33 होजाय और बड़ी संख्या के छठे भाग में से छोटी संख्या का पाँचवाँ भाग घटा देने पर अन्तर 3 हो ।

2. एक भिन्न के अंश और हर में एक जोड़ने पर वह भिन्न $\frac{1}{38}$ बढ़ जाती है और उसके अंश और हर में से 4 घटा देने पर भिन्न में $\frac{8}{57}$ की कमी होजाती है । तो बताओ कि वह भिन्न कौनसी है ।

3. एक भिन्न का अंश उसके हर से 4 कम है । अंश में से 4 घटाने पर जो भिन्न प्राप्त होती है वही भिन्न हर में 30 जोड़ने पर भी प्राप्त होती है, तो वह भिन्न बताओ ।

4. किसी भिन्न के हर में 1 जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ होता है और अंश में से 2 घटाने पर $\frac{1}{3}$ होता है । तो बताओ कि वह भिन्न कौनसी है ।

5. एक भिन्न के हर में 1 जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ होता है और अंश में 2 जोड़ने पर [illegible] होता है, तो वह भिन्न बताओ ।

6. 2 आदमी और 6 लड़के मिलकर एक काम को 5 दिन में करते हैं । उसी काम को 8 आदमी और 3 लड़के मिलकर 3 दिन में कर सकते हैं; तो बताओ कि 1 आदमी और 1 लड़का मिलकर उस काम को कितने दिनों में पूरा कर सकेंगे ।

7. A और B मिलकर एक काम को 30 दिन में कर सकते हैं । वे दोनों 18 दिनों तक साथ साथ काम करते रहे, बाद को B चला गया और बचा हुआ काम A ने 20 दिन में पूरा कर लिया । तो बताओ कि A और B को अलग अलग उस काम के करने में कितना समय लगेगा ।

8. एक दीवार को A और B मिलकर p दिनों में बनाते हैं । B और C को वही दीवार बनाने में q दिन, और C और A को r दिन लगते हैं । तो बताओ कि A, B और C एक साथ मिलकर उस दीवार को कितने दिनों में बना लेंगे ।

9. दो वस्तुओं के बीच की दूरी 102 गज़ है। वे दोनों यदि सम (Uniform) किन्तु विभिन्न गति से एक दूसरी की ओर बढ़ें तो 6 सेकंड में वे एक दूसरी से मिल जाएँगी। परन्तु वे दोनों यदि एक ही दिशा की ओर बढ़ने लगें तो दोनों में से जो वस्तु अधिक तेज़ी के साथ बढ़नेवाली है वह 17 सेकंड में दूसरी को पकड़ लेगी। तो बताओ कि उनमें से हर एक की चाल क्या है।

10. घूम से दार्जिलिंग को चलने पर कुछ दूर तक सड़क में चढ़ाव पड़ता है और कुछ दूर तक उतार। इन दोनों स्थानों का अन्तर 5 मील का है। सड़क पर जहाँ तक चढ़ाव है, साइकिल 8 मील प्रति घंटे की चाल से चल सकती है और उतार के रास्ते में 12 मील प्रति घंटे की चाल से। घूम से चलकर साइकिल से जब हम 30 मिनट में दार्जिलिंग पहुँच सकें तो वहाँ से लौटने में हमें कितना समय लगेगा?

11. एक व्यापारी ने एक चीज़ 10 प्रति सैकड़ा लाभ पर और एक दूसरी चीज़ 20 प्रति सैकड़ा लाभ पर बेचकर कुल 46 रु० प्राप्त किये। यदि वह उन दोनों वस्तुओं को 15 प्रति सैकड़ा के लाभ पर बेचता तो भी उसे उतने ही रुपयों की आय होती। तो बताओ कि उसने हर एक चीज़ कितने कितने रुपयों की बेची।

12. 1000 गज़ की एक दौड़ में पहली बार B के 100 गज़ दौड़ चुकने के बाद A ने दौड़ना शुरू किया और B को 30 सेकंड से हरा दिया, परन्तु दूसरी बार A ने B से 1 मि० 30 सेकंड बाद को दौड़ना आरम्भ किया और वह 120 गज़ से हार गया। तो बताओ कि 1000 गज़ दौड़ने में A और B में से किसे कितनी देरी लगेगी।

13. नौका में डाँड़ चलाकर धारा की विपरीत दिशा में $10\frac{1}{2}$ मील जाने के बाद लौटकर आने में एक व्यक्ति को 5 घंटे लगते हैं। धारा के अनुकूल 7 मील और प्रतिकूल 3 मील जाने में एक ही समय लगता है। तो बताओ कि नदी की धारा का वेग प्रति घंटा कितने मील का है।

14. एक ऐरोप्लेन वायु के अनुकूल घंटे भर में 75 मील के वेग से और प्रतिकूल 55 मील के वेग से उड़ सकता है। तो बताओ कि वायु

का वेग क्या है और वायु यदि स्थिर हो तो ऐरोप्लेन प्रति घंटा कितने मील के वेग से उड़ सकता है।

15. एक नौकर 10 घंटे में धारा के प्रतिकूल 30 मील और अनुकूल 44 मील और 13 घंटे में धारा के प्रतिकूल 40 मील और अनुकूल 55 मील चल सकती है। तो बताओ कि धारा का वेग क्या है और नौका स्थिर जल में किस वेग से चल सकती है।

16. दो अङ्कों से बनी हुई संख्या अपने अङ्कों के योग के 3 गुने के समान है। उस संख्या को 3 से गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है, वह उस संख्या के अङ्कों के योग के वर्ग के समान है। तो संख्या बताओ।

17. दो अङ्कों की एक संख्या के दोनों अङ्कों का अन्तर 6 है। उस संख्या के साथ उसके अङ्कों का स्थान परिवर्तित करके लिखने पर जो संख्या प्राप्त होती है, उसे जोड़ने पर योगफल 110 होता है। तो बताओ कि वह संख्या कौनसी है।

18. तीन अङ्कों की एक संख्या में बीच का अङ्क 0 है, और अङ्कों का योग 8 है। अगल-बगल वाली दोनों संख्या के स्थान परिवर्तित करके उन्हें लिखने पर जो संख्या प्राप्त होती है वह पहलेवाली संख्या से 198 अधिक हो जाती है। तो पहलेवाली संख्या बताओ।

19. एक कम्बल की लम्बाई के तिगुने में, जिसकी सीमा 20 फ़ुट है, उसकी चौड़ाई का पाँच गुना जोड़ देने पर 36 फ़ुट हो जाता है। तो बताओ कि उस कम्बल का क्षेत्रफल क्या है।

20. एक आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल एक दूसरे आयतक्षेत्र के जिसकी लम्बाई 2 गज़ अधिक और चौड़ाई 1 गज़ कम, और एक तीसरे आयतक्षेत्र के जिसकी लम्बाई उसकी लम्बाई से 8 गज़ अधिक और चौड़ाई 3 गज़ कम है, क्षेत्रफल के समान है। तो बताओ कि उस आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल क्या है।

21. यदि एक आयतक्षेत्र की लम्बाई 5 इंच कम और चौड़ाई 3 इंच अधिक होती तो उसका क्षेत्रफल वर्तमान क्षेत्रफल की अपेक्षा 9 वर्ग इंच कम होजाता। यदि उसकी लम्बाई 3 इंच और चौड़ाई 2 इंच अधिक होती तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इंच अधिक हो जाता। तो बताओ कि क्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई क्या है।

22. एक व्यक्ति ने 1340 रु० में 4 घोड़े और 9 गायें ख़रीदीं। घोड़ों को 10 प्रति सैकड़ा के लाभ पर और गायों को 20 प्रति सैकड़ा लाभ पर बेचने पर उसे 188 रु० का लाभ हुआ। तो बताओ कि उसने कितने रुपयों के हिसाब से घोड़े ख़रीदे थे।

23. कुछ रुपये A, B और C में इस तरह बाँटे गये कि A को कुल रुपयों का आधा मिला। A और B को मिलाकर 76 रुपये और A और C को 62 रुपये मिले। तो बताओ कि हर एक को कितने कितने रुपये मिले।

24. 120 गज़ जाने में एक गाड़ी के सामने वाले चक्के पीछे वाले चक्कों से 6 बार अधिक घूमते हैं। यदि सामने और पीछे वाले चक्कों की परिधि क्रमशः उनकी वर्त्तमान परिधि का एक-चौथाई और एक-पञ्चमांश अधिक होता तो सामने वाले चक्के पीछे वाले चक्कों से 4 बार अधिक घूमते। तो बताओ कि प्रत्येक चक्के की परिधि क्या है।

25. एक आदमी ने 1200 रुपयों में से कुछ रुपये 4 रुपया प्रति सैकड़ा और कुछ रुपये 5 रुपया प्रति सैकड़ा व्याज की दर से उठाये। इससे उसे 53 रु० 8 आने व्याज के मिले। तो बताओ कि उसने कितने कितने रुपये किस किस दर से उठाये थे।

26. यदि 15 सेर चीनी और 17 सेर चावल का दाम मिलाकर 8 रुपये 9 आने 9 पाई हो और 25 सेर चीनी और 13 सेर चावल का दाम मिलाकर 11 रु० 3 आना 9 पाई हो, तो चीनी और चावल का मूल्य प्रति सेर क्या होगा?

27. एक स्कूल में एक उत्सव का आयोजन किया गया। उस उत्सव में सम्मिलित होने के लिए विद्यार्थियों को 10 आना 8 पाई और सर्वसाधारण को 1 रुपया 8 आना टिकट लेना पड़ा। इस प्रकार कुल 300 टिकट बिके और उनसे 330 रुपयों की आय हुई। तो बताओ कि कितने टिकट विद्यार्थियों में बिके और कितने जन-साधारण में बिके।

28. दो अङ्कों से बनी हुई किसी संख्या के पहले अङ्क का 5 गुना दूसरे अङ्क के 6 गुने से 2 अधिक होता है। इस संख्या के साथ दोनों

अङ्कों को उलट कर लिखने पर जो संख्या बन जाती है उसे जोड़ देने पर योगफल 77 हो जाता है। तो बताओ कि वह संख्या क्या है।

29. पति और पत्नी की अवस्था का योग उनके पुत्र की अवस्था का 6 गुना है। 5 वर्ष के बाद वह पुत्र की अवस्था का 5 गुना हो जायगा। यदि पति की अवस्था पत्नी की अवस्था से 10 वर्ष अधिक हो, तो बताओ कि पति, पत्नी और पुत्र में से हर एक की अवस्था क्या है।

30. 3 वर्ष के बाद हरेन की अवस्था गोविन्द की जो अवस्था 5 वर्ष पहले थी, उसकी 3 गुना हो जायगी। हरेन की वर्त्तमान अवस्था का $\frac{2}{4}$ गोविन्द की अवस्था के $\frac{3}{4}$ से 2 वर्ष अधिक है। तो बताओ कि उनकी वर्त्तमान अवस्था क्या है।

31. एक आदमी ने चाय के बग़ीचे के 40 और जूट की मिल के 60 हिस्से और उसके एक मित्र ने चाय के बग़ीचे के 60 और जूट की मिल के 40 हिस्से ख़रीदे। उन दोनों ने अपने अपने हिस्से एक-साथ ही बेच दिये तो पहले आदमी को 300 रु० का लाभ और दूसरे को 300 रु० की हानि हुई। बताओ कि हर प्रकार के हिस्से के मूल्य में किस प्रकार का परिवर्त्तन हुआ।

32. एक आदमी से पूछने पर मालूम हुआ कि 23 वर्ष के बाद उसके लड़के की आयु उसके जन्म के समय उस आदमी की जो आयु थी उसके समान हो जायगी और उस समय आदमी की आयु 58 वर्ष की होगी। बताओ कि पुत्र की आयु इस समय क्या है।

33. A, B, C, D और E पाँच आदमी ताश खेलने बैठे। उनमें से A ने B के रुपयों का आधा, B ने C के रुपयों का $\frac{1}{3}$, C ने D के रुपयों का $\frac{1}{4}$ और D ने E के रुपयों का $\frac{1}{6}$ जीत लिया। अन्त में उनमें से हर एक के पास 30 रु० रह गये, तो बताओ कि खेल आरम्भ होने के पहले हर एक के पास कितने कितने रुपये थे।

——:o:——

चौबीसवाँ अध्याय

लेखाचित्र (Graphical Representation)

274. किसी फल का लेखाचित्र (The Graph of a Function).

रेखाचित्र की विन्दुओं के द्वारा किस प्रकार बीजगणित सम्बन्धी संख्याएँ सूचित होती हैं इस बात पर पहले ही आठवें अध्याय में विचार किया जाचुका है। अब इस अध्याय में रेखाचित्र के प्रयोग द्वारा किस प्रकार बीजीयफल प्रकट किये जासकते हैं, इसी पर विचार किया जायगा।

किसी चल (Variable) राशि (x) समन्वित बीजीय व्यंजक को उक्त x का फल (Function) कहते हैं और उसका मान x के मान के ऊपर निर्भर करता है। उक्त फल $f(x)$ संकेत द्वारा सूचित होता है (अनु० 228). इस फल का मान y के द्वारा सूचित होने पर $y=f(x)$ समीकरण प्राप्त होता है।

इस समीकरण के द्वारा x के भिन्न भिन्न मानों और $f(x)$ अर्थात् y के तदनुरूप (Corresponding) मानों में एक सम्बन्ध स्थापित होता है। ऐसी अवस्था में x के मान कई संख्याएँ होने पर $f(x)$ अर्थात् y का मान भी तदनुरूप कई संख्याएँ होंगी। x के मान को भुज और y के अनुरूप मान को कोटि मानकर कई विन्दु अङ्कित किये जाते हैं। इन विन्दुओं को एक अविच्छिन्न (Continuous) रेखा के द्वारा मिलाने से जो रेखा (वक्र अथवा सरल) प्राप्त होती है उसे $f(x)$ फल का अथवा $y=f(x)$ समीकरण का लेखा अथवा लेखाचित्र कहते हैं।

टीका 1—$2x+3$ फल का लेखाचित्र और $y=2x+3$ समीकरण का लेखाचित्र एक ही है।

टीका 2—x को स्वाधीन (Independent) और y को अधीन (Dependent) चल राशि कहते हैं। 'स्वाधीन' चल राशि का कोई परिवर्त्तन होने पर y अर्थात् $f(x)$ में किस प्रकार का परिवर्त्तन होता है, यह लेखाचित्र द्वारा निर्धारित किया जाता है।

275. समीकरण का लेखाचित्र।

किसी विन्दु के दोनों भुज-कोटि दिये होने पर उसका अवस्थान निश्चित रूप से निर्धारित किया जाता है परन्तु यदि दो के बदले केवल एक ही भुज-कोटि दिया हो या दोनों भुज-कोटि किसी समीकरण द्वारा संयुक्त हों तो यह बहुत ही सरलतापूर्वक ज्ञात हो जाता है कि उसके द्वारा किसी एक निर्दिष्ट विन्दु का अवस्थानाङ्क नहीं सूचित होता। ऐसी अवस्था में उक्त भुज-कोटि या समीकरण द्वारा क्या सूचित होता है यह विवेचना करके देखना आवश्यक है।

ऐसी दशाओं में यह देखने में आता है कि उसके द्वारा कोई एक निर्दिष्ट विन्दु न सूचित होकर ऐसे असंख्य विन्दु सूचित होते हैं जिनके दोनों भुज-कोटि उक्त समीकरण के द्वारा सम्बद्ध हैं। इसलिए इस समीकरण के द्वारा इस प्रकार के विन्दुओं का मार्ग अर्थात् इस प्रकार के किसी भी एक विन्दु का मार्ग सूचित होता है।

परिभाषा 1. कोई अचल विन्दु एक या एक से अधिक शर्त के अधीन होकर जिस पथ पर घूमता है उसे उस विन्दु का विन्दु-पथ (Locus) कहते हैं और जो समीकरण उक्त पथ में स्थित किसी विन्दु के भुज-कोटि दोनों का सम्बन्ध प्रकट करता है उसे उक्त पथ का समीकरण कहते हैं।

इसी प्रकार अनेक तरह के रेखाचित्र सम्बन्धी पथ या रेखायें बीजीय समीकरण के द्वारा प्रकाशित हो सकती हैं, या यूँ कहिए कि चाहे कोई भी बीजीय समीकरण हो, ('सरल' अथवा 'वक्र') रेखा-द्वारा रेखाचित्र की सहायता से सूचित हो सकता है।

276. $ax+b$ आकार के व्यंजक का लेखाचित्र।

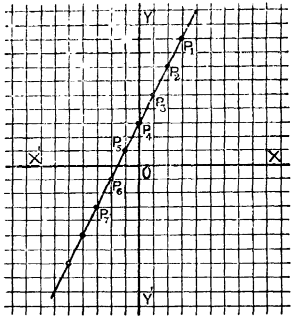
यह व्यंजक यदि $2x+3$ हो, तो कल्पना करो कि $y=2x+3$. x का मान $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ इत्यादि होने पर y अर्थात् $2x+3$ का मान क्रमशः कितना होगा यह निर्णय करो और निम्नलिखित रूप से उन्हें तालिका के अन्तर्गत करो:—

x	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
$2x$	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	−10
$2x+3$	9	7	5	3	1	−1	−3	−5	−7

इसलिए x के $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ आदि मानों के अनुरूप y, अर्थात् $2x+3$ का मान क्रमशः $9, 7, 5, 3, 1, -1, -3$ आदि पाया जाता है।

उपर्युक्त मानों के जोड़ों के द्वारा सूचित $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, \ldots$ विन्दु अङ्कित करो।

विन्दुओं को एक अविच्छिन्न (Continuous) रेखा के द्वारा मिलाने पर ज्ञात होगा कि वे एक सरल रेखा पर वर्त्तमान हैं। उस सरल रेखा को दोनों ओर बढ़ा दिया जाता है। यह सरल रेखा ही $2x+3$ व्यंजक का लेखाचित्र (Graph) है।



चूँकि y सदा $2x+3$ के समान है, इसलिए उक्त चित्र से विभिन्न विन्दुओं की कोटि निर्धारित करने पर ही उक्त राशि का मान-परिवर्त्तन लक्षित होगा।

इस लेखाचित्र से x के किसी भी मान के अनुरूप y अथवा $2x+3$ का मान सरलतापूर्वक ही पाया जाता है।

जैसे, $x=1\cdot5$ होने पर, $y=2x+3=6$;

फिर, $x=-4$ होने पर, $y=2x+3=-5$; इत्यादि।

साधारणतः a और b इन दोनों के अचल (Constant) राशि होने पर $ax+b$ व्यंजक का लेखाचित्र एक सरल रेखा होगी।

देखने में आता है कि $P_1, P_2, P_3, \ldots$ विन्दुएँ एक सरल रेखा पर हैं और इस रेखा को दोनों ओर बढ़ा दिये जाने पर भी उसके किसी भी विन्दु के भुज-कोटि के द्वारा दिया हुआ समीकरण सिद्ध हो जाता है। इसलिए यह सरल रेखा ही निर्णेय पथ है। यह $2x+3$ व्यंजक का लेखाचित्र कहलाती है और $y=2x+3$ को उक्त लेखाचित्र का बीजीय समीकरण कहते हैं।

उदाहरण 1. $2x$ फल का लेखाचित्र खींचो ।

मान लो कि $y=2x$. x और y के अनुरूप (Corresponding) मानों को निम्नलिखित रूप से तालिका के अन्तर्गत करो :—

x	1	2	3	4	...	0	-1	-2	-3	...
$y=2x$	2	4	6	8	...	0	-2	-4	-6	...

ऊपर कहे गये मान के हर एक जोड़े के द्वारा सूचित विन्दु अङ्कित करो और अङ्कित किये गये विन्दुओं को एक अविच्छिन्न रेखा से मिलाओ । यह एक सरल रेखा होगी । इस सरल रेखा को दोनों ओर बढ़ाओ । यही निर्णेय लेखाचित्र है ।

टीका—$y=2x+3$ में से हर एक की कोटि $y=2x$ के अनुरूप कोटि के साथ $+3$ इकाई जोड़ने से प्राप्त होगा । अतएव, $y=2x$ का लेखाचित्र $y=2x+3$ के लेखाचित्र की समानान्तर (Parallel) सरल रेखा है । इस अन्त में कहे गये लेखाचित्र की प्रत्येक कोटि धनात्मक (पॉज़िटिव) दिशा की ओर 3 इकाई बढ़ाने से प्राप्त होगी ।

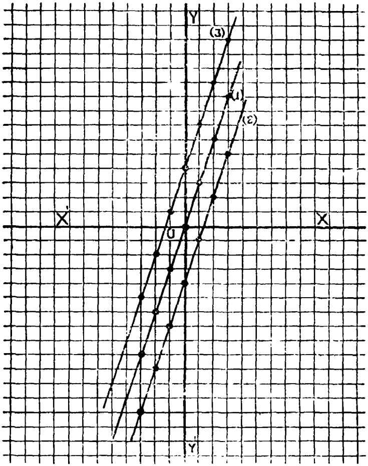
उदाहरण 2. निम्नलिखित समीकरणों का लेखाचित्र अङ्कित करोः—

(1) $y=3x$. (2) $y=3x-4$ और (3) $y=3x+4$.

प्रत्येक समीकरण से x और y के मानों को निम्नलिखित रूप से तालिकाबद्ध करो :—

x		-3	-2	-1	0	1	2	3	....
(1) y	...	-9	-6	-3	0	3	6	9	......
(2) y	...	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	.....
(3) y	...	-5	-2	1	4	7	10	13	......

छोटे वर्ग की एक बाहु को इकाई मान कर (1), (2) और (3) के अन्तर्गत विन्दुओं को अङ्कित करो। पहले की भाँति विन्दुओं को एक अविच्छिन्न रेखा से मिलाने पर ज्ञात होगा कि तीनों निर्णेय लेखाचित्रों में से हर एक की एक एक सरल रेखा है ।



ऊपर के चित्र में समीकरणों के लेखाचित्र दिये गये हैं। (1) का लेखाचित्र मूल-विन्दु से होकर जाता है। (3) का लेखाचित्र y-अक्ष को मूल-विन्दु से धन (पॉज़िटिव) दिशा में 4 इकाई की दूरी पर, और (2) का लेखाचित्र y-अक्ष को मूल-विन्दु से ऋण (निगेटिव) दिशा में 4 इकाई की दूरी पर काटता है।

टीका—(1) का लेखाचित्र मूल-विन्दु से होकर जाता है। किसी समीकरण में अचल (Constant) राशि न होने से उसका लेखाचित्र मूल-विन्दु (Origin) से होकर जाता है।

277. सरल रेखा का लेखाचित्र।

ऊपर के उदाहरणों से यह ज्ञात हुआ कि $y=mx$ और $y=mx+c$ आकार के समीकरणों के लेखाचित्र एक एक सरल रेखा हैं। फिर x और y से बने हुए किसी एकघात वाले समीकरण को ही $y=mx$ अथवा

$y=mx+c$ के आकार में परिवर्तित किया जाता है । अतएव दो अव्यक्त राशियों के प्रत्येक एकघात वाले समीकरण का लेखा भी एक सरल रेखा है ।

$mx+c$ व्यंजक को x का एक रैखिक (Linear) फल और $y=mx+c$ अथवा $ax+by+c=0$ इस आकार के समीकरणों को रैखिक-समीकरण (Linear Equation) भी कहा जा सकता है ।

निम्नलिखित विषयों को यत्नपूर्वक स्मरण रखना होगा :—

(1) m और c का मान चाहे कुछ ही क्यों न हो, $y=mx+c$ का लेखाचित्र एक सरल समीकरण होगा ।

(2) $c=0$ होने पर समीकरण $x=0$, $y=0$ द्वारा सिद्ध होता है । अतएव $(0, 0)$ विन्दु के लेखाचित्र के ऊपर अवस्थित होगा, अर्थात् $y=mx$ और लेखाचित्र मूल-विन्दु (Origin) से होकर जायगा ।

(3) $x=0$ होने पर $y=c$ होता है । अतएव लेखाचित्र y-अक्ष को मूल-विन्दु से c इकाई की दूरी पर काटता है ।

(4) m और c का मान चाहे कोई भी संख्या क्यों न हो, $y=mx+c$ का लेखाचित्र $y=mx$ के लेखाचित्र के समानान्तर (Parallel) एक सरल रेखा होगी ।

(5) m और c का मान निर्दिष्ट रहने पर $y=mx+c$ के लेखाचित्र का अवस्थान भी निर्दिष्ट रहेगा । यदि m का कोई परिवर्त्तन न हो, तो उक्त सरल रेखा की दिशा भी परिवर्तित हो जाती है किन्तु उस समय भी वह y-अक्ष को मूल-विन्दु से c इकाई दूर एक निर्दिष्ट विन्दु पर काटती है । फिर यदि m का मान स्थिर रहे और c का मान परिवर्तित हो, तो रेखा $y=mx$ के लेखाचित्र के समानान्तर रहती है । किन्तु y-अक्ष को विभिन्न विन्दुओं पर काटती है ।

(6) m और c ये दोनों राशि सरल रेखा का अवस्थान निर्दिष्ट करती हैं इसी कारण उन्हें समीकरण का अचल (Constant) कहा जाता है ।

(7) $ax+by+c=0$ इस साधारण एकघात वाले समीकरण (Linear Equation) को सर्वदा $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, अर्थात् $y=mx+c$ के आकार में रूपान्तरित किया जाता है । इसलिए $ax+by+c=0$ का लेखाचित्र सदा ही एक सरल रेखा होगी । यह y-अक्ष को मूल-विन्दु से $\left(-\frac{c}{b}\right)$ इकाई की दूरी पर काटती है ।

(8) $y=mx+c$ के लेखाचित्र को $mx+c$ फल का भी लेखाचित्र कहते हैं।

(9) जिन समस्त विन्दुओं के अङ्कन द्वारा यह समीकरण सिद्ध होता है केवल वे ही समस्त विन्दु लेखाचित्र के ऊपर अवस्थित होंगे; उनके अतिरिक्त कोई दूसरा विन्दु नहीं।

278. एकघात समीकरण का लेखाचित्र खींचने की रीति।

पहले यह बतलाया जा चुका है कि x और y वाले एकघात समीकरण का लेखाचित्र सदा ही एक सरल रेखा होती है। फिर दो निर्दिष्ट विन्दुओं से होकर केवल एक सरल रेखा खींची जा सकती है। इसलिए जिनके भुज-कोटि के द्वारा दिया हुआ समीकरण सिद्ध होता है उस प्रकार के दो विन्दु निर्धारित करके एक सरल रेखा के द्वारा उन दोनों को मिलाने पर वह सरल रेखा ही समीकरण का लेखाचित्र होती है। ऊपर कहे गये के अनुसार केवल दो विन्दु न लेकर तीन या तीन से अधिक विन्दु लेने पर भूल की सम्भावना नहीं रहती।

इसलिए जब एक एकघात समीकरण का लेखाचित्र अङ्कित करना होता है, तो

(1) x और y के मान के ऐसे दो जोड़े निकालो जिनके द्वारा यह समीकरण सिद्ध हो।

(2) सुविधानुसार इकाई मानकर एक वर्गाङ्कित काग़ज़ पर दो विन्दु अङ्कित करो।

(3) दोनों अङ्कित किये गये विन्दुओं को मिलाकर उन्हें मिलाने वाली रेखा को दोनों ओर बढ़ाओ। यही निर्णेय लेखाचित्र है।

(4) इस लेखाचित्र के ऊपर एक दूसरा विन्दु लो। उक्त लेखाचित्र से उसके भुज-कोटि निकालकर दिखाओ कि उसके द्वारा दिया हुआ समीकरण सिद्ध होता है।

टीका 1—बहुधा यह लेखाचित्र x और y अक्षों को जिन दो विन्दुओं पर काटता है उन्हें निकालना ही सुविधाजनक है। इस समीकरण में क्रमशः $y=0$ और $x=0$ लिखकर इन दोनों विन्दुओं को निकालना होता है।

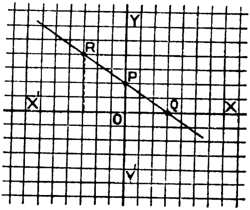
टीका 2—यदि किसी विन्दु के भुज-कोटि के द्वारा कोई समीकरण सिद्ध होता है तो वह विन्दु उस समीकरण के लेखाचित्र पर बैठेगा अन्यथा नहीं।

उदाहरण 1. $2x+3y=6$ को लेखाचित्र द्वारा अङ्कित करो ।

x और y के निम्नलिखित मान समूह के द्वारा यह समीकरण सिद्ध होता है:—

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=3 \end{array}\right\}$$

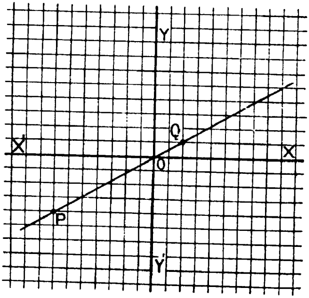
P (0, 2) और Q (3, 0) ये दो विन्दु अङ्कित करो । PQ को मिलाओ और उसको दोनों ओर बढ़ाओ । PQ सरल रेखा ही निर्णय लेखाचित्र है



इस लेखाचित्र पर कोई विन्दु R लो । लेखाचित्र से यह ज्ञात होता है कि $(-3, 4)$ इसका भुज-कोटि है । इनके द्वारा यह समीकरण सिद्ध होता है । अतएव PQ सरल रेखा ही निर्णय लेखाचित्र है ।

उदाहरण 2. $5x-9y=1$ को लेखाचित्र द्वारा अङ्कित करो और x और y के जिन सब धनात्मक पूर्ण मानों के द्वारा समीकरण सिद्ध होता हो उनमें से कुछ को निकालो ।

निर्णय लेखाचित्र y-अक्ष रेखा को $x=0$, $y=-\frac{1}{9}$ विन्दु पर और x-अक्ष रेखा को $x=\frac{1}{5}$, $y=0$ विन्दु पर काटता है । इन्हीं दो विन्दुओं को अङ्कित करके मिलाने से ही निर्णय लेखाचित्र प्राप्त हो जायगा ।



x और y के उक्त दोनों मान भिन्न होने पर दोनों विन्दुओं को अङ्कित करना असुविधाजनक है । अतः x और y के जिन सारे पूर्ण मानों द्वारा समीकरण सिद्ध होता है उसका निर्णय करना

हो सुविधाजनक है। देखने में आता है कि $x=-7$, $y=-4$ और $x=2, y=1$ ये दो पूर्ण मान समूह के द्वारा यह समीकरण सिद्ध होता है।

P $(-7, -4)$ और Q $(2, 1)$ ये दो विन्दु बनाओ। फिर PQ को मिलाकर दोनों ओर बढ़ाओ। यही निर्णय लेखाचित्र है।

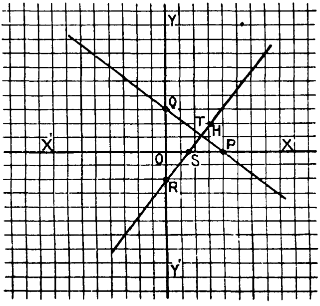
x और y के जिन समस्त धनात्मक पूर्ण मानों के द्वारा यह समीकरण सिद्ध होता है उनसे सूचित होनेवाले विन्दुओं का लेखाचित्र पहले चौथाई (पाद) अंश में अवस्थित होगा। उसके अनुसार निम्नलिखित मान पाये जाते हैं:—

$$x=2,\ x=11,\ x=20,\ x=29.$$
$$y=1,\ y=6,\ \ y=11,\ y=16.$$

टीका—एकघात समीकरण को $x/a+y/b=1$ आकार में लिखने से x-अक्ष का अवच्छेद (Intercept)$=a$ और y-अक्ष का अवच्छेद$=b$, और ये सब क्रमशः x और y के गुणक के व्युत्क्रम (Reciprocal) हैं।

उदाहरण 3. (1) $3x+4y=12$ और (2) $4x-3y=6$ को लेखाचित्र से अङ्कित करो और दोनों लेखाचित्रों के बने हुए कोण का परिमाण निकालो।

(1) P $(4, 0)$ और Q $(0\ 3)$ ये दोनों विन्दु पहले समीकरण के लेखाचित्र पर स्थित हैं। उनको अङ्कित करके एक सरल रेखा PQ द्वारा मिला दिया। यही PQ रेखा पहले समीकरण का लेखाचित्र है।



28—A.

(2) R(0, −2) और S($\frac{3}{2}$, 0) ये दोनों विन्दु दूसरे समीकरण के लेखाचित्र के ऊपर स्थित हैं। S विन्दु का भुज-कोटि भिन्न होने के कारण पूर्ण भुज-कोटि से युक्त इसी प्रकार का एक दूसरा विन्दु H(3, 2) स्थिर किया जाता है जिसके भुज-कोटि से समीकरण सिद्ध होता है। RH सरल रेखा दूसरे समीकरण का लेखाचित्र है। कल्पना करो कि RH, PQ को T विन्दु पर काटता है।

प्रोट्रैक्टर (Protractor) की सहायता से PQ और RH से बने हुए कोण को नापने से ज्ञात होगा कि $\angle PTH = 90°$, अर्थात् एक समकोण।

टीका—दोनों समीकरणों को $y = -\frac{3}{4}x + 3$ और $y = \frac{4}{3}x - 2$ आकार में लिखा जा सकता है और देखने में आता है कि $-\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$. साधारणतः $y = mx + c$ और $y = -\frac{1}{m}x + c'$ आकार के दो समीकरणों के लेखाचित्र एक दूसरे को समकोण पर काटेंगे; क्योंकि $m \times \left(-\frac{1}{m}\right) = -1$. m को $y = mx + c$ समीकरण के लेखाचित्र का नति या ढाल (Slope) कहते हैं।

279. एक अव्यक्त राशि के एकघातवाले समीकरण का लेखाचित्र।

यहाँ तक दो अव्यक्त राशि के एकघातवाले समीकरण के बारे में विचार किया गया है। अब इस पर विचार किया जायगा कि यदि समीकरण में केवल एक ही अव्यक्त राशि हो, तो लेखाचित्र किस प्रकार का होगा।

$x = 3$ इस समीकरण की विवेचना करो। इस समीकरण द्वारा ऐसे समस्त विन्दुओं का बोध होगा जिनका भुज 3 है, और किसी एक निर्दिष्ट विन्दु का बोध नहीं होगा। x-अक्ष रेखा पर मूल-विन्दु से धन दिशा में 3 इकाई की दूरी पर एक विन्दु P लो और उससे होकर y-अक्षरेखा के समानान्तर एक सरल रेखा खींचो। इस सरल रेखा में स्थित प्रत्येक विन्दु का भुज 3 है। इसलिए यही इस समीकरण का लेखाचित्र है।

अतएव, $x=3$ समीकरण का लेखाचित्र y-अक्षरेखा के समानान्तर एक सरल रेखा है ।

इसी प्रकार $y=4$ समीकरण का लेखाचित्र x-अक्षरेखा के समानान्तर एक सरल रेखा होगा ।

ये दो लेखाचित्र जिस विन्दु पर काटते हैं उसका भुज $=3$ और कोटि $=4$; अर्थात् $(3, 4)$ विन्दु पर काटते हैं ।

टीका 1—$x=0$ का लेखाचित्र y-अक्षरेखा और $y=0$ का लेखाचित्र x-अक्षरेखा है ।

टीका 2—$x=a$ आकार के किसी भी समीकरण का लेखाचित्र y-अक्षरेखा के समानान्तर होगा और $y=b$ आकार के किसी भी समीकरण का लेखाचित्र x-अक्षरेखा के समानान्तर होगा ।

टीका 3—एक अव्यक्त राशि के एकघातवाले समीकरण का लेखाचित्र सदा ही दोनों अक्षों में से किसी एक के समानान्तर होगा ।

280. दिये हुए लेखाचित्र का समीकरण निकालना ।

दो दिये हुए विन्दुओं से होकर खींची गई रेखा का समीकरण कैसे निकाला जाता है, अब यही दिखलाया जायगा ।

मान लो कि दिये हुए दोनों विन्दुओं का भुज-कोटि क्रमशः $(2, -3)$ और $(-4, 9)$ हैं और मान लो कि निर्णेय समीकरण $y=mx+c$ है ।

चूँकि $x=2$, $y=-3$ के द्वारा यह समीकरण सिद्ध होता है; इसलिए

$$-3=2m+c \qquad \text{...............(1)}$$

इसी प्रकार, $x=-4$ और $y=9$ लिखने से,

$$9=-4m+c. \qquad \text{...............(2)}$$

(1) में से (2) को घटाने से,

$$-12=6m; \qquad \therefore \quad m=-2.$$

m का मान (1) में लिखने से $c=1$;

अतएव, $y=-2x+1$, अथवा $2x+y=1$; यही निर्णेय समीकरण है ।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि $(3, 0)$, $(7, 2)$ और $(-1, -2)$ ये तीनों विन्दु एक ही सरल रेखा पर स्थित हैं। उस सरल रेखा का समीकरण निकालो।

मान लो कि पहले दो विन्दुओं से होकर जो सरल रेखा जाती है उसका समीकरण $y = mx + c$ है। इसलिए पहले और दूसरे विन्दु के भुज-कोटि के द्वारा यह समीकरण सिद्ध होगा।

इस समीकरण में $x = 3$, $y = 0$ लिखने से,

$$0 = 3m + c, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

और $x = 7$, $y = 2$ लिखने से,

$$2 = 7m + c. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) और (2) को हल करने से $m = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$;
अतएव समीकरण $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, या $x - 2y = 3$.

तीसरे विन्दु के भुज-कोटि $(-1, -2)$ द्वारा समीकरण सिद्ध होता है। इसलिए तीसरा विन्दु भी इन दोनों विन्दुओं से होकर खींची गई सरल रेखा के ऊपर स्थित है अर्थात् $x - 2y = 3$ के द्वारा सूचित सरल रेखा के ऊपर तीनों ही विन्दु स्थित हैं।

उदाहरण 2. निम्नलिखित समीकरणों के लेखाचित्रों के द्वारा घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो :—

(1) $y = x + 2$, (2) $y = x - 2$,
(3) $y = -x + 2$, (4) $y = -x - 2$.

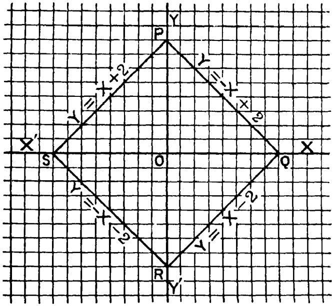
छोटे वर्ग को चारों वाहुओं की लम्बाई को इकाई मानकर समीकरण (1), (2), (3) और (4) के लेखाचित्र अङ्कित करो।

चारों समीकरणों का पर्यवेक्षण करने पर ज्ञात होता है कि—

(1) समीकरण (1) और (2) दोनों के लेखाचित्रों में से हरएक एक समानान्तर सरल रेखा है। अतएव चारों लेखाचित्रों से घिरा हुआ क्षेत्र एक समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram) है।

(2) समीकरण (1) और (2) के लेखाचित्रों में से हरएक (3) और (4) दोनों के लेखाचित्रों को लम्बरूप से काटते हैं। अतएव उससे जो क्षेत्र बना है वह एक आयतक्षेत्र है।

(3) और भी यह देखने में आता है कि चारों चित्रों में से किसी एक और उसके संलग्न पूर्व या पर के किसी अक्ष को एक ही विन्दु पर काटता है और यह काटनेवाला विन्दु मूल-विन्दु से 2 इकाई दूर के अक्ष पर वर्त्तमान है । अतएव यह क्षेत्र एक वर्गक्षेत्र है । चित्र में यह क्षेत्र PQRS द्वारा दिखाया गया है ।



अब $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = 4 + 4 = 8$ वर्ग इकाई ।

$\therefore$ दिये हुए चारों समीकरणों के लेखाचित्र द्वारा घिरे हुए वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई है ।

वर्गक्षेत्र के भीतर स्थित छोटे वर्गक्षेत्रों की संख्या गिनने पर भी ज्ञात होगा कि वे संख्या में 8 हैं ।

प्रश्नावली 101.

निम्नलिखित समीकरणों का लेखाचित्र खींचो :—

1. (*i*) $x+9=0$; (*ii*) $2y+7=0$; (*iii*) $3x=2$.

निम्नलिखित समीकरणों के लेखाचित्रों को एक ही चित्र में अङ्कित करो:—

2. (*i*) $y=2x$; (*ii*) $y=2x-1$; (*iii*) $y+2x=1$.
3. (*i*) $y+x=0$; (*ii*) $y+x=7$; (*iii*) $y-x=7$.
4. (*i*) $2x-3y=0$; (*ii*) $3x+2y=0$; (*iii*) $2x+3y=0$.

दोनों अक्षों का अवच्छेद अन्तःखण्ड (Intercept) निकालकर अथवा किसी भी सुविधाजनक दो विन्दुओं से उन्हें मिलाकर निम्नलिखित समीकरणों के लेखाचित्रों को एक ही चित्र में अङ्कित करो :—

5. (i) $y=2x+5$; (ii) $y=3x-6$; (iii) $y=-3x+21$.

6. (i) $2y=5x+3$; (ii) $2y+3x=3$; (iii) $2y=3x+3$.

7. $y=x+5$ का लेखाचित्र खींचो और यह निर्णय करो कि खींचे गये लेखाचित्र की x-अक्षरेखा का नति या ढाल (slope) कितना है ।

8. $x=-3$ से $x=+3$ तक $4x$ और $4x+3$ फल इन दोनों का लेखाचित्र किस प्रकार अङ्कित किया जाता है ? $x=2 \cdot 5$ होने से $4x+3$ का मान लेखाचित्र द्वारा बताओ ।

9. $x=-6$ से $x=+6$ और $y=\frac{1}{3}x-2$ समीकरण का लेखाचित्र खींचो । इस चित्र से $y=\frac{1}{3}x$ का लेखाचित्र कैसे खींचा जाता है ?

10. $x+y=1$, $2x+3y=4$ और $y=2$ इन तीनों समीकरणों का लेखाचित्र एक ही जोड़ा अक्ष का अवलम्बन करके खींचो और दिखाओ कि वे सब एक विन्दु पर काटते हैं । छेद विन्दु के भुज-कोटि बताओ ।

11. $x=-4$ से $x=+4$ तक $3x-5$ फल का लेखाचित्र अङ्कित करो । $x=-2$ से $x=+2$ के बीच $3x-5$ का मान कितना बढ़ेगा बताओ ।

12. $x=-3$ से $x=+3$ तक $3x+5$ और $2x+3$ के लेखाचित्र अङ्कित करके दिखाओ कि दोनों चित्र इस सीमा के मध्य में काटते हैं ।

13. $\frac{2x+7}{3}$ व्यंजक का लेखाचित्र अङ्कित करो और उसकी सहायता से बताओ कि $x=4$ होने पर व्यंजक का मान क्या होगा । साथ ही यह भी बताओ कि x के किस मान से उसका मान शून्य होगा ।

14. x का मान 0 और 5 होने पर एक फल (Function) $2x$ के समान होता है । x का मान 5 और 10 के बीच में होने पर वह $10-x$ के समान होता है और x का मान 10 और 15 के बीच में होने

पर वह $2x-10$ के समान होता है। छोटे वर्ग को इकाई मानकर फल को लेखाचित्र द्वारा दिखाओ।

[पूर्ण लेखाचित्र तीन सरल रेखाओं का योग है।]

15. निम्नलिखित समीकरणों के लेखाचित्र से दोनों अक्षों का अवच्छेद (Intercept) निकालो :—

(i) $\frac{x}{4}-\frac{y}{12}=6$; (ii) $\frac{x}{7}+\frac{y}{9}=-\frac{1}{6}$;

(iii) $y=\frac{9x-12}{4}$; (iv) $y=\frac{8-3x}{6}$.

16. एक ही चित्र में निम्नलिखित समीकरण-समूह का लेखाचित्र अङ्कित करो और घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल बताओ :—

$x=3,\ y=5,\qquad x=-2,\ y=-8.$

17. निम्नलिखित समीकरणों के लेखाचित्र से घिरे हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो :—

$x-2=0,\ y-1=0$ और $2x+3y=6$.

18. निम्नलिखित प्रत्येक विन्दु के जोड़ों से होकर खींची गई सरल रेखा के समीकरण निकालो :—

(i) $(0, 3), (5, 0)$; (ii) $(1, 2), (-3, 4)$;

(iii) $(-6, 8), (5, -9)$.

19. सिद्ध करो कि $(3, -1)$, $(-2, 4)$, $(5, -3)$ ये तीनों विन्दु एक ही सरल रेखा पर हैं। उस सरल रेखा का समीकरण निकालो।

20. $4-2x$ और $13-8x$ इन दोनों फलों का लेखाचित्र खींचो और उनसे $x=0, x=1$; $x=1, x=2$; $x=2, x=3$ और $x=3, x=4$ के मध्य में उनके मान का परिवर्त्तन दिखाओ। इसमें से x का ऐसा मान निकालो जिससे $4-2x=13-8x$ समीकरण सिद्ध हो।

[संकेत—इन दोनों लेखाचित्रों का छेद विन्दु का भुज ही निर्णेय मान है।]

281. विभिन्न इकाइयों का प्रयोग।

अङ्कित करने की सुविधा के लिए यहाँ एक एक ही इकाई से भुज और कोटि की नाप की गई है। परन्तु एक ही इकाई न मानने से भी काम चल

सकता है और प्रायः एक ही इकाई मानना सुविधाजनक भी नहीं होता। जिन विन्दुओं के दोनों भुज-कोटि का अन्तर बहुत अधिक होता है उनके भुज और कोटि एक ही इकाई में नापने से लेखाचित्र बहुत बड़ा और बेतुका हो जाता है। इसलिए भिन्न भिन्न इकाइयों में उसका नापना ही सुविधाजनक है। बड़े भुजकोटि को नापने के लिए छोटी इकाई मानना ठीक है।

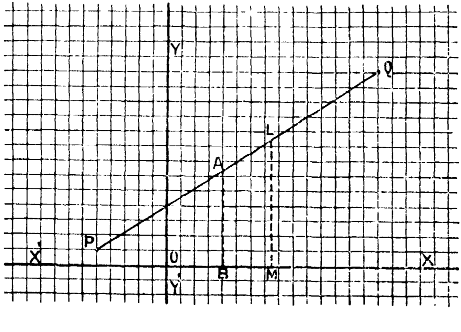
उदाहरण। $y = 15x+20$ का लेखाचित्र अङ्कित करो।

x और y के निम्नलिखित मान-समूह से यह समीकरण सिद्ध होता है:—

$x = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y = 5, 20, 35, 50, 65, 80, \ldots\ldots\ldots\ldots$

यहाँ यह ज्ञात हो रहा है कि x की अपेक्षा y का मान अधिक तेज़ी से बढ़ रहा है। एक ही इकाई से दोनों भुज-कोटि को नापने से लेखाचित्र का आकार बहुत बड़ा हो जायगा। इसलिए कोटि की अपेक्षा भुज की इकाई बड़ी ली गई है। छोटे वर्ग के 5 बाहु की लम्बाई को भुज की इकाई और 1 बाहु को कोटि की 5 इकाई के समान मानकर विन्दु अङ्कित किये गये हैं। अङ्कित विन्दुओं को एक अविच्छिन्न रेखा से मिलाने पर निर्णय लेखाचित्र पाया जायगा। चित्र में PQ सरल रेखा से लेखाचित्र सूचित हो रहा है।



टीका । दो चल राशियों में से एक दूसरी की अपेक्षा अधिक तेज़ी से बढ़ती ही है। जो अधिक तेज़ी से बढ़ती है उसके परिमाण के लिए दूसरी की अपेक्षा छोटी इकाई मानना होता है।

282. प्रक्षेपण (Interpolation).

किसी लेखाचित्र से उस पर स्थित किसी विन्दु का भुज कोटि निकाला जाता है अथवा एक विन्दु का भुज-कोटि दिया हुआ होने पर दूसरा भुज-कोटि निकाला जाता है। इस प्रकार साधारणतः निकटतम (Approximate) फल ही पाया जाता है। इस प्रकार भुज-कोटि निकालने की प्रणाली को ही प्रक्षेपण कहते हैं।

उदाहरण । $15x+20$ फल के लेखाचित्र से $x=1\cdot5$ होने पर उक्त फल का मान बताओ और x का मान कितना होने पर फल का मान 32 होगा, यह भी बताओ।

पूर्व अनुच्छेद में $15x+20$ का लेखाचित्र खींचा गया है।

इस लेखाचित्र में स्थित L विन्दु पर $x=1\cdot5$ इस विन्दु से LM कोटि अङ्कित करने पर ज्ञात होगा कि LM छोटे वर्ग के $8\cdot5$ वाहु की लम्बाई के समान है किन्तु छोटे वर्ग को एक वाहु कोटि की 5 इकाइयों के समान है।

$\therefore$ $LM=8\cdot5\times5=42\cdot5$ इकाइयाँ, और फल का निर्णय मान $=42\cdot5$.

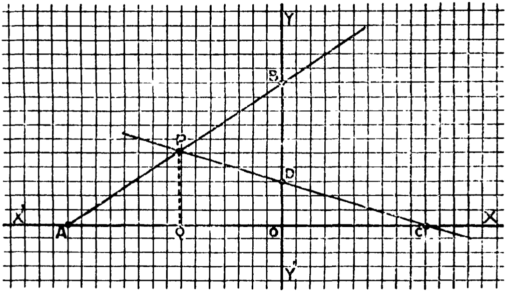
फिर लेखाचित्र में स्थित A विन्दु पर $y=32$ और $x=OB$. किन्तु $OB=$ छोटे वर्ग के 4 वाहु की लम्बाई $=\frac{4}{5}$ इकाई। $\therefore$ $x=\cdot8$.

283. लेखाचित्र द्वारा समीकरणों को हल करना।

एक अव्यक्त राशि के एकघातवाले समीकरण लेखाचित्र द्वारा बड़ी सरलतापूर्वक हल किये जा सकते हैं। इस समीकरण के दोनों पक्षों के लेखाचित्र खींच करके दोनों चित्रों का छेदविन्दु निकालना होता है। इस विन्दु का भुज ही निर्णेय मूल होता है।

उदाहरण 1. $\frac{2x+5}{3}=\frac{5-3x}{10}$ समीकरण को लेखाचित्र द्वारा हल करो।

जब हम इस समीकरण को लेखाचित्र द्वारा हल करने लगते हैं, तब $\frac{2x+5}{3}$ और $\frac{5-3x}{10}$ दोनों व्यंजकों का लेखाचित्र खींचते हैं और उनके छेदविन्दु का भुज निकालते हैं।



छोटे वर्ग की 6 वाहुओं की लम्बाई को इकाई मानकर $y=\frac{2x+5}{3}$ और $y=\frac{5-3x}{10}$ के लेखाचित्र क्रमशः AB और CD अङ्कित करो। उनके छेदविन्दु P का भुज $=-OQ=-7\cdot2$. छोटे वर्गों का मूल $=\frac{6}{5}$ इकाइयाँ $=1\cdot2$ (मोटे तौर से)।

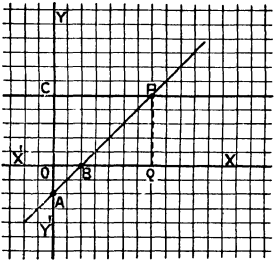
$\therefore$ निर्णेय मूल $=-1\cdot2$ (मोटे तौर से)।

उदाहरण 2. $x-2=5$ समीकरण को लेखाचित्र द्वारा हल करो।

छोटे वर्ग की एक वाहु को इकाई मानकर $y=x-2$ और $y=5$ समीकरणों का लेखाचित्र खींचो। चित्र में पहला लेखाचित्र AB, y और x-अक्ष रेखाओं को क्रमशः A और B विन्दु पर काटता है। यहाँ OA=OB

=2 इकाइयाँ । दूसरे समीकरण का लेखाचित्र CP, x-अक्ष रेखा के समानान्तर और y-अक्ष रेखा को मूल-विन्दु से 5 इकाई की दूरी पर धन दिशा की ओर काटता है ।

दोनों लेखाचित्र एक दूसरे को P विन्दु पर काटते हैं। P का भुज $=OQ=$ छोटे वर्ग की 7 वाहु $=7$ इकाइयाँ ।



$\therefore \quad x=7$, निर्णेय मूल ।

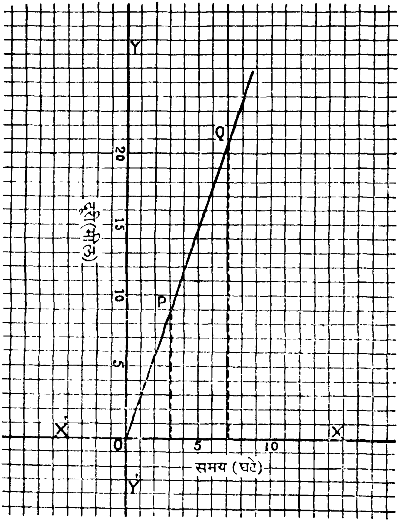
टीका—$ax+b=0$ आकार के समीकरण को हल करते समय $y=ax+b$ समीकरण का लेखाचित्र जिस विन्दु पर x-अक्ष को काटता है उसी का भुज निकालना पड़ता है ।

284. लेखाचित्र का प्रयोग ।

यह पहले ही कहा जा चुका है कि बीजीय व्यंजक को रेखाचित्र में प्रकट करने के लिए और गणितशास्त्र के भिन्न-भिन्न विषयों को भिन्न प्रकार से प्रकट करने के लिए लेखाचित्र का प्रयोग कैसे किया जाता है । व्यावहारिक क्षेत्र में तेज़ी से गणना करने के लिए लेखाचित्र विशेष उपयोगी होता है । समाचार पत्रों आदि में ताप के परिवर्त्तन, वायु के भार, वर्षा की नाप, अनाज के भाव की घटती बढ़ती आदि के सम्बन्ध के बहुत प्रकार के लेखा-

चित्र बहुधा प्रकाशित होते हैं। इसी प्रकार दैनिक जीवन में भी उसके तरह-तरह के उपयोग देखने में आते।

उदाहरण 1. एक आदमी घंटा में 3 मील चलता है। एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे प्रत्येक विन्दु की भुज और कोटि से उस मनुष्य की चाल और समय का परस्पर सम्बन्ध सूचित हो।



छोटे वर्ग की बाहु को इकाई मानकर x-अक्ष के ऊपर समय और y-अक्ष के ऊपर उसके अनुरूप (Corresponding) दूरी का परिमाण अङ्कित करो। कल्पना करो कि समय की इकाई एक घंटा और दूरी की इकाई एक मील छोटे वर्ग के एक बाहु के द्वारा सूचित होती है।

वह आदमी घंटे में 3 मील चलता है; इसलिए 3 घंटे में 9 मील जायगा।

इसलिए P (8, 9) बिन्दु अङ्कित करने पर ज्ञात होगा कि यह निर्णय लेखाचित्र के ऊपर स्थित होगा। यात्रा करने से पहले समय और दूरी दोनों ही शून्य थे।

$\therefore$ मूल बिन्दु भी लेखाचित्र के ऊपर स्थित है।

गति का वेग एकसा (Uniform) होने के कारण वह लेखा सरल रेखा (OP) और उस पर स्थिति किसी भी बिन्दु की भुज और कोटि से समय और उस समय में तय की गई दूरी को क्रम से सूचित करता है।

जैसे, इस सरल रेखा में एक बिन्दु Q लो। लेखाचित्र से ज्ञात होता है कि उसके भुज और कोटि क्रमशः 7 और 21 हैं; इसलिए 7 के द्वारा समय और 21 के द्वारा दूरी का बोध होता है।

टीका 1—यदि वह आदमी x घं० में y मी० चले तो उसकी गति का औसत $\frac{y}{x}$ मी० $=3$ मी० होगा। $\therefore$ $y=3x$, और यही लेखाचित्र का समीकरण है।

टीका 2—यह उस आदमी का गति बतलानेवाला लेखाचित्र (Motion Graph) कहलाता है। इसकी सहायता से किसी निर्दिष्ट समय में वह आदमी कितनी दूर जा सकेगा या कोई निर्दिष्ट दूरी तय करने में उसे कितना समय लगेगा, यह निकाला जाता है। पहले में दिये हुए समय को भुज मानने पर कोटि कितनी होगी और दूसरी बार निर्दिष्ट दूरी को कोटि मानने पर भुज कितना होगा यही निकालना होता है।

उदाहरण 2. यदि 1 इंच 2·5 सेंटीमीटर (Centimeter) के समान हो, तो x इंच के कितने सेंटीमीटर होंगे? इस संख्या को y द्वारा सूचित करने से x और y का पारस्परिक सम्बन्ध बताओ। एक ऐसा लेखाचित्र तय्यार करो जिसके द्वारा इंच को सेंटीमीटर में परिवर्त्तित किया जा सके। उस लेखाचित्र से यह निकालो कि 8 इंच कितने सेंटीमीटर के समान होगा?

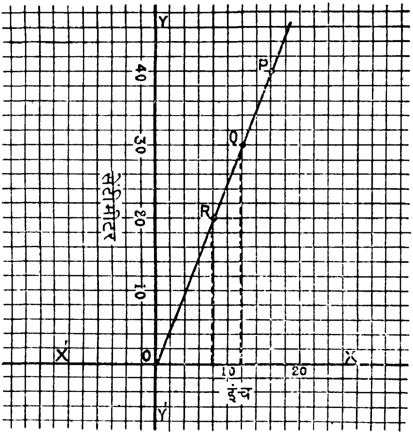
1 इंच $=2\cdot5$ सेंटीमीटर; $\therefore$ x इंच $=2\cdot5x$ सेंटीमीटर।

अतएव $y=2\cdot5x$, यही x और y का पारस्परिक सम्बन्ध है.........(1)

यहाँ x के द्वारा इंचों की संख्या और y के द्वारा उनके समान (Equivalent) सेंटीमीटर की संख्या सूचित हो रही है।

छोटे वर्ग के एक बाहु को 2 इकाई मानने पर x-अक्ष के द्वारा इंच और y-अक्ष द्वारा सेंटीमीटर को नापो। समीकरण (1) से ज्ञात होता है कि $x=0$ होने पर $y=0$, और $x=16$ होने पर $y=40$;

$\therefore$ निर्णेय लेखाचित्र मूल-विन्दु और P (16, 40) विन्दु से होकर जाता है। अतएव PO सरल रेखा ही निर्णेय लेखाचित्र है।

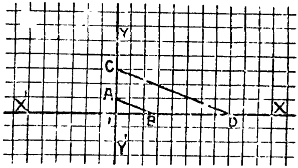


इस लेखाचित्र पर कोई विन्दु Q लो। उसका भुज-कोटि (12, 30) है; अतएव 12 इंच $=$ 30 सेंटीमीटर।

इसलिए इस लेखाचित्र को सहायता से इंच को सेंटीमीटर में और सेंटीमीटर को इंच में परिवर्तित किया जाता है।

लेखाचित्र से ज्ञात होता है कि R विन्दु का भुज 8 इकाई और कोटि 20 इकाई है। अतएव 8 इंच $=$ 20 सेंटीमीटर।

उदाहरण 3. वर्गाङ्कित काग़ज़ की सहायता से 2·5 और 3·2 का गुणनफल निकालो।



छोटे वर्ग की एक बाहु को इकाई मानकर x-अक्ष पर OB $= 2·5$, और y-अक्ष पर OC $= 3·2$ काट लो। AB को मिलाओ और C से होती हुई AB के समानान्तर CD सरल रेखा खींचो। यही क्षैतिज (Horizontal) रेखा OX को D विन्दु पर काटती है।

अब OAB और OCD त्रिभुजों में,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}, \text{ या, } OB \times OC = OA \times OD,$$

$$\text{या, } 2·5 \times 3·2 = 1 \times OD = OD,$$

∴ निर्णेय गुणनफल OD द्वारा सूचित होता है। गणना द्वारा ज्ञात होता है कि OD = छोटे वर्ग की 8 बाहु = 8 इकाइयाँ।

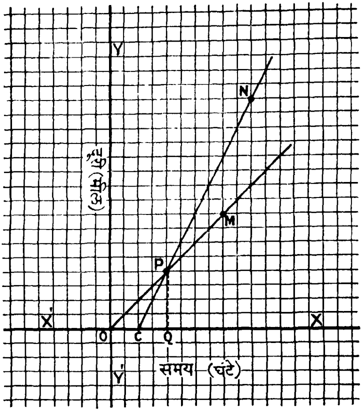
∴ निर्णेय गुणनफल 8.

उदाहरण 4. A ने 4 मील प्रति घण्टा की चाल से चलना आरम्भ किया; 15 मिनट के बाद B ने 8 मील प्रति घण्टा की चाल से चलना आरम्भ किया। लेखाचित्र की सहायता से यह बतलाओ कि कब और कहाँ A और B एक दूसरे से मिलेंगे।

x-अक्ष पर छोटे वर्ग के बाहु की 8 गुनी लम्बाई से 1 घण्टा (समय की इकाई) और y-अक्ष पर छोटे वर्ग के बाहु की दुगनी लम्बाई से 1 मील (दूरी की इकाई) नापो।

M विन्दु की भुज द्वारा 1 घण्टा और कोटि के द्वारा 4 मील सूचित होगा। अतएव उदाहरण 1 की तरह OM सरल रेखा A की चाल का लेखाचित्र है।

OX के ऊपर C एक ऐसा विन्दु लो जिससे कि CO के द्वारा 15 मि० अर्थात् 1 घण्टा का एक चौथाई समय मालूम हो। अतएव C विन्दु उस स्थान को सूचित करता है जहाँ से B ने चलना आरम्भ किया।



अब मान लो कि N विन्दु के भुज से (B के यात्राकाल से गणना आरम्भ करके) 1 घण्टा का समय और कोटि से 8 मील की दूरी सूचित होती है। अतएव CN सरल रेखा B की चाल का लेखाचित्र है।

उक्त दोनों लेखाचित्र एक दूसरे को P विन्दु पर काटते हैं। अतएव A और B कब और कहाँ मिलेंगे, यह बात क्रमशः P विन्दु की भुज और कोटि से मालूम होगा।

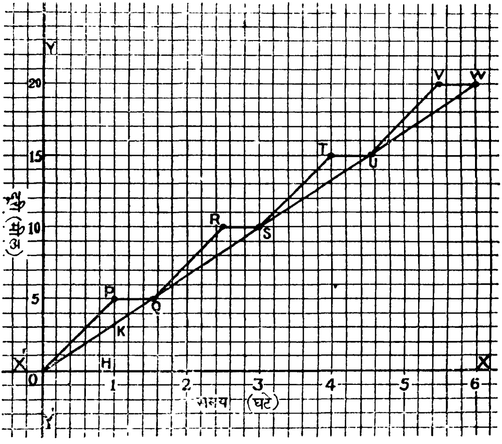
P का भुज OQ = छोटे वर्ग के वाहु का 4 गुना
= A के चलने के $\frac{1}{2}$ घं० बाद।

और P विन्दु की कोटि PQ = छोटे वर्ग के वाहु का 4 गुना
= यात्रास्थान से 2 मील पर।

इसलिए A के चलने के $\frac{1}{2}$ घं० बाद और यात्रास्थान से दो मील की दूरी पर A और B की मुलाक़ात होगी।

उदाहरण 5. A घण्टे में 5 मील चलता है और प्रत्येक 5 मील चलने के बाद $\frac{1}{2}$ घण्टा आराम करता है। B भी उसी समय चलकर एक चाल से (at a uniform rate) आराम न करके चलता जाता है और A जब चौथी बार आराम करके चलने लगता है, तब B उसे पकड़ लेता है। लेखाचित्र द्वारा B की चाल का औसत दिखाओ।

OX पर छोटे वर्ग के वाहु की 5 गुनी लम्बाई को समय की इकाई (1 घण्टा) और OY पर छोटे वर्ग के वाहु की लम्बाई को एक मील मानकर नापो।



P विन्दु की भुज के द्वारा 1 घं० और कोटि के द्वारा 5 मी० सूचित होने पर पहले घंटा में A की गति बतलाने वाला लेखाचित्र OP द्वारा विदित होगा। A के पहली बार $\frac{1}{2}$ घंटा के विश्राम के समय का लेखाचित्र OX और उसके समानान्तर PQ रेखा से विदित होगा। इसी प्रकार एक के बाद एक करके एक घंटा और आधा घंटा के लेखाचित्र क्रमशः QR RS,

ST, TU, UV, और VW रेखाओं से मालूम होगा। चौथी बार विश्राम करने के बाद A ठीक W विन्दु से यात्रा आरम्भ करेगा। किन्तु B, O विन्दु से एक चाल से चलता हुआ A को W विन्दु पर पकड़ेगा। अतएव OW सरल रेखा ही B की गति बतलाने वाला लेखाचित्र है। अब W के भुज के द्वारा 6 घंटा और कोटि के द्वारा 20 मी० सूचित होता है। अतएव यात्रा स्थान से 20 मी० की दूरी पर यात्राकाल से 6 घं० बाद B ने A को पकड़ लिया।

B की चाल का औसत निकालने के लिए OX पर H एक ऐसा विन्दु लो जिससे OH द्वारा एक घंटे का समय सूचित हो। कोटि HK अङ्कित करो और मान लो कि यह OW को K विन्दु पर काटता है। उस अवस्था में B द्वारा तय की हुई घंटे भर की दूरी HK से सूचित होगी। लेखाचित्र से ज्ञात होता है कि HK = लगभग $3\frac{1}{3}$ मी०।

$\therefore$ B की चाल = $3\frac{1}{3}$ मी० प्रति घंटा।

285. वक्र रेखा का लेखाचित्र।

यहाँ तक एकघात वाले सरल समीकरण के लेखाचित्र खींचने की प्रणाली पर विचार किया गया है।

इस प्रक्रिया का प्रयोग साधारण (General) फल के पूर्णतः एकघात न होने पर भी किया जाता है। ऐसी दशाओं में लेखाचित्र एक वक्र रेखा (Curve) होगी और उसका आकार फल पर निर्भर रहेगा। इन सारे लेखाचित्रों के अङ्कित करने की साधारण प्रक्रिया का विवरण इस पुस्तक का आलोच्य विषय नहीं है। अगले अध्याय में केवल द्विघात अथवा वर्ग समीकरण के लेखाचित्र अङ्कित करने की प्रणाली ही पर विचार किया जायगा।

286. आँकड़ों (Statistics) का लेखाचित्र।

बहुत से ऐसे प्रश्न होते हैं जिनमें दो चल राशियों में किसी प्रकार के सम्बन्ध का निर्णय नहीं किया जा सकता। केवल कुछ अनुरूप मान दिये

होने के कारण थोड़े से निर्दिष्ट विन्दु अङ्कित किये जा सकते हैं। उस अवस्था में अङ्कित विन्दुओं के पास से एक रेखा इस प्रकार खींची जाती है कि विन्दुओं में से कुछ उक्त रेखा के ऊपर और कुछ नीचे पड़ते हैं। आँकड़ों की चल राशियाँ पर्य्यवेक्षण या परीक्षा द्वारा निर्णीत होती हैं। इसलिए आँकड़ों की गणना के समय इस प्रणाली का अवलम्बन किया जाता है। निर्दिष्ट (data) राशियों में बहुधा अस्पष्टता भी पाई जा सकती है। अतएव अङ्कित विन्दुओं के अवस्थान के ऊपर पूर्ण रूप से निर्भर करने में निर्वाह नहीं है। अधिकतर चल राशियों में कोई गणित सम्बन्धी नाता भी नहीं रहा करता। आँकड़ों के हिसाब आदि में पूरी शुद्धता आवश्यक नहीं होती। इसलिए अङ्कित किये गये विन्दुओं को एक के बाद एक सरल रेखा द्वारा जोड़ने से जो अनियमित भग्नरेखा पाई जाती है उसी को लेखाचित्र के रूप में ग्रहण किया जाता है। किन्तु मध्यवर्त्ती विन्दु के सम्बन्ध में कोई निश्चित विवरण नहीं पाया जाता।

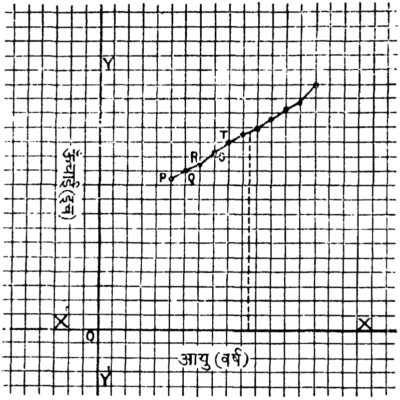
उदाहरण 1. नीचे की तालिका में किसी बालक के 5 वर्ष से लेकर 15 वर्ष तक की प्रति वर्ष की ऊँचाई दी गई है। तालिका की सहायता से 5 वर्ष से 15 वर्ष के बीच में किसी भी अवस्था की ऊँचाई का निरूपण करने वाला लेखाचित्र खींचो।

अवस्था (वर्ष)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ऊँचाई (इंच)	42	44	46	49	52	54	56	58	61	63	68

इस लेखाचित्र को खींचने के लिए यह मान लेना होगा कि बालक की ऊँचाई सदा समान रूप से बढ़ती है और चूँकि ऊँचाई कभी कम न होगी, इसलिए लेखाचित्र की रेखा कभी निम्नगामी न होगी।

छोटे वर्ग के एक वाहु की लम्बाई को समय की इकाई (एक वर्ष) मानकर x-अक्ष पर अवस्था दिखाओ और एक वाहु की लम्बाई को 4 इंच के समान मानकर y-अक्ष पर ऊँचाई को नापो। तालिका में पाँचवें वर्ष की ऊँचाई 42 इंच दी गई है। इसलिए लेखाचित्र को P विन्दु से आरम्भ करना होगा क्योंकि उसकी भुज $=5$ इकाइयाँ और कोटि $=42$ इकाइयाँ।

प्रश्न के निर्दिष्ट से 11 विन्दुएँ अङ्कित किये जायँगे और लेखाचित्र



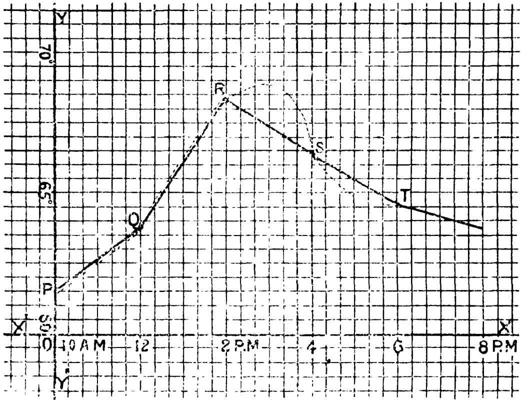
क्रमशः ऊपर को ओर चढ़ेगा। इन विन्दुओं को जोड़ने से PQ, QR, RS, ST आदि रेखायें पाई जायँगी। उनको मिलाने से बनी हुई रेखा ही निर्णेय लेखाचित्र होगा।

उक्त लेखाचित्र से बालक के 5 से लेकर 15 वर्ष के बीच की किसी भी अवस्था की ऊँचाई के सम्बन्ध में सारी बातें ज्ञात की जासकती हैं। जैसे, लेखा से ज्ञात होता है कि $10\frac{1}{2}$ वर्ष की अवस्था में बालक की ऊँचाई 55 इंच होगी।

उदाहरण 2. सवेरे 10 बजे से लेकर प्रत्येक 2 घण्टे के अन्तर पर किसी तापमापकयंत्र में ताप का परिमाण क्रमशः $61^\circ\cdot5$, $63^\circ\cdot8$, $68^\circ\cdot4$, $66^\circ\cdot3$, $64^\circ\cdot6$ सूचित हुआ। ताप का परिवर्त्तन-प्रकाशक एक लेखाचित्र खींचो।

x-अक्ष पर छोटे वर्ग के तीन वाहु की लम्बाई के द्वारा समय की इकाई (एक घण्टा) और y-अक्ष पर छोटे वर्ग के दो वाहु की लम्बाई द्वारा ताप की एक डिग्री सूचित करो। 10 बजे से पहले का कोई समय निर्दिष्ट करना

आवश्यक नहीं है। इसलिए मूलविन्दु पर समय का चिह्न 10 रखो। इसी प्रकार 60° के नीचे कोई ताप सूचित नहीं करता है; इसलिए मूलविन्दु पर 60° चिह्नित करो ! अब तालिका के अनुसार विन्दुओं को अङ्कित करके उनको एक सरल रेखा द्वारा जोड़ने से निर्णेय लेखाचित्र PQRST भग्न रेखा के रूप में पाया जाता है।



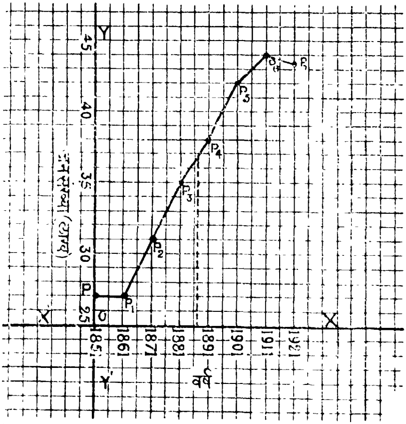
उक्त लेखाचित्र से ज्ञात होता है कि दिन में 2 बजे ताप में एकाएक परिवर्त्तन होगया किन्तु यह हमारी साधारण अभिज्ञता के विपरीत है। 2 बजे से लेकर 4 बजे तक के भीतर किसी समय भी ताप का परिमाण सब से अधिक होना ही अधिक सम्भव है। अङ्कित R विन्दु में सर्वोच्च होना सम्भव नहीं है। यदि किसी उपाय से प्रतिमुहूर्त का ताप लिखा जा सके तो मालूम होगा कि ताप प्रकाशक लेखाचित्र उक्त P, Q, R, S... विन्दुओं को मिलाने वाली एक अविच्छिन्न तरङ्गाकार रेखा (Undulating Curve) है। इस लेखाचित्र से विदित होगा कि 3 बजे के थोड़ी देर बाद सर्वोच्च ताप सूचित हो रहा है और 6 बजे से 8 बजे के बीच ताप का क्रमिक परिवर्त्तन हो रहा है।

उदाहरण 3. किसी देश की वार्षिक जन-संख्या नीचे दी गई है:—

वर्ष	1851	1861	1871	1881	1891	1901	1911	1921
जन संख्या(लाख)	27	27	31	35	38	42	44	43·5

एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे सन् 1851 से सन् 1921 तक के लिए किसी भी समय की जन-संख्या मालूम हो सके।

1851 को मूलविन्दु O द्वारा सूचित करके OX पर छोटे वर्ग के एक वाहु की लम्बाई को 5 वर्ष और 25 लाख को मूलविन्दु से सूचित करके उक्त लम्बाई को 1 लाख के समान मानकर OY पर जन-संख्या दिखाओ। OY के ऊपर एक ऐसा विन्दु P लो कि OP की लम्बाई 27 लाख सूचित करे। 1851 की जन-संख्या P विन्दु द्वारा सूचित हो रही है। इसलिए P निर्णय लेखाचित्र के ऊपर स्थित एक विन्दु है।



यहाँ यह मान लिया गया है कि प्रत्येक वर्ष जन-संख्या समान रूप से बढ़ती है।

अब P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 विन्दुओं को अङ्कित करो और उनको सरल रेखा द्वारा क्रम से मिलाओ तो $P\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5\,P_6\,P_7$ भग्नरेखा पाई जायगी। यही निर्णय लेखाचित्र है।

चित्र से ज्ञात होता है कि 1851 से 1861 तक जन-संख्या में वृद्धि नहीं हुई। इसलिए PP_1 सरल रेखा OX के समानान्तर है। फिर 1911 से 1921 के बीच जन-संख्या घट गई है। इस लेखाचित्र की सहायता से 1851 से 1921 के बीच किसी भी वर्ष की जन-संख्या सरलतापूर्वक निकाली जा सकती है। जैसे चित्र से ज्ञात होता है कि सन् 1887 को जन-संख्या प्रायः 36·8 लाख थी।

प्रश्नावली 102.

1. निम्नलिखित समीकरणों के लेखाचित्र खींचो:—

   (*i*) $y=40x+3$; (*ii*) $y=-25x+33$;

   (*iii*) $35y=x-8$; (*iv*) $-15y=2x+32$.

2. निम्नलिखित फलों के लेखाचित्र अङ्कित करो और $x=2$ होने से उनका मान लेखाचित्र द्वारा निकालो:—

   (*i*) $30x+9$; (*ii*) $\dfrac{3x+38}{6}$; (*iii*) $\dfrac{x-29}{36}$.

3. $\dfrac{26-3x}{5}$ व्यंजक का लेखाचित्र खींचो और बताओ कि $x=2\cdot4$ होने पर व्यंजक का मान कितना होगा? लेखाचित्र द्वारा यह भी निकालो कि x का मान कितना होने पर व्यंजक का मान $2\cdot5$ होगा?

4. $\dfrac{3x-5}{2}$ और $8-\frac{2}{3}x$ के लेखाचित्र खींचो और दिखाओ कि वे एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। x का मान कितना होने पर $\dfrac{3x-5}{2}$ और $8-\frac{2}{3}x$ का मान समान होगा?

5. $y=x$ और $y=2x+1$ के लेखाचित्र अङ्कित करके उनका छेदविन्दु निर्धारित करो।

6. $7x+5$ फल का लेखाचित्र खींचो और लेखाचित्र द्वारा उसका मान निर्धारित करो जबकि $x=1\cdot5$ हो। x का निकटतम मान कितना होने पर फल का मान 23 होगा ?

7. सिद्ध करो कि $y+2x=0$, $y-3x+5=0$ और $4y+5x+3=0$ समीकरणों के लेखाचित्र एक दूसरे को एक ही विन्दु पर काटते हैं।

8. $x=1$ से $x=4$ तक $2x+y=5$ और $x+2y=4$ के लेखाचित्र खींचकर उनके छेदविन्दु का भुज-कोटि निर्णय करो।

9. लेखाचित्र द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल करो:—

(i) $3x-4=\frac{11-5x}{3}$, (ii) $10-4x=\frac{3x-17}{4}$;

(iii) $6x+5=0$; (iv) $\frac{5x-2}{5}=\frac{6x}{7}-1$.

10. एक त्रिभुज के वाहुओं के समीकरण $x+y=3$, $x-y=5$ और $\frac{x}{10}+\frac{y}{7}=1$ हैं। उस त्रिभुज को खींचो और उसके शीर्ष विन्दुओं के भुज-कोटि का निकटतम मान निकालो।

11. $\frac{6x+7}{2}$ का लेखाचित्र खींचो और $x=1\cdot5$ होने पर व्यंजक का मान बताओ। x का मान कितना होने से व्यंजक का मान $6\cdot5$ होगा ?

12. 35 गज़ की लम्बाई साधारण तौर से 32 मीटर के समान हो, तो गज़ को मीटर में परिवर्त्तन करने का एक लेखाचित्र तैयार करो। सिद्ध करो कि $22\cdot2$ गज़ साधारणतः $20\cdot3$ मीटर के समान है।

13. एक आदमी 50 दिन में 640 रु० व्यय करता है। एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे उसके किसी भी समय का व्यय मालूम हो सके। उस लेखाचित्र से उसका 35 दिन का व्यय निकालो।

14. एक शिलिंग $=\frac{3}{4}$ रु०। एक ऐसा चित्र खींचो जिससे इन दोनों सिक्कों का सम्बन्ध प्रकट हो सके। इस लेखाचित्र से यह निकालो कि 15 शि० में कितने रुपये होंगे ?

15. किसी परीक्षा का सबसे अधिक नम्बर 125 है। लेखाचित्र द्वारा इनको इस प्रकार घटाकर दिखाओ कि सबसे अधिक नम्बर 100 हो। इस चित्र द्वारा यह भी बताओ कि उन विद्यार्थियों को कितने नम्बर घटने पर मिलेंगे जिन्होंने पहले (i) 100 और (ii) 60 पाये थे।

[विद्यार्थियों के पाये हुए नम्बरों को x द्वारा और घटने पर पाये गये नम्बरों को y द्वारा सूचित करो।]

16. 20 लिटर $=4 \cdot 4$ गैलन। एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे लिटर को गैलन में और गैलन को लिटर में परिवर्त्तित किया जा सके। $3 \cdot 2$ गैलन को लिटर में और $18 \cdot 5$ लिटर को गैलन में परिवर्त्तित करो।

17. किसी पुस्तक की प्रथम 100 प्रतियों की छपाई का व्यय 25 रु० है किन्तु उसके बाद प्रत्येक 100 प्रति की छपाई की दर प्रति सैकड़ा 4 रु० है। 600 तक की किसी भी संख्या की पुस्तकों की छपाई का व्यय-प्रकाशक एक लेखाचित्र खींचो और उससे 340 पुस्तकों की छपाई का व्यय निकालो।

18. यदि 250 रु० एक वर्ष का वेतन हो, तो एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे किसी भी समय के लिए वेतन निकल सके। इस लेखाचित्र से 1 सप्ताह, 25 दिन और 158 दिन का वेतन निकालो। यह भी निकालो कि यदि किसी व्यक्ति को 50 रु० वेतन मिला हो, तो उसने कितने दिन काम किया था।

19. मान लो कि कुछ चीज़ें 20 प्रति सैकड़ा लाभ से बेची गईं। एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे क्रय विक्रय मूल्य का सम्बन्ध प्रकट हो सके। इस लेखाचित्र से उन चीज़ों में से एक चीज़ का क्रय मूल्य निकालो जिसका विक्रय मूल्य 12 रु० 8 आ० है और उसका विक्रय मूल्य निकालो जिसका क्रय मूल्य 5 रु० 6 आ० 8 पा० है।

20. राम और हरी एक दूसरे से मुलाक़ात करने के लिए 9 बजे 30 मील की दूरी के दो स्थानों से चले। यदि राम प्रति घंटा 4 मील और

हरी प्रति घंटा 3 मील की चाल से चले तो बताओ वे दोनों कब और कहाँ मिलेंगे? इसको लेखाचित्र द्वारा दिखाओ।

21. एक बन्दर 10 फ़ुट लम्बे एक चिकने लट्ठे पर चढ़ने लगा। वह 1 सेकण्ड में 3 फ़ुट चढ़ता है किन्तु दूसरे सेकण्ड में 1 फ़ुट फ़िसल आता है। बताओ लट्ठे के सिरे पर पहुँचने में उसे कितना समय लगेगा। उत्तर लेखाचित्र द्वारा निकालो।

[x द्वारा समय और y द्वारा लट्ठे की ऊँचाई सूचित करो। लेखाचित्र एक भग्न-रेखा होगी और आठवें सेकण्ड के बाद उसकी गति सम होगी।]

22. एक आदमी घंटे में $3\frac{1}{2}$ मी० की चाल से 4 घंटे चलने के बाद $\frac{3}{4}$ घंटा आराम करता है और उसके बाद 3 मी० प्रति घंटा की चाल से चलने लगता है। उसकी गति बतलाने वाला लेखाचित्र खींचो।

23. एक परीक्षा में सबसे अधिक और सबसे कम नम्बर क्रम से 175 और 15 हैं। लेखाचित्र द्वारा यह दिखाओ कि किस प्रकार सबसे अधिक नम्बर घटाकर 125 और सबसे कम नम्बर घटाकर 30 किया जा सकता है। यदि किसी परीक्षार्थी ने पहले 105 नम्बर प्राप्त किया था, तो उसका परिवर्त्तित नम्बर कितना होगा और परिवर्त्तित नम्बर यदि 65 हो तो बताओ पहले उसका नम्बर कितना था यह भी लेखाचित्र द्वारा दिखाओ।

[पहले प्राप्त किया हुआ नम्बर x द्वारा और परिवर्तित नम्बर y द्वारा सूचित करो। उसका लेखाचित्र PQ (एक सरल रेखा) होगी; P और Q के भुज-कोटि क्रमशः (45, 30) और (175, 125) होंगे।]

24. 2 और 3 बजे के बीच में किस समय घड़ी की दोनों सूइयाँ एक साथ होंगी लेखाचित्र द्वारा निकालो।

[मिनट को x द्वारा और 12 बजे जहाँ पर सूई रहती हैं वहाँ से लेकर प्रत्येक सूई की कोण-सम्बन्धी दूरी y द्वारा सूचित करो।]

25. प्रति सैकड़ा 4 रु० की दर से 150 रु० ब्याज पर दिया गया। 15 वर्ष तक किसी वर्ष के अन्त के कुल रुपयों की संख्या निकालने वाला एक उपयोगी लेखाचित्र तय्यार करो।

26. किसी बालिका की 5 वर्ष से लेकर 15 वर्ष के भीतर के शरीर की ऊँचाई की सूची निम्नलिखित ढंग से इंचों में दिखाओ।

अवस्था	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ऊँचाई	42	44	45	48	50	52	54	58	60	63	65

इस लेखाचित्र से यह बताओ कि इस समय के बीच कब उसकी ऊँचाई सबसे अधिक बढ़ी है ?

27. वर्ष के भिन्न भिन्न महीनों का औसत ताप नीचे फ़ारेनहाइट डिग्री में दिया गया है:—

ज०	फ़०	मा०	अ०	म०	जू०	जु०	अग०	सि०	अक्तू.	नो०	दि०
39	39	42	47	53	59	63	62	57	50	44	40

वर्ष के किस मास का तापक्रम सबसे अधिक तेज़ी से (*i*) घटता है (*ii*) बढ़ता है ?

28. एक क्लर्क का वेतन प्रतिवर्ष एक निश्चित क्रम से बढ़ता है। 6 वर्ष काम करने के बाद उसका वेतन 125 रु० और 15 वर्ष काम करने के बाद 200 रु० हुआ। इसको लेखाचित्र द्वारा दिखाओ और उससे (1) उसका सबसे पहले का वेतन और (2) बीस वर्ष बाद का वेतन दिखाओ।

29. ताप में निम्नलिखित परिवर्त्तन को प्रकट करनेवाला एक लेखाचित्र खींचो:—

समय	बारह बजे	2 बजे	4 बजे	6 बजे	8 बजे रात	10 बजे रात	बारह बजे रात
ताप	33°	42°	34°	30°	22°	$-8°$	$-8°$

बताओ कब ताप 36° से अधिक था ?

30. नीचे सन् 1928 के अगस्त मास के कुछ दिनों के लिए भारमापक यंत्र के भार-निर्देशक चिह्नों की ऊँचाई दी गई है:—

5वीं	7वीं	8वीं	9वीं	11वीं	12वीं	13वीं	15वीं
30·1	29·5	29·5	29·6	29·8	30·0	29·8	29·4

एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे ये सारे परिवर्त्तन सूचित हो सकें। बताओ 6वीं, 10वीं, और 14वीं तारीख को भार की ऊँचाई इस लेखाचित्र की सहायता से क्यों नहीं निकाली जा सकती ?

31. किसी बीमा कम्पनी में भिन्न भिन्न अवस्थाओं के लिए 100 रु० बीमा के प्रीमियम (Premium) की निकटतम दर निम्न प्रकार है:—

अवस्था	20	23	27	30	32	35	40	45
प्रीमियम	1·7	1·8	2·0	2·2	2·3	2·5	2·9	3·5

इन संख्या-समूह का लेखाचित्र खींचो और इस लेखाचित्र से दिखाओ कि 25 और 38 वर्ष की अवस्था के प्रीमियम की दर 20 और 28 वर्ष की अवस्था के प्रीमियम की दर की प्रायः समानुपात है।

32. कलकत्ते की दस वर्ष की वर्षा का परिमाण क्रमशः 47, 47·5, 47·4, 50, 51·3, 48·6, 48·8, 49·2, 49·0 और 48·5 इंच है। वर्षा का वार्षिक औसत 49 इंच है। वर्षा का वार्षिक परिवर्त्तन एक लेखाचित्र द्वारा दिखाओ।

287. लेखाचित्र द्वारा युगपत् समीकरण को हल करना।

इससे पहले बीजीय समीकरण और व्यंजक का लेखाचित्र अङ्कित करने की प्रणाली बतलाई गई है। यह भी देखने में आया है कि (x, y) इन दो अव्यक्त राशियों का एकघात वाले समीकरण का लेखाचित्र एक सरल रेखा होता है जिसके ऊपर स्थित किसी भी विन्दु के भुज-कोटि से वह समीकरण सिद्ध होता है।

अतएव x और y से युक्त दो युगपत् समीकरणों का लेखाचित्र खींचने पर दो सरल रेखायें पाई जायँगी। ये दोनों एक दूसरी को केवल एक विन्दु पर काटेंगी अथवा यह विन्दु दोनों ही लेखाचित्रों पर स्थित है। अतएव इसके भुज-कोटि द्वारा दोनों ही समीकरण सिद्ध होंगे। अतः इस विन्दु के भुज-कोटि दिये हुए दोनों समीकरणों के निर्णय मूल हैं।

इसलिए लेखाचित्र द्वारा दो अव्यक्त राशि के दो युगपत् समीकरणों को हल करते समय,

(1) दिये हुए दोनों समीकरणों के दो लेखाचित्र खींचो।

(2) इन लेखाचित्रों के छेदविन्दु का भुज-कोटि निकालो।

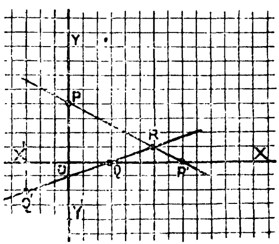
ये ही दिये हुए दोनों समीकरणों के मूल हैं।

टीका—दोनों लेखाचित्रों को एक ही इकाई के अनुसार अङ्कित करना होगा।

उदाहरण 1. लेखाचित्र द्वारा निम्नलिखित दोनों युगपत् समीकरणों को हल करो :—

$x+2y=8$, ...(1) $x-3y=3$, ...(2)

स्पष्ट ही देखने में आता है कि $P(0, 4)$ और $P'(8, 0)$ ये दोनों विन्दुएँ (1) के लेखाचित्र पर वर्त्तमान हैं और $Q(3, 0)$ और $Q'(-3, -2)$ ये दोनों विन्दुएँ (2) के लेखाचित्र पर वर्त्तमान हैं।



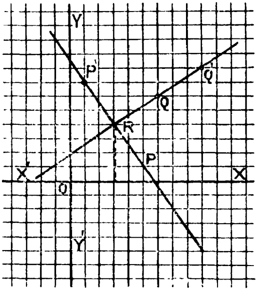
उपयुक्त अक्ष और इकाई चुनकर P, P' और Q, Q' विन्दुओं को अङ्कित करो। PP' सरल रेखा समीकरण (1) का लेखाचित्र है। और QQ' सरल रेखा समीकरण (2) का लेखाचित्र है। समीप वाले चित्र से ज्ञात होता है कि ये दोनों सरल रेखाएँ एक दूसरी को $R(6, 1)$ विन्दु पर काटती हैं।

अतएव निर्णेय मूल $x=6$, $y=1$.

उदाहरण 2. **निम्नलिखित समीकरणों को लेखाचित्र द्वारा हल करो :—**

$$3x = 17 - 2y,\ 3y = 2x + 6.$$

यह देखने में आता है कि $P(5, 1)$ और $P'(1, 7)$ ये दोनों विन्दु पहले समीकरण के लेखाचित्र के ऊपर और $Q(6, 6)$ और $Q'(9, 8)$ ये दोनों विन्दु दूसरे समीकरण के ऊपर हैं ।



उपयुक्त अक्ष और इकाई निर्वाचित करके P, P' और Q, Q' विन्दुओं को अङ्कित करो । $P\,P'$ और $Q\,Q'$ को मिलाने से दोनों सरल रेखाएँ एक दूसरी को R विन्दु पर काटती हैं । इन दोनों रेखाओं पर स्थित R विन्दु का भुज-कोटि $x = 3$, $y = 4$ हैं । अतएव यही निर्णेय मूल है ।

प्रश्नावली 103.

लेखाचित्र द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

1. $4y = 3x,\ 4x - 3y = 7.$
2. $x - 2y + 10 = 0,\ 2x - 3y + 16 = 0$
3. $10x - 4y = 11,\ 3x + 2y = 14\frac{1}{2}.$
4. $2x + y = 11,\ x - 2y = 0.$
5. $2y - 5x = 20,\ 2x - 5y = 16.$
6. $2x - \frac{y-3}{5} = 4,\ 3y + \frac{x-2}{3} = 9.$
7. $\frac{x-y}{3} = \frac{y-1}{4},\ \frac{4x-5y}{7} = x - 7.$
8. $\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1,\ \frac{x}{6} + \frac{y}{5} = \frac{5}{6}.$

9. $x + y = 4$ और $x - y = 2$ समीकरणों के लेखाचित्र खींचो और उनके छेदविन्दु का भुज-कोटि निकालो ।

10. $y-2x+4=0$ समीकरण का लेखाचित्र खींचो और उससे $2x-4=0$ समीकरण का मूल निकालो ।

11. $x+2y=2$ और $y-2x=$ [illegible] इन दोनों समीकरणों का लेखाचित्र खींचो और उनके छेदविन्दु का भुज-कोटि निकालो ।

12. सिद्ध करो कि $3x+4y=14$, $7x-8y=-2$ और $17x+13y=60$ समीकरणों द्वारा सूचित सरल रेखाएँ एक दूसरी को एक विन्दु पर काटती हैं । उनके छेदविन्दु का भुज-कोटि निकालो ।

13. $3x+4y=25$ और $4x-3y=0$ इन दोनों समीकरणों का लेखाचित्र खींचो और उनके छेदविन्दु का भुज-कोटि निकालो ।

—:o:—

पच्चीसवाँ अध्याय

अनुपात (Ratio) और समानुपात (Proportion)

288. अनुपात (Ratio).

जब हम दो सजातीय राशियों की तुलना करने लगते हैं, तो दोनों को उस जाति की किसी एक इकाई में परिवर्त्तित करके हम यही निर्णय करते हैं कि प्राप्त हुई दोनों राशियों में से एक दूसरे का कितना गुना, अथवा कौनसा हिस्सा है । दो सजातीय राशियों में एक का दूसरे के साथ इस प्रकार के सम्बन्ध को अनुपात (Ratio) कहते हैं ।

ऊपर दी हुई परिभाषा से यह स्पष्ट है कि दो सजातीय राशियों का अनुपात भिन्न के रूप में प्रकट किया जा सकता है । एक ही इकाई में परिवर्त्तित पहली राशि की नाप उक्त भिन्न का अंश और दूसरी राशि की नाप उसी का हर होता है । केवल (Abstract) राशि होने पर दोनों राशियों को क्रमशः अंश व हर के रूप में लिया जाता है ।

टीका—(1) 2 गज़ और 2 फ़ीट वाले लकड़ी के दो टुकड़ों की लम्बाई की तुलना करने पर ज्ञात होगा कि 2 गज़ लम्बाई वाला टुकड़ा 2 फ़ीट लम्बाई वाले टुकड़े का 3 गुना है । यहाँ दोनों ही सजातीय राशियाँ हैं ।

अतएव 2 फ़ीट व 2 गज़ का अनुपात $=3$.

(2) 5 रु० व 3 रु० का अनुपात $= \frac{3}{5}$.

(3) 10 मिनट एक घंटा का छठवाँ हिस्सा है; अतएव एक घंटा व 10 मिनट का अनुपात $= \frac{1}{6}$. यहाँ 10 मिनट और 1 घंटा दोनों राशियाँ सजातीय हैं।

स्मरण रहे कि ऊपर दिये हुए प्रत्येक उदाहरण में दोनों राशियाँ सजातीय हैं।

टीका—जिन दो राशियों का अनुपात निकाला जाता है उसकी राशियों की जाति के साथ अनुपात के मान का कुछ भी सम्बन्ध नहीं होता। जैसे, 5 शिलिंग व 3 शिलिंग का अनुपात, 5 रु० व 3 रु० का अनुपात परस्पर समान हैं क्योंकि इनमें से हर एक का मान $\frac{3}{5}$ है। इनमें से प्रत्येक अनुपात एक केवल संख्या है।

a और b एक ही इकाई में प्रकाशित दो सजातीय राशियाँ होने पर b व a का अनुपात अथवा a व b का अनुपात कहने से $\frac{a}{b}$ समझना चाहिए।

'a और b का अनुपात' '$a : b$' इस प्रकार लिखकर प्रकट किया जाता है। अतएव $a : b$ और $\frac{a}{b}$ दोनों एक ही अर्थ में प्रयोग किये जाते हैं।

289. पूर्व राशि, पर राशि।

अनुपात की दोनों राशियों में से हर एक को अनुपात का पद कहते हैं और उनमें से पहली राशि को पूर्व राशि (Antecedent) और दूसरी को पर राशि (Consequent) कहते हैं। जैसे $a : b$ अनुपात में a पूर्व राशि और b पर राशि है।

किसी अनुपात को पूर्व और पर राशियों में से पूर्व राशि को पर राशि के रूप में और पर राशि को पूर्व राशि के रूप में लिखने से जो अनुपात पाया जाता है। उसको पूर्वोक्त अनुपात का व्युत्क्रम अनुपात (Inverse Ratio) कहते हैं। जैसे $b : a$ अनुपात $a : b$ अनुपात का व्युत्क्रम अनुपात है।

किसी अनुपात को उसके व्युत्क्रम अनुपात से गुणा करने से 1 आता है; क्योंकि $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

290. अनुपातों की तुलना ।

भिन्न के नियम के अनुसार

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb},\ \text{अथवा}\ \frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}$$

अर्थात् $a:b$ अनुपात $ma:mb$ अनुपात, अथवा $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ अनुपात के समान है । इससे निम्नलिखित नियम पाया जाता है:—

नियम । पूर्व व पर इन दोनों राशियों को एक ही संख्या से गुणा या भाग देने से उनके अनुपात के मान में कोई परिवर्त्तन नहीं होता ।

इस नियम के अनुसार, $3:4$, $6:8$, $27:36$ आदि अनुपात सब समान हैं ।

इसी प्रकार $48:72$, $12:18$, $2:3$ अनुपात भी आपस में समान हैं ।

जब हम यह निर्णय करने लगते हैं कि दो या दो से अधिक अनुपातों में से कौनसा बड़ा है, कौनसा छोटा है या वे एक दूसरे के समान हैं या नहीं, तब हमें उक्त नियम के अनुसार उनका सार्व हर करना पड़ता है और इस प्रकार परिवर्तित अनुपातों की पूर्व राशियों में से कौनसी बड़ी है, कौनसी छोटी है या वे दोनों परस्पर समान हैं या नहीं यही स्थिर करना होता है ।

जैसे, $2:3$ और $4:5$ इन दोनों अनुपातों में से पहला $=\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ और दूसरा $=\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$; अतएव $12>10$; इसलिए दूसरा अनुपात पहले की अपेक्षा बड़ा है ।

टीका—दो भिन्नों के अनुपात को दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में प्रकट किया जाता है; क्योंकि $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$; अतएव $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ अनुपात ad और bc इन दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के समान हैं ।

291. नियमित और अनियमित राशियाँ (Commensurable and Incommensurable Quantities).

दो राशियों का अनुपात यदि दो पूर्ण सख्याओं के अनुपात के रूप में प्रकट किया जा सकता है, तो उन दोनों राशियों को 'नियमित राशि' कहते हैं अन्यथा उन्हें अनियमित राशि कहते हैं ।

उदाहरण। $1\frac{3}{4}:2\frac{2}{3}=\frac{7}{4}:\frac{8}{3}=21:32.$

इसलिए $1\frac{3}{4}$ और $2\frac{2}{3}$ ये दोनों राशियाँ नियमित हैं क्योंकि उनका अनुपात एक भिन्न के रूप में प्रकट हो सकता है।

किन्तु $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ अनुपात को किसी दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में प्रकट नहीं किया जा सकता। इसलिए $\sqrt{3}$ और $\sqrt{2}$ राशियाँ अनियमित हैं।

टीका 1—यदि किसी संख्या को दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में प्रकट न किया जा सके, तो उक्त संख्या को अक्सर **अनियमित संख्या** कहते हैं।

टीका 2—दो अनियमित राशियों के अनुपात को दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में प्रकट न किये जा सकने पर भी ऐसी दो पूर्ण संख्याएँ निकाली जा सकती हैं जिनके अनुपात से अनियमित राशियों द्वारा सूचित अनुपात का अन्तर-फल इच्छानुसार कम से कम हो।

जैसे, $$\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{2\cdot 23606}{2}=1\cdot 11803\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{5}}{2}>\frac{111803}{100000} \text{ किन्तु } <\frac{111804}{100000}.$$

इसलिए $111803:100000$ अथवा $111804:100000$ से $\sqrt{5}:2$ का अन्तरफल अत्यन्त साधारण है। $\sqrt{5}$ का मान और भी अधिक संख्या के दशमलव स्थान तक निकालने पर उक्त अनुपात का और भी सन्निकट मान निकाला जा सकता है।

292. संयुक्त अनुपात (Compound Ratio).

एक से अधिक अनुपातों की पूर्व राशियों के संलग्न गुणनफल को नई पूर्व राशि और पर राशियों के संलग्न गुणनफल को नई पर राशि के रूप में लिखने से जो अनुपात बनता है वह पूर्वोक्त अनुपातों के सम्मेलन से बना हुआ कहा जाता है और इस नये अनुपात को **संयुक्त अनुपात** कहते हैं।

जैसे, $a:b$ और $c:d$ के संयुक्त द्वारा $a\times c:b\times d$ अर्थात् $ac:bd$ संयुक्त अनुपात बनता है।

निम्नलिखित अनुपात अनुसरण करने के योग्य हैं :—

(1) **वर्गित अनुपात** (Duplicate Ratio). $a:b$ अनुपात को उसी के साथ संयुक्त करने पर प्राप्त अनुपात अर्थात् $a^2:b^2$ अनुपात को $a:b$ अनुपात का वर्गित अनुपात कहते हैं।

इस प्रकार $x^4:y^4$ अनुपात $x^2:y^2$ का वर्गित अनुपात है।

(2) **त्रिक अनुपात** (Triplicate Ratio). $a^3:b^3$ को $a:b$ का त्रिक अनुपात कहते हैं।

इस प्रकार $27:64$ अनुपात $3:4$ का त्रिक अनुपात है।

(3) **वर्गमूलित अनुपात** (Sub-duplicate Ratio). $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ अनुपात को $a:b$ अनुपात का वर्गमूलित अनुपात कहते हैं।

इसी प्रकार $2:3$ को $4:9$ का, $x^2:y^2$ को $x^4:y^4$ का वर्गमूलित अनुपात कहते हैं।

293. सम अनुपात और विषम अनुपात (Ratios of Equality and Inequality).

यदि किसी अनुपात की पूर्व राशि पर राशि के समान हो, तो उसको **सम अनुपात** (Ratio of Equality) और यदि असमान हो तो **विषम अनुपात** (Ratio of Inequality) कहते हैं। पूर्व राशि जब पर राशि की अपेक्षा बड़ी होती है तो उस अनुपात को **गुरु अनुपात** (Ratio of Greater Inequality) और जब छोटी होती है तो (उस अनुपात को) **लघु अनुपात** (Ratio of Less Inequality) कहते हैं।

जैसे, $3:2$ एक गुरु अनुपात है, $3:3$ एक सम अनुपात है और $3:4$ एक लघु अनुपात है। इसी प्रकार, $a >, =$ या $< b$ होने पर, $a:b$ को क्रम से गुरु अनुपात, सम अनुपात अथवा लघु अनुपात कहेंगे।

ऊपर लिखी हुई परिभाषा से यह स्पष्ट विदित होता है कि गुरु अनुपात 1 से बड़ा, लघु अनुपात 1 से छोटा और सम अनुपात 1 के समान होता है।

$a:b$ अनुपात के दोनों पदों में से प्रत्येक के साथ एक धनात्मक राशि x जोड़ने से $a+x:b+x$ एक नया अनुपात पाया जाता है।

यहाँ, $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x}{b}.\frac{(a-b)}{(b+x)}$.

$a>b$ होने पर, $a-b$ धनात्मक और $a<b$ होने से, $a-b$ ऋणात्मक होगा।

$\therefore$ यदि $a>b$ हो, तो $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ धनात्मक होता है; अतएव $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$; और यदि $a<b$ हो, तो $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ऋणात्मक होता है. अतएव $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.

इससे निम्नलिखित सिद्धान्त सिद्ध हुआ :—

सिद्धान्त। किसी अनुपात के दोनों पदों में से प्रत्येक के साथ यदि एक ही धनात्मक राशि जोड़ी जाय तो गुरु अनुपात घट जाता है और लघु अनुपात बढ़ जाता है।

इस प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि पूर्व और पर दोनों पदों में से एक ही धनात्मक राशि घटाने से गुरु अनुपात बढ़ जाता है और लघु अनुपात घट जाता है।

जैसे, $\frac{7}{3}$ गुरु अनुपात के दोनों पदों में से प्रत्येक के साथ 4 जोड़ने से $\frac{11}{7}$ अनुपात प्राप्त होता है। यह $\frac{7}{3}$ की अपेक्षा छोटा है; क्योंकि $\frac{7}{3}-\frac{11}{7}=\frac{16}{21}$, जो एक धनात्मक राशि है।

$\frac{7}{3}$ के दोनों पदों से 2 घटाने पर $\frac{5}{1}$ अनुपात प्राप्त होता है; यह $\frac{7}{3}$ से बड़ा है।

इसी प्रकार लघु अनुपात के लिए भी उदाहरण दिये जा सकते हैं।

उदाहरण 1. $a:b$ अनुपात के दोनों पदों में कौन सी राशि जोड़ने से $c:d$ अनुपात पाया जायगा ?

मान लो कि निर्णेय राशि x है।

तो प्रश्न के अनुसार, $\frac{a+x}{b+x}=\frac{c}{d}$;

वज्रगुणन द्वारा, $d(a+x)=c(b+x)$;

इसलिए, निर्णेय राशि $x=\frac{ad-bc}{c-d}$.

उदाहरण 2. $a:b$ एक गुरु अनुपात है। सिद्ध करो कि $a^2+b^2:2ab$ की अपेक्षा $a:b$ बड़ा है।

$$\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{2a^2-a^2-b^2}{2ab}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{2ab}.$$

यहाँ, $a:b$ एक गुरु अनुपात होने के कारण $a>b$;

$\therefore\ a^2>b^2$ और a^2-b^2 धनात्मक राशि हैं; इसलिए $\frac{a}{b}>\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

उदाहरण 3. $x:y$ अनुपात $2x-a:y-2a$ का वर्गित अनुपात होने पर सिद्ध करो कि $xy=a^2$ अथवा $y=4x$.

प्रश्न के अनुसार, $$\frac{x}{y}=\left(\frac{2x-a}{y-2a}\right)^2;$$

$$\therefore\quad x(y-2a)^2=y(2x-a)^2,$$

अथवा, $$xy^2-4axy+4a^2x=4x^2y-4axy+a^2y,$$

या, $xy^2-a^2y-4x^2y+4a^2x=0$, अर्थात् $(y-4x)(xy-a^2)=0$;

$\therefore\quad y-4x=0$, अथवा $xy-a^2=0$;

$\therefore\quad y=4x$, अथवा $xy=a^2$.

294. अनुपात का सन्निकट मान (Approximate Value).

a की तुलना में x का मान बहुत छोटा होने पर $x:a$ अनुपात का मान भी बहुत छोटा होगा। पुनः $x:a$ के साथ इसका वर्गित अनुपात (Duplicate Ratio) $x^2:a^2$ का अनुपात $x:a$ अनुपात के समान है।

$\therefore\ \frac{x}{a}$ की तुलना में $\frac{x^2}{a^2}$ का मान बहुत छोटा होगा। इसी प्रकार $\frac{x^2}{a^2}$ की तुलना में $\frac{x^3}{a^3}$ का मान बहुत छोटा होगा। $\frac{x^3}{a^3}$ की तुलना में $\frac{x^4}{a^4}$ का मान बहुत छोटा होगा इत्यादि। इसलिए a की तुलना में x राशि बहुत छोटी होने के कारण $\frac{x}{a}$, $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{x^3}{a^3}$ आदि राशियों में से हर एक का

मान क्रमशः छोटे से छोटा होता जायगा किन्तु ज्ञात होता है कि हर एक की छोटाई का परिमाण भी एक प्रकार का नहीं है। प्रत्येक राशि अपनी पूर्ववर्ती राशि की तुलना में छोटी है। इसलिए इस प्रकार की विषमता को व्यक्त करने के लिए पहली राशि अर्थात् $\frac{x}{a}$ को 'पहली श्रेणी की क्षुद्र राशि (A Small Quantity of the First Order) के रूप में गिनने पर दूसरी, तीसरी, चौथी आदि राशियाँ क्रम से दूसरी, तीसरी, चौथी आदि श्रेणियों की क्षुद्र राशियों के रूप में परिमाणित होगी।

टीका—अनुपात का सन्निकट मान निकालते समय ऊँची श्रेणी की क्षुद्रतर राशियाँ उपेक्षणीय होती हैं।

उदाहरण। यदि a की तुलना में x एक छोटी राशि हो, तो सिद्ध करो कि $(a+x)^2 : a^2$ का सन्निकट मान $a+2x : a$ के समान होगा।

$$\frac{(a+x)^2}{a^2}=\frac{a^2+2ax+x^2}{a^2}=1+2\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}.$$

चूँकि $\frac{x}{a}$ की तुलना में $\frac{x^2}{a^2}$ अत्यन्त छोटी है; इसलिए $\frac{x^2}{a^2}$ रहित अनुपात का सन्निकट मान $=1+\frac{2x}{a}=\frac{a+2x}{a}$.

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि $(a+x)^3 : a^3$ का सन्निकट मान $a+3x : a$ है।

295. समघातिक समीकरण (Homogeneous Equation).

x और y इन दोनों राशियों को किसी भी घात के समघातिक समीकरण के द्वारा जोड़ने पर समीकरण को हल करने से $x : y$ अनुपात का मान निकाला जाता है।

जैसे, $ax+by=0$ समीकरण के दोनों पक्षों को y द्वारा भाग देने से, $a\frac{x}{y}+b=0$; अब $\frac{x}{y}=z$ मानने से $az+b=0$ समीकरण पाया जाता है।

अतएव, $z=\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}$.

फिर x, y और z से बने हुए $a_1x+b_1y+c_1z=0$ और $a_2x+b_2y+c_2z=0$. इस प्रकार के दो समीकरण पूर्णरूप से हल नहीं किये जाते; किन्तु इन दोनों समीकरणों से उक्त तीनों राशियों में से किसी दो का अनुपात निकाला जा सकता है। समीकरणों के दोनों पक्षों में z का भाग करने से

$$a_1\left(\frac{x}{z}\right)+b_1\left(\frac{y}{z}\right)+c_1=0,$$

और $a_2\left(\frac{x}{z}\right)+b_2\left(\frac{y}{z}\right)+c_2=0;$

यहाँ $\frac{x}{z}$ और $\frac{y}{z}$ को अव्यक्त राशियाँ मानकर बाद वाले दोनों समीकरणों को हल करने पर ज्ञात होगा कि,

$$\frac{x}{z}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

दिए हुए दोनों समीकरणों से वज्रगुणन प्रणाली द्वारा उक्त फल पाया जाता है। वज्रगुणन द्वारा

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1};$$

$$\therefore \quad x:y:z=b_1c_2-b_2c_1:c_1a_2-c_2a_1:a_1b_2-a_2b_1.$$

उदाहरण 1. यदि $3x+4y:4x+3y=17:18$ हो, तो $x:y$ अनुपात का मान निकालो।

$$\frac{3x+4y}{4x+3y}=\frac{17}{18} \text{ या } 18(3x+4y)=17(4x+3y);$$

अतएव, $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, अर्थात् $x:y=3:2$.

उदाहरण 2. यदि $x:y=3:4$ हो, तो $\frac{5x-2y}{2x-5y}$ का मान निकालो।

$$\frac{5x-2y}{2x-5y}=\frac{5\left(\frac{x}{y}\right)-2}{2\left(\frac{x}{y}\right)-5}$$ [अंश और हर को y से भाग देने से]

$$=\frac{5\times\frac{3}{4}-2}{2\times\frac{3}{4}-5}=\frac{15-8}{6-20}=-\frac{7}{14}=-\frac{1}{2}.$$

प्रश्नावली 104.

1. निम्नलिखित अनुपातों में से कौनसा बड़ा है :—

   (i) $2:3$ या $3:4$; (ii) $7:8$ या $5:6$;

   (iii) $13:22$ या $32:35$; (iv) $11:19$ या $9:14$.

2. निम्नलिखित अनुपातों का संयोजित अनुपात निकालो :—

   (i) $a:b;\ b:c$;

   (ii) $2:5;\ 6:11$ और $16:25$;

   (iii) $a:x;\ x:y;\ y:b$;

   (iv) $a:b$ और $b:a$ का वर्गित अनुपात;

   (v) $a+x:a-x,\ a^2+x^2:(a+x)^2$ और $(a^2-x^2)^2:(a^4-x^4)$.

3. $a+x:b+x$ अनुपात $a:b$ का वर्गित अनुपात होने पर x का मान कितना होगा ?

4. $(x^2+3x+2):(x^2+5x+4)$ और $(x^2+7x+12):(x^2+7x+10)$ इन दोनों अनुपातों का संयोजित अनुपात निकालो।

5. $a^2-1:a^2-4$ अनुपात के साथ किस अनुपात का संयोजन करने से $a+1:a+2$ का वर्गित अनुपात बनेगा ?

6. सिद्ध करो कि $2xy:x^2+y^2$ एक गुरु अनुपात नहीं हो सकता।

7. x और y ये दोनों धनात्मक राशियाँ होने पर $x^3+y^3:x^2+y^2$ और $x^2+y^2:x+y$ अनुपातों की तुलना करो।

8. यदि $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ हो, तो सिद्ध करो कि $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$.

9. किस अनुपात के दोनों पदों में 2 जोड़ने से नया अनुपात $\frac{6}{7}$ के समान होगा और वह कौनसा अनुपात है जिसके दोनों पदों से 3 घटाने से नया अनुपात $\frac{1}{3}$ के समान होगा ?

10. दो संख्याओं का अनुपात $2:3$ और उनमें से बड़ी संख्या छोटी की अपेक्षा 18 अधिक है। उन दोनों सख्याओं को मालूम करो।

11. $5:12$ अनुपात के दोनों पदों में कौनसी संख्या जोड़ने से नया अनुपात $2:3$ के समान होगा ?

12. $3:8$ अनुपात के दोनों पदों में कौनसी संख्या जोड़ दी जाय कि नया अनुपात $\frac{1}{2}$ हो जाय ?

13. यदि $x+7:2(x+14)$ अनुपात $5:8$ का वर्गित अनुपात हो, तो x का मान बताओ।

14. यदि $a-x:b-x$ अनुपात $a:b$ का वर्गित अनुपात हो, तो सिद्ध करो कि, $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

15. यदि $x:y$ एक गुरु अनुपात हो, तो $x+y:x-y$ अनुपात $x^2+y^2:x^2-y^2$ की अपेक्षा बड़ा होगा किन्तु यदि वह एक लघु अनुपात हो, तो $x+y:x-y$ अनुपात $x^2+y^2:x^2-y^2$ अनुपात की अपेक्षा छोटा होगा ?

16. यदि a, b और x धनात्मक राशियाँ हों और $a:b$ एक लघु अनुपात हो, तो सिद्ध करो कि $a+x:b+x$ अनुपात, $a:b$ अनुपात से छोटा है।

17. यदि $a:b$ लघुतम आकार में परिवर्तित करने से $x:y$ हो और $b>a$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{x+1}{y+1}>\frac{a+1}{b+1}.$$

18. यदि $a:b$ अनुपात $a+x:b+x$ का त्रिक अनुपात हो, तो सिद्ध करो कि $x^3-3abx-ab(a+b)=0$.

19. यदि a, b, c और d चार धनात्मक राशियाँ हों, तो सिद्ध करो कि $a+c:b+d$ अनुपात का मान $a:b$ और $c:d$ के मानों का अन्तर्वर्ती होगा।

296. समानुपात (Proportion).

यदि चार राशियों में से पहली व दूसरी का अनुपात, तीसरी व चौथी के अनुपात के समान हो, तो उन चार राशियों को समानुपाती (Proportional) कहते हैं और उनके द्वारा एक समानुपात उत्पन्न होता है।

जैसे, $a : b = c : d$ होने पर a, b, c और d को समानुपाती कहा जाता है । $a : b = c : d$ समानुपात को $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, अथवा $a : b :: c : d$' रूप में भी लिखा जा सकता है । इसे "a व b का अनुपात जो है c व d का अनुपात भी वही है", इस प्रकार पढ़ा जाता है ।

समानुपात के पहले व चौथे पद को बाह्य पद (Extremes) और दूसरे व तीसरे पद को माध्यमिक पद (Means) कहते हैं । उक्त समानुपात में a व d दो बाह्य पद और b व c माध्यमिक पद हैं । d को a, b, c का चतुर्थानुपाती (Fourth Proportional) भी कहा जाता है ।

टीका 1—अनुपात की राशियों का एक-जातीय होना आवश्यक है, किन्तु समानुपात की राशियाँ यदि एक-जातीय न भी हों, तो काम चल जाता है; तो भी प्रथम दो एक-जातीय और अन्तिम दो एक-जातीय होना आवश्यक है ।

टीका 2—$x : a :: y : b :: z : c$ को $x : y : z :: a : b : c$ के रूप में लिखा जा सकता है ।

टीका 3—दो अनुपातों के परस्पर समान होने पर पहले अनुपात की दोनों राशियों को अन्तिम अनुपात की दोनों राशियों का समानुपाती कहते हैं और दो राशियों का अनुपात अन्य दो राशियों के व्युत्क्रम अनुपात के समान होने पर पहले कही गई दोनों राशियों को बाद में कही गई दोनों राशियों का व्युत्क्रम समानुपाती (Inversely Proportional) कहते हैं ।

297. उत्तरोत्तर समानुपात (Continued Proportion).

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ परस्पर इस प्रकार सम्बन्ध रखती हों कि (पहली राशि) : (दूसरी राशि), (दूसरी राशि) : (तीसरी राशि), (तीसरी राशि) : (चौथी राशि) आदि अनुपात परस्पर समान हों, तो उन राशियों के द्वारा एक उत्तरोत्तर समानुपात उत्पन्न होता है और उन राशियों को उत्तरोत्तर समानुपाती कहते हैं ।

जैसे, $a : b = b : c = c : d = d : e$ होने पर a, b, c, d और e राशियाँ उत्तरोत्तर समानुपाती हैं ।

तीन राशियों के उत्तरोत्तर समानुपाती होने पर दूसरी राशि को पहली व तीसरी का मध्यानुपाती (Mean Proportional) और तीसरी राशि को पहली दो राशियों का तृतीय अनुपाती (Third Proportional) कहते हैं। जैसे, $a : b = b : c$ होने पर b, a व c का मध्यानुपाती और c, a व b का तृतीय अनुपाती है।

टीका--उत्तरोत्तर समानुपाती राशियों का एक-जातीय होना आवश्यक है।

298. समानुपात-सम्बन्धी कुछ सिद्धान्त ।

(1) समानुपात के दोनों वाह्य पदों (Extremes) का गुणनफल दोनों माध्यमिक पदों (Means) के गुणनफल के समान है, अर्थात् यदि $a : b :: c : d$ एक समानुपात हो, तो $ad = bc$.

$$a : b :: c : d, \text{ अर्थात् } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

दोनों पक्षों को bd से गुणा करने से $ad = bc$.

उपसिद्धान्त। यदि $a : b :: b : c$ हो, तो $ac = b^2$ होगा अर्थात् तीन राशियाँ उत्तरोत्तर समानुपाती हों, तो पहली व तीसरी का गुणनफल दूसरी के वर्ग के समान होगा।

टीका—उक्त सिद्धान्त का उलटा भी सत्य है, अर्थात् $ad = bc$ होने पर $a : b :: c : d$. अतएव समानुपात के तीन पद दिये होने पर चौथा निकाला जा सकता है।

(2) यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो पहली व तीसरी और दूसरी व चौथी के द्वारा बने हुए अनुपात समान होंगे, अर्थात् $a : b :: c : d$ होने पर $a : c :: b : d$.

चूँकि, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

अतएव दोनों पक्षों को $\frac{b}{c}$ से गुणा करने से,

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}, \text{ या } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \text{ अर्थात् } a : c :: b : d.$$

इसको एकान्तर अनुपात (Alternando) कहते हैं।

(3) समानुपात की राशियों को उत्क्रम में लेने पर भी वह समानुपाती होंगी। अर्थात् $a : b :: c : d$ होने पर $b : a :: d : c$.

$\because \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$\therefore \quad 1 \div \frac{a}{b} = 1 \div \frac{c}{d}$, या $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. अर्थात् $b : a :: d . c$.

इसको उत्क्रम अनुपात (Invertendo) कहते हैं।

(4) चार राशियाँ यदि समानुपाती हों, तो पहली व दूसरी के योगफल का दूसरी राशि से अनुपात, तीसरी व चौथी राशि के योगफल का चौथी राशि से अनुपात के समान होगा, अर्थात् $a : b :: c : d$ होने पर $a + b : b :: c + d : d$.

$\because \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$\therefore \quad 1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{d}$, या $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, अर्थात्

$a + b : b :: c + d : d$. इसको योग अनुपात (Componendo) कहते हैं।

(5) यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो दूसरी के साथ पहली और दूसरी के अन्तरफल का अनुपात चौथी के साथ तीसरी व चौथी के अन्तरफल का अनुपात समान होगा।

यदि $a : b :: c : d$ हो, तो $a - b : b :: c - d : d$.

$\because \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$\therefore \quad \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$, या $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, अर्थात्

$a - b : b :: c - d : d$, इसको भक्त अनुपात (Dividendo) कहते हैं।

(6) यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो पहली व दूसरी के अन्तरफल व उनके योगफल का अनुपात, तीसरी और चौथी के अन्तरफल व उनके योगफल के अनुपात के समान है, अर्थात् $a : b :: c : d$ होने पर,

$a + b : a - b :: c + d : c - d$.

(4) से $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, और (5) से $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

भाग करने पर $a+b : a-b :: c+d : c-d$.

इसको भक्तयोग अनुपात (Componendo and Dividendo) कहते हैं।

उदाहरण 1. 9, 15 और 24 का चतुर्थ अनुपाती निकालो।

मान लो कि निर्णेय समानुपाती x है।

उस अवस्था में $9 : 15 = 24 : x$; अतएव $15 : 9 = x : 24$;

$$\therefore \quad x = \frac{15 \times 24}{9} = 40.$$

उदाहरण 2. 17 और 68 का मध्य अनुपाती निकालो।

मान लो कि निर्णेय समानुपाती x है।

उस अवस्था में $17 : x = x : 68$, अथवा $x^2 = 17 \times 68 = 17^2 \times 2^2$;

$$\therefore \quad x = \sqrt{17^2 \times 2^2} = 34.$$

उदाहरण 3. 3, 5, 7 और 10 इन संख्याओं में से हर एक में कौनसी संख्या जोड़ी जाय कि नई संख्यायें समानुपाती हों?

मान लो कि निर्णेय संख्या x है;

उस अवस्था में $\frac{3+x}{5+x} = \frac{7+x}{10+x}$;

$$\therefore \quad (3+x)(10+x) = (5+x)(7+x),$$

या $30 + 13x + x^2 = 35 + 12x + x^2$; $\quad \therefore \quad x = 5$.

उदाहरण 4. यदि $\frac{a^2+c^2}{ab+ca} = \frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

वज्रगुणन और सरलीकरण द्वारा

$a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = 0$,

या, $(ad - bc)^2 = 0$; अतएव, $ad = bc$.

अर्थात् $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

299. उत्तरोत्तर समानुपाती राशियाँ (Quantities in Continued Proportion).

तीन राशियों के उत्तरोत्तर समानुपाती होने पर पहली व तीसरी का अनुपात पहली व दूसरी के वर्गित अनुपात के समान होगा । अर्थात्

यदि $a:b=b:c$ हो, तो $a:c=a^2:b^2$.

यहाँ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $\therefore \frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$,

या $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$, अर्थात् $a:c=a^2:b^2$.

यदि $a:b::b:c::c:d$ हो, तो $a:d=a^3:b^3$.

कारण, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$; $\therefore$ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$,

अर्थात् $a:d=a^3:b^3$.

उदाहरण 1. यदि a, b और c ये तीनों राशियाँ उत्तरोत्तर समानुपाती हों, और $a(b-c)=2b$ हो, तो सिद्ध करो कि $a-c=\frac{2(a+b)}{a}$.

यहाँ $a:b=b:c$, $\therefore$ $ac=b^2$,

किन्तु $ab-ac=2b$ या $ab-b^2=2b$; $\therefore$ $a-b=2$;

$a+b$ द्वारा गुणा करने से,

$(a-b)(a+b)=2(a+b)$.

या $a^2-b^2=2(a+b)$. अर्थात् $a^2-ac=2(a+b)$;

$\therefore$ a द्वारा भाग देने पर,

$$a-c=\frac{2(a+b)}{a}.$$

उदाहरण 2. a, b, c और d राशियों के उत्तरोत्तर समानुपाती होने पर सिद्ध करो कि $b+c$ राशि, $a+b$ और $c+d$ इन दोनों राशियों की मध्यानुपाती (Mean Proportional) है ।

यहाँ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ और इनमें से हर एक $=\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+d}$.

प्रश्नावली 105.

1. निम्नलिखित राशियों के तृतीय अनुपाती निकालो—

   (i) 12, 18; (ii) 21, 42; (iii) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ और $\frac{x}{y}$.

2. मध्यानुपाती निकालो:—

   (i) 4, 9; (ii) 3, 48; (iii) 6, 54; (iv) 18, 50.

3. चतुर्थ अनुपाती निकालो:—

   (i) 14, 24, 35; (ii) 18, 24, 45; (iii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$.

4. यदि $x, 2x-y, x-2y$ और y राशियाँ समानुपाती हों, तो सिद्ध करो कि $x-y$ राशि, x और y की मध्यानुपाती है।

5. यदि $a:b=b:c=c:d$ हो, तो सिद्ध करो कि $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

6. सिद्ध करो कि y राशि के z और x राशियों की मध्यानुपाती होने पर $xy+yz$ राशि x^2+y^2 और y^2+z^2 राशियों की मध्यानुपाती होगी।

7. सिद्ध करो कि ऐसी कोई भी संख्या नहीं है जो चार समानुपाती राशियों में से प्रत्येक में जोड़ने पर प्राप्त राशियाँ भी समानुपाती हों।

8. सिद्ध करो कि (x^2+3x+2), $5(x+2)$ और $3(x+1)$ की चतुर्थ समानुपाती राशि में x से युक्त कोई पद नहीं है।

9. a, b, c राशियों के उत्तरोत्तर अनुपाती होने पर सिद्ध करो कि,

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b^2-a^2}+\frac{1}{b^2-c^2}$$

10. यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध करो कि $ab+cd$ राशि a^2+c^2 और b^2+d^2 की मध्यानुपाती होगी।

11. यदि x और y असमान राशियाँ हों और उनका अनुपात $x+z$ और $y+z$ की वर्गित अनुपात हो, तो सिद्ध करो कि z राशि x और y की मध्यानुपाती होगी।

300. व्युत्पन्न समानुपात (Derived Proportion).

किसी दिये हुए समानुपात से दूसरा समानुपात किस प्रकार उत्पन्न हो सकता है यही इस समय प्रदर्शित किया जायगा। यद्यपि विशेष विशेष प्रणालियों से इस जाति के प्रश्नों के हल करने में सुविधा होती है, तथापि नीचे दी गई कुछ प्रक्रियायें इस जाति के प्रत्येक क्षेत्र में ही प्रयोग में लाने के योग्य हैं।

उदाहरण 1. यदि $a : b = c : d$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$la+mb : pa+qb = lc+md : pc+qd.$$

मान लो कि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$, तो $a = bk$ और $c = dk$.

$$\therefore \quad \frac{la+mb}{pa+qb} = \frac{lkb+mb}{pkb+qb} = \frac{(lk+m)b}{(pk+q)b} = \frac{lk+m}{pk+q},$$

$$\text{और} \quad \frac{lc+md}{pc+qd} = \frac{ldk+md}{pdk+qd} = \frac{(lk+m)d}{(pk+q)d} = \frac{lk+m}{pk+q};$$

$$\therefore \quad \frac{la+mb}{pa+qb} = \frac{lc+md}{pc+qd};$$

कारण, इनमें से हर एक $\dfrac{lk+m}{pk+q}$ के समान है।

उदाहरण 2. l, m और n चाहे कैसी ही राशि क्यों न हों, यदि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ हो, तो सिद्ध करो कि इन में से हर एक

$$= \frac{la+mc+ne}{lb+md+nf}$$

मान लो कि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = k$, $\quad \therefore a = bk, \quad c = dk$ और $e = fk$;

$$\therefore \quad la+mc+ne = lbk+mdk+nfk$$
$$= k(lb+md+nf);$$

$$\therefore \quad \frac{la+mc+ne}{lb+md+nf} = \frac{k(lb+md+nf)}{(lb+md+nf)} = k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

301. विलोम प्रमेय (Converse Theorem).

यदि $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$ हो, तो सिद्ध करो कि a, b, c, d राशियाँ समानुपाती होंगी।

यहाँ, $$\frac{a+b+c+d}{a-b+c-d}=\frac{a+b-c-d}{a-b-c+d}.$$

∴ भक्तयोग अनुपात द्वारा

$$\frac{(a+b+c+d)+(a-b+c-d)}{(a+b+c+d)-(a-b+c-d)}=\frac{(a+b-c-d)+(a-b-c+d)}{(a+b-c-d)-(a-b-c+d)},$$

अर्थात्, $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$; या, $\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}$;

∴ $\dfrac{(a+c)+(a-c)}{(a+c)-(a-c)}=\dfrac{(b+d)+(b-d)}{(b+d)-(b-d)}$, अर्थात् $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$;

अतएव, $a:b::c:d$, अर्थात् a, b, c, d राशियाँ समानुपाती हैं।

उदाहरण। यदि $(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$ $=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$ हो, तो सिद्ध करो कि bc, ad, ps और qr राशियाँ समानुपाती हैं।

बायाँ पक्ष $=(pa+sd)^2-(qb+rc)^2$;

दायाँ पक्ष $=(pa-sd)^2-(qb-rc)^2$,

∴ $(pa+sd)^2-(qb+rc)^2=(pa-sd)^2-(qb-rc)^2$,

या, $(pa+sd)^2-(pa-sd)^2=(qb+rc)^2-(qb-rc)^2$;

अतएव, $psad=qrbc$, अर्थात् $bc:ad::ps:qr$.

प्रश्नावली 106.

यदि $a:b=c:d$ हो, तो सिद्ध करो कि,

1. $a\pm b:a=c\pm d:c$. 2. $ma-nb:a+b=mc-nd:c+d$.
3. $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.
4. $ac:bd=a^2+c^2:b^2+d^2$.
5. $a:(a+c)=(a+b):(a+b+c+d)$.
6. $ma-nb:ma+nb=mc-nd:mc+nd$.
7. $ma+nb:mc+nd=b^2c:d^2a$.
8. $(a+c)^2:(b+d)^2=a^2-ac+c^2:b^2-bd+d^2$.

9. $(a^2+b^2) : (a^2-b^2)=(c^2+d^2) : (c^2-d^2)=ac+bd : ac-bd.$

10. $a^2b-3ac^2 : b^3-3ad^2=a^2+5c^2 : b^2+5d^2.$

11. $pa^2+qc^2 : pb^2+qd^2=ma^2-nc^2 : mb^2-nd^2.$

12. $a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2=c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2.$

13. $pa^3+qc^3 : pb^3+qd^3=a^2c : b^2d.$

14. $a^4+b^4 : a^4-b^4=a^2c^2+b^2d^2 : a^2c^2-b^2d^2.$

15. यदि $a(a+2b) : b^2=c(c+2d) : d^2$ हो, तो $(a+b)^2 : (c+d)^2 = b^2 : d^2.$

16. यदि $(a+b-c+d) : (a-b+c+d)=(b+c+a+d) : (b-c-a+d)$ हो, तो $a+d : b-c=b+d : c+a.$

17. यदि $x^2+y^2 : ax+by=ax+by : a^2+b^2$ हो, तो $x : y=a : b.$

18. यदि $a : b = b : c$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2=a : c.$

19. यदि a, b, c, d, e उत्तरोत्तर अनुपाती हों, तो सिद्ध करो कि,
$a : e=a^4 : b^4.$

20. यदि $3a+4b : 5a+6b=3c+4d : 5c+6d$ हो, तो
$a : b :: c : d.$

21. यदि $a+b : b+c=c+d : d+a$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$a=c$, अथवा $a+b+c+d=0.$

22. यदि $a : b :: c : d :: e : f$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$a-e : b-f=c : d.$

23. यदि $a : b :: c : d$ हो तो सिद्ध करो कि,
$(a+b)(c+d)=\frac{b}{d}(c+d)^2=\frac{d}{b}(a+b)^2.$

24. यदि $a : b :: x : y$ हो, तो $ab : xy=a^2+b^2 : x^2+y^2.$

25. यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d).$

26. यदि $a : b :: c : d$, हो, तो सिद्ध करो कि,
$\frac{a^2}{b} : \frac{c^2}{d}$ अनुपात $\frac{a}{b^2} : \frac{c}{d^2}$ अनुपात का उत्तरोत्तर अनुपात है।

302. अनुपातों का लेखाचित्र ।

लेखाचित्र के द्वारा निम्नलिखित उपाय से अनुपात प्रकट किये जाते हैं:—

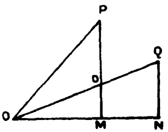
किसी निर्दिष्ट इकाई के अनुसार b लम्बाई वाली एक भुज OM और M विन्दु से a लम्बाई की कोटि MP अङ्कित करो ।

उस अवस्था में $\frac{MP}{OM}$ के द्वारा $\frac{a}{b}$ अनुपात लेखाचित्र के द्वारा प्रकाशित होगा । MOP कोटि का परिमाण मालूम करने पर यह निर्णय किया जा सकता है कि यह अनुपात इसी प्रकार के एक दूसरे अनुपात से बड़ा है या छोटा है ।

मान लो कि $\frac{c}{d}$ अनुपात $\frac{NQ}{ON}$ द्वारा सूचित होता है । यदि OQ रेखा MP को D विन्दु पर काटे, तो NOQ और MOD दो सदृश त्रिभुजों से,

$$\frac{MD}{OM}=\frac{QN}{ON}=\frac{c}{d}.$$

किन्तु $$\frac{MP}{OM}=\frac{a}{b}.$$



अतएव $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ अनुपातों की तुलना MP और MD की लम्बाई के द्वारा की जा सकती है ।

303. समानुपात-सम्बन्धी एक विशेष आवश्यकीय नियम ।

जबकि $p, q, r, \ldots\ldots, n$ धन या ऋण, भिन्न या पूर्ण चाहे कैसी ही राशियाँ क्यों न हों, यदि $a:b=c:d=e:f=\ldots\ldots$ हों और उक्त अनुपातों की संख्या m हो, तो उनमें से प्रत्येक अनुपात

$$=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{ace\ldots}{bdf\ldots}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

मान लो कि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots=k,$

तो $a=bk,\ c=dk,\ e=fk$ इत्यादि ....(1)

$\therefore\quad pa^n=pb^nk^n,\ qc^n=qd^nk^n,\ re^n=rf^nk^n$ इत्यादि ।

जोड़ने से, $pa^n+qc^n+re^n+\ldots=(pb^n+qd^n+rf^n+\ldots)k^n$;

$\therefore \dfrac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots}=k^n.$

दोनों पक्षों का nवाँ मूल ग्रहण करने से,

प्रत्येक अनुपात $=k=\left(\dfrac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots}\right)^{\frac{1}{n}}$ ....(2)

फिर (1) को m संख्यक समीकरण से गुणा करने से,

$$ace\ldots=(bdf\ldots)k^m;$$

$$\therefore \qquad k^m=\frac{ace\ldots}{bdf\ldots};$$

दोनों पक्षों का mवाँ मूल ग्रहण करने से,

प्रत्येक अनुपात $=k=\left(\dfrac{ace\ldots}{bdf\ldots}\right)^{\frac{1}{m}}$ ....(3)

टीका— $x^{\frac{1}{m}}$ का अर्थ $\sqrt[m]{x}$, अर्थात् x का mवाँ मूल है (अनु० 312).

304. उपसिद्धान्त।

$p, q, r, \ldots n$ और m के विशेष मानों से युक्त होने पर निम्नलिखित उपयोगी मान निकाले जाते हैं:—

(1) $n=1$ लिखने से प्रत्येक अनुपात $=\dfrac{pa+qc+re+\ldots}{pb+qd+rf+\ldots}$,

(2) $p=q=r=\ldots=n=1$ लिखने पर,

प्रत्येक अनुपात $\dfrac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}$

अर्थात् अनुपातों में से हर एक अपने पूर्व पदों के योग और पर पदों के योग के अनुपात के समान है।

(3) $m=2, 3$ इत्यादि लिखने पर

प्रत्येक अनुपात $=\left(\dfrac{ac}{bd}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{ace}{bdf}\right)^{\frac{1}{3}}$ इत्यादि।

(4) प्रत्येक अनुपात $=\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{c-e}{d-f}=\dfrac{a-e}{b-f}=\ldots\ldots$

अर्थात्, अनुपातों में से हर एक किसी भी दो अनुपातों के दोनों पूर्व पदों के अन्तर और दोनों पर पदों के अन्तर के अनुपात के समान है।

इन सिद्धान्तों को प्रमाणित करने के समय ऊपर दिये हुए फलों का प्रयोग न करके प्रमाणित करना ही युक्तिसंगत है।

उदाहरण 1. यदि $a:b=c:d=e:f$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\left(\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f}\right)^2=\frac{ac+ce}{bd+df}.$$

मान लो कि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$; तो $a=bk,\ c=dk,\ e=fk$;

$$\therefore\quad \left(\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f}\right)^2=\left(\frac{bk+2dk+3fk}{b+2d+3f}\right)^2=k^2.$$

और $$\frac{ac+ce}{bd+df}=\frac{bdk^2+dfk^2}{bd+df}=k^2.$$

अतएव $\left(\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f}\right)^2=\frac{ac+ce}{bd+df}$, क्योंकि इनमें से प्रत्येक y^2 के समान हैं।

उदाहरण 2. यदि $x:a=y:b=z:c$ हो, तो सिद्ध करो कि

(i) $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$;

(ii) $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$.

मान लो कि, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$; तो $x=ak,\ y=bk,\ z=ck$.

$$\therefore\quad (i)\ \frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{a^3k^3+b^3k^3+c^3k^3}{a^3+b^3+c^3}=k^3=\frac{x}{a}.\frac{y}{b}.\frac{z}{c}=\frac{xyz}{abc}.$$

फिर (ii) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{(x+y+z)}{(a+b+c)}=k$,

$$\therefore\quad \frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3k^3=3.\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}.$$

उदाहरण 3. यदि $x:(b+c)=y:(c+a)=z:(a+b)$ हो, तो सिद्ध करो कि $a:(y+z-x)=b:(z+x-y)=c:(x+y-z)$.

यहाँ, $$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=\frac{x+y+z}{2(a+b+c)};$$

$$\therefore\quad \text{प्रत्येक}=\frac{(x+y+z)-2x}{2(a+b+c)-2(b+c)}=\frac{(x+y+z)-2y}{2(a+b+c)-2(c+a)}$$
$$=\frac{(x+y+z)-2z}{2(a+b+c)-2(a+b)};$$

अथवा, $$\frac{y+z-x}{2a}=\frac{z+x-y}{2b}=\frac{x+y-z}{2c};$$

$$\therefore\quad a:(y+z-x)=b:(z+x-y)=c:(x+y-z).$$

305. उपरोक्त नियम का साधारण आकार (General Form).

यदि $a:b$, $c:d$, $e:f$ परस्पर समान हों, तो उनमें से प्रत्येक अनुपात $\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$ अर्थात् $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ के समान है। यहाँ पूर्व पद a, c, e आदि n-तम मान की समघातीय राशि को A और इस राशि के a, c, e आदि के स्थान पर क्रमशः b, d, f आदि लिखने से जो समघातीय राशि पाई जाती है उसे B द्वारा सूचित किया गया है।

306. असमान अनुपात सम्बन्धी नियम।

धनात्मक पर पदवाले $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ आदि अनुपात परस्पर असमान होने पर $\frac{a+c+e+\ldots\ldots+p}{b+d+f+\ldots\ldots+q}$ भिन्न का मान उक्त अनुपातों के लघुतम और बृहत्तम का अन्तर्वर्ती होगा।

मान लो कि अनुपात आरोह-क्रम से लिखा हुआ है; अतएव उक्त अनुपात का $\frac{a}{b}$ लघुतम और $\frac{p}{q}$ बृहत्तम है।

मान लो कि $\frac{a}{b}=k$; तो $a=bk$.

यहाँ $\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$, अर्थात् $>k$,

$\therefore\ c>dk$,

इसी प्रकार $e>fk$ इत्यादि।

उक्त असाम्यता (Inequalities) के हर एक पक्ष को जोड़ने से,

$$(a+c+e+\ldots\ldots+p)>(b+d+f+\ldots\ldots+q)k;$$

$$\therefore\ \frac{a+c+e+\ldots\ldots+p}{b+d+f+\ldots\ldots+q}>k=\text{लघुतम अनुपात } \frac{a}{b}.$$

फिर मान लो कि $\frac{p}{q}=k'$; तो $p=k'q$.

यहाँ $\frac{a}{b}<\frac{p}{q}$, अर्थात् $>k'$;

$\therefore\ a<bk'$; इसी प्रकार, $c<dk'$, $e<fk'$ इत्यादि।

जोड़ने से, $(a+c+e+\ldots\ldots+p)<(b+d+f+\ldots\ldots q)k'$;

$\therefore \quad \frac{a+c+e+\ldots\ldots+p}{b+d+f+\ldots\ldots+q} < k'$ वृहत्तम अनुपात $\frac{p}{q}$.

अतएव यह साध्य सिद्ध हुआ।

प्रश्नावली 107.

यदि $a:b=c:d=e:f$ हो तो सिद्ध करो कि

1. $\frac{a}{b}=\left(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. प्रत्येक अनुपात $=\left(\frac{pa^3+qc^3+re^3}{pb^3+qd^3+rf^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

3. प्रत्येक अनुपात $\left(\frac{a^5-3a^3c^2+2c^2e^3}{b^5-3b^3d^2+2d^2f^3}\right)^{\frac{1}{5}}$.

4. $\frac{a^4+5c^3e+e^4}{b^4+5d^3f+f^4}=\frac{a^2c^2}{b^2d^2}$. 5. $\frac{a^2+c^2+e^2}{ab+cd+ef}=\frac{ab+cd+ef}{b^2+d^2+f^2}$.

6. $\sqrt{(3a^2+4c^2)}:\sqrt[3]{(5a^3-6c^3)}=\sqrt{(3b^2+4d^2)}:\sqrt[3]{(5b^3-6d^3)}$.

7. यदि $\frac{a}{x+y}=\frac{b}{y+z}=\frac{c}{z-x}$ हो, तो सिद्ध करो कि, $a-b+c=0$.

8. यदि a, b और c तीनों राशियाँ उत्तरोत्तर अनुपाती हों, तो सिद्ध करो कि, $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}=(a^n+b^n+c^n)(a^n-b^n+c^n)$.

9. यदि $a:b=c:d=e:f$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\sqrt[3]{a^2c+c^2e+e^2a}:\sqrt[3]{b^2d+d^2f+f^2b}$$
$$=\sqrt{a^2+c^2+e^2}:\sqrt{b^2+d^2+f^2}.$$

10. यदि $x:y=y:z$ हो, तो $\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}$ को लघुतम आकार में परिवर्तित करने से क्या होगा ?

11. यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध करो कि, $\frac{a}{d}=\frac{pa^3+qb^3+rc^3}{pb^3+qc^3+rd^3}$.

12. यदि a, b, c, d उत्तरोत्तर समानुपाती हों, तो सिद्ध करो कि, $\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)}=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}$.

307. अनुपात और समानुपात सम्बन्धी प्रश्नावली ।

उदाहरण 1. दो संख्याओं का अनुपात $3:4$ है। उनमें से प्रत्येक में 4 जोड़ने से प्राप्त संख्याओं का अनुपात $5:6$ है। तो उन दोनों संख्याओं को ज्ञात करो।

चूँकि दोनों संख्याओं का अनुपात $3:4$ है, इसलिए उनको $3x$ और $4x$ से सूचित कर सकते हैं।

$\therefore$ प्रश्न की शर्त के अनुसार $\dfrac{3x+4}{4x+4}=\dfrac{5}{6}$.

समीकरण को हल करने से $x=2$.

$\therefore$ दोनों निर्णेय संख्यायें 6 और 8 हैं।

उदाहरण 2. इब्राहीम और फ़ातिमा की अवस्था क्रमशः 24 और 15 वर्ष की हैं। बताओ कितने वर्ष के बाद उनकी अवस्था का अनुपात $7:5$ होगा।

मान लो कि x वर्ष के बाद उनकी अवस्था का अनुपात $7:5$ होगा।

$\therefore$ $\dfrac{24+x}{15+x}=\dfrac{7}{5}$. समीकरण को हल करने से $x=7\frac{1}{2}$; अर्थात् $7\frac{1}{2}$ वर्ष के बाद उनकी अवस्था का अनुपात $7:5$ के समान होगा।

किन्तु x का मान क्रमशः बढ़ जाने से $\dfrac{24+x}{15+x}$ अनुपात का मान $\frac{24}{15}$, अर्थात् $\frac{8}{5}$ से घटकर क्रमशः एक की ओर बढ़ेगा। $x=7\frac{1}{2}$ होने पर अनुपात का मान घटकर $7:5$ होगा; किन्तु x का मान $7\frac{1}{2}$ की अपेक्षा बढ़ते रहने पर $7:5$ से घटता रहेगा।

इसलिए निर्णेय वर्षों की संख्या कम से कम 8 वर्ष है।

उदाहरण 3. दो बराबर बराबर बरतन स्पिरिट मिले हुए पानी से भरे हैं। पहले बरतन में स्पिरिट और पानी का अनुपात $3:2$ और दूसरे में $4:3$ है। बताओ दोनों बरतनों के मिश्रण को मिलाने से नये मिश्रण में स्पिरिट और पानी का अनुपात क्या होगा।

मान लो कि प्रत्येक बरतन में v गैलन तरल पदार्थ आता है; तो पहले बरतन में $\frac{3}{5}v$ गैलन स्पिरिट और $\frac{2}{5}v$ गैलन पानी है। इसी प्रकार दूसरे बरतन में $\frac{4}{7}v$ गैलन स्पिरिट और $\frac{3}{7}v$ गैलन पानी है।

दोनों बरतनों के मिश्रण को मिला देने से नये मिश्रण में $(\frac{3}{5}v + \frac{4}{7}v)$ गैलन स्पिरिट और $(\frac{2}{5}v + \frac{3}{7}v)$ गैलन पानी होगा ।

$$\therefore \text{ निर्णेय अनुपात } = \left(\frac{3v}{5} + \frac{4v}{7}\right) : \left(\frac{2v}{5} + \frac{3v}{7}\right)$$

$$= \frac{(21+20)v}{35} : \frac{(14+15)v}{35}$$

$$= \frac{41v}{35} : \frac{29v}{35} = 41 : 29$$

प्रश्नावली 108.

1. किस संख्या में क्रम से 1, 3 और 6 जोड़ने से प्राप्त हुई तीनों राशियों से एक उत्तरोत्तर अनुपात उत्पन्न होगा ?

2. एक ही दो अङ्कों से बनी हुई दो संख्याओं का अनुपात 4 : 7 और दोनों संख्याओं का योग 99 है । तो वे दोनों संख्याएँ बताओ ।

3. 9 : 14 इस अनुपात की दोनों संख्याओं में से कौन सी बड़ी से बड़ी संख्या घटाने पर नया अनुपात 1 : 2 से बड़ा होगा ?

4. 11000 और 7000 सिपाहियों की दो सेनाओं में से हर एक में 1000 सिपाही मिल गये । नये सिपाहियों के मिलने के कारण कौन सा दल अधिक सबल हुआ है ?

5. दो बरतनों में पानी मिला हुआ दूध रखा है । पहले में दूध और पानी का अनुपात 5 : 3 और दूसरे में 8 : 1 है । दोनों बरतनों के मिश्रणों को किस अनुपात से मिश्रित किया जाय कि नये मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 4 : 1 हो जाय ?

6. आयशा और जहानआरा, दोनों बहनों की वर्त्तमान अवस्था का योगफल 13 वर्ष है । 11 वर्ष के बाद उनकी अवस्था का अनुपात 4 : 3 होजायगा । तो बताओ कि उनकी वर्त्तमान अवस्था क्या है ।

7. बारह आदमियों के एक परिवार में प्रत्येक व्यक्ति के लिए प्रति दिन बराबर बराबर चावल की आवश्यकता पड़ती है । एक दिन कुछ

लोगों की अनुपस्थिति के कारण चावल का खर्च 4 : 3 के अनुपात से कम होगया। तो बताओ कि उस दिन कितने आदमी अनुपस्थित थे ।

8. तीन स्कूलों के विद्यार्थियों की संख्या 150, 200 और 250 है। अकाल और बाढ़ के कारण प्रत्येक स्कूल के विद्यार्थियों की संख्या पचास-पचास करके घट गई तो बताओ कि किस स्कूल को सबसे अधिक हानि हुई ।

9. दो अङ्कों से बनी हुई संख्या के बाईं ओर का अङ्क दाहिनी ओर के अङ्क का दुगना है। दोनों अङ्कों को उलट कर लिखने पर जो संख्या प्राप्त होती है, 60 के साथ उसका अनुपात 4 : 5 है। तो बताओ कि वह संख्या कौन सी है ।

10. तीन संख्याओं का अनुपात 2 : 3 : 5 और उनके घन-समूह का योग 1320 है। तो वे तीनों संख्याएँ बताओ ।

11. दो व्यक्तियों की अवस्था का अनुपात 3 : 4 है। 18 वर्ष के बाद उनकी अवस्था का अनुपात 6 : 7 हो जायगा। तो बताओ कि उनकी वर्त्तमान अवस्था क्या है ।

12. परीक्षा में उत्तीर्ण होनेवालों की संख्या अनुत्तीर्ण होनेवालों की तिगुनी है। यदि परीक्षार्थियों की संख्या 16 कम होती और उत्तीर्ण होनेवालों की संख्या 6 अधिक होती तो उत्तीर्ण होनेवालों और अनुत्तीर्ण होनेवालों की संख्या का अनुपात 2 : 1 होता। तो परीक्षार्थियों की संख्या बताओ ।

13. किसी विद्यार्थी ने परीक्षा में 5 अनिवार्य्य और 2 ऐच्छिक विषय लिये। प्रत्येक विषय की पूर्ण संख्या समान है। प्रत्येक विषय में समान अङ्क प्राप्त करके विद्यार्थी 45 अङ्कों से अनुत्तीर्ण होगया। दूसरी बार यदि उसने पहले की अपेक्षा 36 : 25 अनुपात से अधिक अङ्क प्राप्त किए और एक ऐच्छिक विषय में परीक्षा दिये बिना भी उत्तीर्ण होने के लिए आवश्यक अङ्कों से 37 अधिक अङ्क प्राप्त कर लिये। तो बताओ कि उत्तीर्ण होने के लिए कितने अङ्क आवश्यक थे ।

308. विविध प्रश्नों का हल।

उदाहरण 1. यदि $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ हो, तो सिद्ध करो कि $ax+by+cz=0$.

मान लो कि $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$;

$\therefore\quad x=k(b-c),\qquad y=k(c-a),\qquad z=k(a-b)$;

$\therefore\quad ax+by+cz=k\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}=k\times 0=0.$

उदाहरण 2. यदि $x=cy+bz$, $y=az+cx$ और $z=bx+ay$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

यहाँ $\qquad x=cy+bz,\qquad\qquad$ ....(1)

$\qquad\qquad y=az+cx,\qquad\qquad$ ....(2)

$\qquad\qquad z=bx+ay.\qquad\qquad$ ....(3)

(3) से z का मान (1) में लिखने से,

$$x=cy+b(bx+ay)=y(c+ab)+b^2x,$$

या, $x(1-b^2)=y(c+ab)$; $\quad\therefore\quad \dfrac{x}{y}=\dfrac{c+ab}{1-b^2}$ ....(4)

इसी प्रकार (3) और (2) से $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1-a^2}{c+ab}$ ....(5)

(4) और (5) को गुणा करने से $\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{1-a^2}{1-b^2}$, या $\dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}$.

इसी प्रकार (2) में से y का मान (1) में लिखकर सिद्ध करो कि

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{z^2}{1-c^2};$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

उदाहरण 3. यदि $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ हो, तो सिद्ध करो कि, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

दिये हुए तीनों अनुपातों में से पहले के अंश व हर को c द्वारा, दूसरे के अंश और हर को b द्वारा, और तीसरे के अंश और हर को a द्वारा गुणा करने से,

$$\frac{c(ay-bx)}{c^2}=\frac{b(cx-az)}{b^2}=\frac{a(bz-cy)}{a^2}$$

$$=\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हरों का योग}}=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

$\therefore\quad acy-bcx=0$, अतएव, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$,

और $bcx-abz=0$, अतएव, $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$;

$$\therefore\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

उदाहरण 4. यदि $\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{z+y}{x+z}$ हो और $b+c\neq0$, तो इन भिन्नों में से हर एक $=\frac{x}{y}$.

तीसरी भिन्न के अंश और हर को a से गुणा करने से,

$$\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{a(z+y)}{a(x+z)}=\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हरों का योग}}$$

$$=\frac{(b+c)x-a(z+y)+a(z+y)}{(b+c)y-a(x+z)+a(x+z)}=\frac{(b+c)x}{(b+c)y}=\frac{x}{y},$$

(यदि $b+c=0$ न हो)।

यदि $b+c=0$ हो, तो यह $\frac{0}{0}$ अनिर्णीत (Indeterminate) आकार प्राप्त होता है।

उदाहरण 5. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$, सिद्ध करो कि,

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

मान लो कि दिये हुए समान व्यंजकों में से प्रत्येक $=k$;

$\therefore \qquad y+z=\frac{k}{a}, \;\; z+x=\frac{k}{b}, \;\; x+y=\frac{k}{c},$

$\therefore \quad y-z=(x+y)-(z+x)=k\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{k(b-c)}{bc}.$

$\therefore \quad \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{k}{abc}.$ इसी प्रकार, $\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{k}{abc}=\frac{x-y}{c(a-b)};$

$\therefore \quad \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$

उदाहरण 6. **यदि** $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ **हो, तो सिद्ध करो कि,**

$$\frac{b-c}{y-z}=\frac{c-a}{z-x}=\frac{a-b}{x-y}.$$

यहाँ, $\qquad x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0, \quad ....(1)$

और $\qquad (b-c)+(c-a)+(a-b)=0. \quad ....(2)$

$\therefore$ **वज्रगुणन द्वारा,**

$$\frac{b-c}{y-z}=\frac{c-a}{z-x}=\frac{a-b}{x-y}.$$

प्रश्नावली 109.

1. **यदि** $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$ **हो, तो सिद्ध करो कि,**

$$x+y+z=0.$$

2. **यदि** $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ **हो, तो सिद्ध करो कि** $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

3. **यदि** $\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$ **और** $a+b+c\neq 0$ **हो, तो सिद्ध करो कि** $a=b=c.$

4. $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0;$ **सिद्ध करो कि,**

$$\frac{b-c}{bz-cy}=\frac{c-a}{cx-az}=\frac{a-b}{ay-bx}.$$

5. यदि $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$ हो, तो सिद्ध करो कि $a+b+c=0$, अथवा $a=b=c$.

6. यदि $\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$ हो और $a+b+c\neq 0$, तो सिद्ध करो कि, $a=b=c$.

7. यदि $\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}+\frac{b+c}{a}=1$ हो और $b+c-a\neq 0$, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

8. $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$; सिद्ध करो कि,

$$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}.$$

9. यदि $\frac{a-b}{ay+bx}=\frac{b-c}{bz+cy}=\frac{c-a}{cx+az}=\frac{a+b+c}{ax+by+cz}$ हो और $a+b+c\neq 0$, तो सिद्ध करो कि उक्त अनुपातों में से हर एक $=\frac{1}{x+y+z}$.

10. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ होने पर सिद्ध करो कि,

$$\frac{x(y-z)}{b^2-c^2}=\frac{y(z-x)}{c^2-a^2}=\frac{z(x-y)}{a^2-b^2}.$$

11. $(a+b)(y+z-x)=(b+c)(z+x-y)=(c+a)(x+y-z)$; तो सिद्ध करो कि, $\frac{x-y}{c^2-a^2}=\frac{y-z}{a^2-b^2}=\frac{z-x}{b^2-c^2}$.

12. यदि $a=\frac{x}{y+z}$, $b=\frac{y}{z+x}$ और $c=\frac{z}{x+y}$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{x^2}{a-abc}=\frac{y^2}{b-abc}=\frac{z^2}{c-abc}.$$

13. यदि a और b दोनों असमान राशियाँ हों और $\frac{a}{1-a^2}=\frac{b+c}{1+bc}$ और $\frac{b}{1-b^2}=\frac{c+a}{1+ca}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{c}{1-c^2}=\frac{a+b}{1+ab}$.

14. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$; सिद्ध करो कि,

$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$.

15. यदि $\frac{x+y}{a+b}=\frac{y+z}{b+c}=\frac{z+x}{c+a}$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{2x+3y+5z}{2a+3b+5c}=\frac{3x+4y+5z}{3a+4b+5c}.$$

16. $x(b+c)=y(c+a)=z(a+b)$; तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{b^2-c^2}{y-z}=\frac{c^2-a^2}{z-x}=\frac{a^2-b^2}{x-y}.$$

17. यदि x और y दोनों असमान राशियाँ हों और $\frac{x-\frac{yz}{x}}{1-yz}=\frac{y-\frac{zx}{y}}{1-zx}$ हो, तो सिद्ध करो कि दोनों अनुपातों में से हरएक $=x+y+z$, अथवा $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$. (x^{-1} का अर्थ $\frac{1}{x}$. अनु० 313.)

18. यदि $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}.$$

19. $\frac{y+z-x}{b+c-a}=\frac{z+x-y}{c+a-b}=\frac{x+y-z}{a+b-c}$; सिद्ध करो कि,

$a:b:c=x:y:z$.

20. $a(x-y)+a^2=b(y-z)+b^2=c(z-x)+c^2$; सिद्ध करो कि,

इनमें से हर एक $=\frac{a+b+c}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$.

21. यदि $\dfrac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\dfrac{y}{(c-a)(c+a-2b)}$

$=\dfrac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$x+y+z=0.$$

22. यदि $x+y+z\neq 0$, तो सिद्ध करो कि x, y और z का मान चाहे किसी भी राशि से युक्त क्यों न हो, $\dfrac{ax+by}{by-cz}=\dfrac{ay+bz}{bz-cx}=\dfrac{az+bx}{bx-cy}$. अनुपातों के मान का कोई परिवर्त्तन नहीं होगा।

23. $y+z : z+x : x+y = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$, सिद्ध करो कि,

$$\frac{b-c}{y^2-z^2}=\frac{c-a}{z^2-x^2}=\frac{a-b}{x^2-y^2}.$$

24 यदि $\dfrac{x+2y}{r+2q}=\dfrac{y+2z}{p+2r}=\dfrac{z+2x}{q+2p}$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$x:y:z=2p+2q-r : 2q+2r-p : 2r+2p-q.$$

25. करीम और अज़ीज़ की अवस्था क्रम से 32 और 5 वर्ष की है। कम से कम कितने वर्ष के बाद सबसे पहले उनकी अवस्था का अनुपात 3 : 1 से कम होगा?

विविध प्रश्नावली V.

I.

1. हल करो:— $\dfrac{8x+7}{2x+1}-\dfrac{3x+3}{x+2}=1.$

[बायें पक्ष की दोनों भिन्नों में से हर एक को मिश्र संख्या के रूप में प्रकट करलो।]

2. गुणनखण्ड निकालो:—

(i) $10x^2+29x+2$, (ii) $6x^2+xyz-y^2z^2$.

3. 4 और 9 इकाइयों से युक्त ABCD आयत की DC (दीर्घवाहु) में M एक ऐसा विन्दु लिया गया है कि $DM = x$, तो प्रमाणित करो कि $AM^2 + BM^2 = 2x^2 - 18x + 113$.

4. सरल करो:— $(-3x^3y^2)^3$, $a^{p+q} \times a^{p-q}$, $(25 \cdot 3)^2 - (4 \cdot 7)^2$.

5. 50 आमों का दाम 3 रु० 12 आ० है। एक ऐसा लेखाचित्र खींचो जिससे 50 तक किसी भी संख्या के आमों का दाम निकाला जा सके। उस लेखाचित्र से 30 आमों का दाम निकालो और यह भी निकालो कि 1 रु० 8 आ० में कितने आम मिलेंगे?

II.

1. हल करो:—
$$\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = \frac{x+a}{2a+b+c} + \frac{x+b}{2b+c+a} + \frac{x+c}{2c+a+b}.$$

2. एक व्यक्ति के कोष में जितने रुपये थे उनमें से आधे से एक घोड़ा और तिहाई से एक गाड़ी खरीदने पर उसके पास 250 रु० बच रहे। बताओ उसके पास कितने रुपये थे।

3. किस प्रति सैंकड़ा व्याज की दर से x रु० n वर्ष में व्याज सहित y रु० हो जायगा?
$x = 100$, $y = 120$ और $n = 4$ लिखकर उत्तर की शुद्धता प्रमाणित करो।

4. हल करो:—
$$\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} + \frac{2a}{a^2+x^2} + \frac{2x^2}{(a-x)(a^2+x^2)} + \frac{2x^2}{(a+x)(a^2+x^2)}.$$

5. यदि $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$ हो, तो सिद्ध करो कि तीनों भिन्नों में से हर एक $\frac{1}{2}$, अथवा -1 के समान होगी?

III.

1. शेषफल नियम (Remainder Theorem) की सहायता से सिद्ध करो कि $6x^2 + 19x + 15$ का एक गुणनखण्ड $2x + 3$ है, और उक्त नियम की सहायता से a और b के ऐसे दो मान निकालो जिनसे $x - 1$ और $2x - 1$ दोनों राशियाँ $ax^4 - x^3 + 2x^2 - bx + 2$ के गुणनखण्ड हो सकें।

2. यदि $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$ हो, तो सिद्ध करो कि $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc.$

3. तीन संख्यायें 2, 3 और 5 की समानुपाती हैं। उनमें से बृहत्तम और लघुतम का योग तीसरी की अपेक्षा 24 अधिक है। तो उन तीनों संख्याओं को बताओ।

4. यदि $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$, तो $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$

5. तीन अङ्कों की एक संख्या के अङ्कों का योग 10 है और उक्त संख्या का मध्य अङ्क अन्य दोनों अङ्कों के योग के समान है। उस संख्या को उलट कर लिखने से 99 बढ़ जाता है। बताओ वह संख्या कौनसी है।

IV.

1. हल करो:— $\frac{ax+by}{2(a+b)}=c=\frac{ab(x-y)}{b^2-a^2}.$

2. यदि $F(x)=x^3-(x-1)^3$ हो, तो $F(x)-F(x-1)$ का मान बताओ। अन्तवाली राशि यदि $f(x)$ द्वारा सूचित हो, तो सिद्ध करो कि $f(x)-f(x-1)=6.$

3. रुपये, अठन्नियाँ और चवन्नियाँ मिलाकर एक आदमी के पास कुल 69 सिक्के हैं जिनका मूल्य 42 रु० है। यदि अठन्नियों के बदले उसके पास उसी मूल्य की चवन्नियाँ और चवन्नियों के बदले इकन्नियाँ होतीं तो उसके पास सिक्कों की संख्या 153 होती। बताओ उस आदमी के पास कौन से सिक्के किस मूल्य के थे।

4. यदि $a=\frac{x-y}{x+y}$, $b=\frac{y-z}{y+z}$ और $c=\frac{z-x}{z+x}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c}=1.$

5. चार संख्याओं का अनुपात 2 : 5 : 6 : 7 और वर्गों का योग 456 है; तो चारों संख्यायें बताओ।

V.

1. $x = by + cz$, $y = cz + ax$ और $z = ax + by$; सिद्ध करो कि
$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$$

2. हल करो:—
$$x+a=y+b=z+c,\ ax+by+cz=2(ab+bc+ca).$$

3. सरल करो:—
$$\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+3\right)\div\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right).$$

4. a, b, c, d राशियों के उत्तरोत्तर अनुपाती होने पर a^2+b^2, b^2+c^2 और c^2+d^2 राशियाँ भी उत्तरोत्तर अनुपाती होंगी।

5. एक डाकिये को 9 घंटे में आमग्राम से मदारीपुर आना जाना पड़ता है। इसी बीच में वह 3 घंटा मदारीपुर में विश्राम करता है। पहले की अपेक्षा प्रति घंटा $\frac{4}{5}$ मील अधिक वेग से चलने पर वह 1 घंटा विश्राम कर सकता है। बताओ उस आदमी की स्वाभाविक चाल और आमग्राम तथा मदारीपुर के बीच की दूरी क्या है।

VI.

1. एक ऐसी राशि बताओ जिससे सदा ही विषम संख्या सूचित हो। सिद्ध करो कि किसी भी तीन संलग्न संख्याओं के वर्गों के योग में 1 जोड़ने से योगफल सदा ही 12 से बाँटा जा सकता है।

2. A और B की वार्षिक आय की अनुपात 1 : 2 और उनके वार्षिक व्यय की अनुपात 4 : 9 है। वर्ष के अन्त में दोनों ने 300 रु० एकत्र किये; तो बताओ किसकी आय कितनी है।

3. यदि $\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=\frac{b-c}{a}$ और $\frac{z}{x}-\frac{x}{z}=\frac{c-a}{b}$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{a-b}{c}.$$

4. हल करो:— $\frac{x+y-z}{a+b}=\frac{y+z-x}{b+c}=\frac{z+x-y}{c+a}=a+b+c.$

5. यदि $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{b}{a}-\frac{d}{c}$ हो, तो सिद्ध करो कि,
$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{d^3}{c^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{c^3}{d^3}.$$

——:o:——

छब्बीसवाँ अध्याय

घाताङ्क नियम (Theory of Indices)

309. प्रारम्भिक घाताङ्क नियम।

m और n दो धनात्मक पूर्ण राशियाँ होने पर,

$$\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}}.$$

कारण, $a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots m$-गुणनखण्ड तक,

$a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots n$-गुणनखण्ड तक;

$\therefore\ a^m \times a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots (m+n)$-गुणनखण्ड तक

$= a^{m+n}$.

इस फल को प्रारम्भिक घाताङ्क नियम कहते हैं।

310. घाताङ्क नियम से प्राप्त सिद्धान्त।

घाताङ्कों के धनात्मक पूर्ण संख्या होने पर उक्त घाताङ्क नियम द्वारा निम्नलिखित फल पाये जाते हैं:—

I. $\mathbf{a^m \times a^n \times a^p \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a^{m+n+p+\ldots\ldots}}$

कारण, $a^m \times a^n \times a^p \times \ldots = (a \times a \times a \times \ldots m$-गुणनखण्ड तक$)$

$\times (a \times a \times a \times \ldots n$-गुणनखण्ड तक$)$

$\times (a \times a \times a \times \ldots\ldots p$ गुणनखण्ड तक$) \times \ldots$

$= a \times a \times a \times \ldots (m+n+p+\ldots)$-गुणनखण्ड तक

$= a^{m+n+p+\ldots\ldots}$

II. $\mathbf{a^m \div a^n = a^{m-n}}$

मान लो कि $m > n$

यहाँ, $a^m = a \times a \times \ldots\ldots m$-गुणनखण्ड तक

और $a^n = a \times a \times \ldots\ldots n$-गुणनखण्ड तक;

$$\therefore\ \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times \ldots\ldots m\text{-गुणनखण्ड तक}}{a \times a \times \ldots\ldots n\text{-गुणनखण्ड तक}}$$

$= a \times a \times \ldots\ldots (m-n)$-गुणनखण्ड तक

$= a^{m-n}$.

यदि $n > m$ हो, तो

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times \ldots\ldots m\text{-गुणनखण्ड तक}}{a \times a \times \ldots\ldots n\text{-गुणनखण्ड तक}}$$

$$= \frac{1}{a \times a \times \ldots\ldots (n-m)\text{-गुणनखण्ड तक}}$$ [यहाँ अंश व हर में से m गुणनखंड लुप्त किया गया है]

$$= \frac{1}{a^{n-m}}.$$

III. $(a^m)^n = a^{mn}$

कारण, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times \ldots\ldots n$-गुणनखण्ड तक

$= a^{m+m+m\ldots\ldots n\text{-पदों तक}}$ [I से]

$= a^{mn}$.

IV. $(ab)^m = a^m \times b^m$.

$(ab)^m = (ab) \times (ab) \times \ldots\ldots m$-गुणनखण्ड तक

$= (a \times a \times a \times \ldots\ldots m$-गुणनखण्ड तक$)$

$\times (b \times b \times b \times \ldots\ldots m$-गुणनखण्ड तक$)$

$= a^m \times b^m$.

V. $a^0 = 1$.

$a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$,

$\therefore \quad a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1.$

अतएव किसी भी राशि का 0 घात 1 के समान है ।

311. घाताङ्क नियम का सामान्यीकरण (Generalisation).

घाताङ्क नियम और उसके सिद्धान्तों को प्रमाणित करने के समय घाताङ्कों को धनात्मक पूर्ण (अभिन्न) संख्या माना गया है. किन्तु उनके भिन्न या ऋणात्मक होने पर अनु॰ 309 और 310 में वर्णन किये गये प्रमाणों को उपयोग में नहीं लाया जा सकता, क्योंकि m के धनात्मक पूर्ण संख्या न होने पर "$a^m = a \times a \times \ldots\ldots m$-गुणनखण्ड तक" इस वाक्य का कोई अर्थ नहीं होता ।

घाताङ्कों के पूर्ण संख्या न होने पर घाताङ्क नियम प्रमाणित नहीं किया जाता; किन्तु उन सारे क्षेत्रों में भी उक्त नियम का सत्य होना स्वीकार कर लिया गया है अर्थात् m और n पूर्ण (अभिन्न) या भिन्न, धनात्मक या ऋणात्मक किसी भी मान से युक्त क्यों न हों, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

इस सामान्यीकृत (Generalised) घाताङ्क नियम की सहायता से भिन्न या ऋणात्मक घाताङ्कवाली राशि का अर्थ निकाला जाता है।

312. भिन्न घातांक।

p और q के धनात्मक पूर्ण संख्याएँ होने पर $a^{\frac{p}{q}}$ द्वारा क्या ज्ञात होता है, यह निकालना होगा।

m और n किसी भी मान से युक्त क्यों न हों, मान लिया गया है कि $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

इसलिए, $$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}}.$$

इसी प्रकार, $$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times \ldots\ldots\ldots\ldots q\text{-गुणनखण्ड तक}$$
$$= a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\ldots q \text{ पदों तक}}$$
$$= a^{\frac{pq}{q}} = a^p;$$
$$\therefore \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p;$$

अर्थात्, $a^{\frac{p}{q}}$ का q-वाँ घात a^p के समान है। इसलिए a^p का q-वाँ मूल $a^{\frac{p}{q}}$.

अतएव, $a^{\frac{p}{q}}$ का अर्थ $\sqrt[q]{a^p}$ है।

चूँकि $$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \ldots\ldots p\text{-गुणनखंड तक}$$
$$= \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p;$$

इसलिए $a^{\frac{p}{q}}$, $a^{\frac{1}{q}}$ का p-वाँ घात अर्थात् $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$

अतएव, $\sqrt[q]{a^p}=(\sqrt[q]{a})^p$ अर्थात् किसी राशि का p-वाँ घात का q-वाँ मूल और q-वाँ घात का p-वाँ घात समान हैं।

फिर $\quad a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \cdots\cdots q$-गुणनखंड तक

$$=a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots\cdots q \text{ पदों तक}}$$

$$=a^{\frac{1}{q}\cdot q}=a.$$

इसलिए, $\quad \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q=a$, अथवा $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}.$

अतएव, $a^{\frac{1}{q}}$ द्वारा a के q-वाँ मूल का बोध होता है।

उदाहरण 1. $\quad (64)^{\frac{1}{3}}$ का मान निकालो।

$(64)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}=4.$

उदाहरण 2. $\quad (125)^{\frac{2}{3}}$ का मान निकालो।

$(125)^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{125})^2=5^2=25.$

दूसरे प्रकार से $\quad (125)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}=\sqrt[3]{15625}=25.$

313. ऋणात्मक घातांक।

m के धनात्मक राशि होने पर a^{-m} का अर्थ निकालना होगा।

m और n कैसी भी राशि क्यों न हों $a^m \times a^n=a^{m+n}$;

इसलिए, $\quad a^m \times a^{-m}=a^{m+(-m)}=a^{m-m}=a^0=1$;

$$\therefore \qquad a^{-m}=\frac{1}{a^m} \text{ और } a^m=\frac{1}{a^{-m}}.$$

अतएव, a^m और a^{-m} में से एक दूसरे की व्युत्क्रम (reciprocal) है।

314. सिद्ध करना होगा कि m और n के किसी भी मान के लिए $a^m \div a^n=a^{m-n}$ होगा।

m व n किसी भी मान से युक्त क्यों न हों,

$$a^m \div a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^m \times \frac{1}{a^n}$$

$$=a^m \times a^{-n} \qquad \text{अनु० 313.}$$

$$=a^{m-n}.$$

उदाहरण 1. $(16)^{-\frac{1}{2}}$ का मान निकालो।

$$(16)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(16)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}.$$

उदाहरण 2. $(243)^{-\frac{3}{5}}$ का मान निकालो।

$$(243)^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{(243)^{\frac{3}{5}}}=\frac{1}{\{(243)^{\frac{1}{5}}\}^{3}}=\frac{1}{(\sqrt[5]{243})^{3}}=\frac{1}{3^{3}}=\frac{1}{27}.$$

उदाहरण 3. सरल करो :— $\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt[4]{x}\times x^{-\frac{3}{4}}\times x^{-\frac{1}{3}}$.

दी हुई राशिमाला $x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{1}{4}}\times x^{-\frac{3}{4}}\times x^{-\frac{1}{3}}$

$$=x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}.$$

उदाहरण 4. सरल करो :— $\sqrt[3]{x}\times x^{-\frac{1}{2}}\times\sqrt{x^{-1\frac{1}{2}}}\times(\sqrt[12]{x})^{11}$.

दी हुई राशि $x^{\frac{1}{3}}\times x^{-\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{3}{4}}\times x^{\frac{11}{12}}$

$$=x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{11}{12}}=x^{0}=1.$$

315. सिद्ध करना होगा कि m व n के किसी भी मान के लिए $(a^m)^n=a^{mn}$ होगा।

(i) n एक धनात्मक पूर्ण संख्या होने पर उक्त फल की सत्यता अनु॰ 310 में प्रमाणित हुई है।

(ii) n एक धनात्मक भिन्न होने पर मानलो कि p, q दोनों ही धनात्मक पूर्ण संख्या और $n=\frac{p}{q}$ तो

$$(a^m)^n=(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^m)^p}$$ अनु॰ 312.

$$=\sqrt[q]{a^{mp}}$$ ∵ p एक धनात्मक पूर्ण संख्या है

$$=a^{\frac{pm}{q}}$$ अनु॰ 312.

$$=a^{mn},$$ क्योंकि $\frac{p}{q}=n$.

(iii) यदि n एक ऋणात्मक राशि है, तो मान लो कि q एक धनात्मक राशि और $n = -q$. इसलिए

$$(a^m)^n = (a^m)^{-q} = \frac{1}{(a^m)^q}$$ अनु० 313.

$$= \frac{1}{a^{mq}}$$ $\because$ q एक धनात्मक राशि है

$$= a^{-mq}$$ अनु० 313.

$$= a^{mn},$$ $\therefore$ $n = -q$.

उपसिद्धान्त। $\left(a^{m^{n-1}}\right)^m = a^{m^n}$.

कारण, m^{n-1} के बदले p लिखने से,

$$\left(a^{m^{n-1}}\right)^m = (a^p)^m = a^{pm},$$ अनु० 315.

किन्तु $pm = m^{n-1} \times m = m^{n-1+1} = m^n$.

$$\therefore \left(a^{m^{n-1}}\right)^m = a^{pm} = a^{m^n}.$$

टीका — $a^{m^{n-1}}$ व $(a^m)^{n-1}$ का मान एक नहीं है।

उदाहरण 1. $(2^{\frac{1}{3}})^6$ का मान निकालो।

$$(2^{\frac{1}{3}})^6 = 2^{\frac{1}{3}\times 6} = 2^2 = 4.$$

उदाहरण 2. $(8^{-\frac{3}{4}})^{\frac{4}{9}}$ का मान निकालो।

$$(8^{-\frac{3}{4}})^{\frac{4}{9}} = 8^{-\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}.$$

उदाहरण 3. सरल करो:— $\{(x^{-2})^{\frac{1}{3}}\}^{-\frac{3}{2}}$.

दी हुई राशि $= (x^{-2\times\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}} = (x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$

$$= x^{-\frac{2}{3}\times -\frac{3}{2}} = x^1 = x.$$

उदाहरण 4. सरल करो:— $\left(x^{4^{2n-1}}\right)^2$.

$$\left(x^{4^{2n-1}}\right)^2 = x^{(4^{2n-1}\times 2)} = x^{\{2^{2(2n-1)}\times 2\}}$$

$$= x^{(2^{4n-2}\times 2)} = x^{2^{4n-2+1}} = x^{2^{4n-1}}.$$

उदाहरण 5. सरल करोः—

$$a^{x-y}(b^{x+y})^{[illegible]}(c^{[illegible]})^{\frac{1}{x+y}} \div a\, b^{-}c\,.$$

दी हुई राशिमाला $a^{x-}.b^{x-y}.c^{x-y} \div a^{-y}.b^{+y}.c^{-}$

$$a^{x-y-y}.b^{[illegible]}.c^{x-y-y}$$

$$a^{-2}b^{[illegible]}\,c^{x-2y}.$$

316. m का मान चाहे कुछ ही क्यों न हो, सिद्ध करना होगा कि

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

(i) m धनात्मक पूर्ण संख्या होने पर अनु॰ 310 में फल प्रमाणित हो चुका है।

(ii) यदि m एक धनात्मक भिन्न हो, तो मान लो कि $m = \frac{p}{q}$ और p, q दोनों धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$(ab)^m = (ab)^{\frac{p}{q}}$$

$= \sqrt[q]{(ab)^p}$ अनु॰ 312.

$= \sqrt[q]{a^p b^p}$ ∵ p एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

$= \sqrt[q]{a^{mq} b^{mq}}$, ∵ $p = mq$.

किन्तु $a^{mq} = (a^m)^q$ और $b^{mq} = (b^m)^q$; अनु॰ 315.

इसलिए $\sqrt[q]{a^{mq} b^{mq}} = \sqrt[q]{(a^m)^q (b^m)^q}$

$= \sqrt[q]{(a^m b^m)^q}$ ∵ q एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

$$= (a^m b^m)^{\frac{q}{q}} = a^m b^m;$$

∴ m धनात्मक भिन्न होने पर $(ab)^m = a^m b^m$.

(*iii*) m एक ऋणात्मक राशि होने पर मानलो कि q एक धनात्मक राशि और $m=-q$ है, तो

$$(ab)^m=(ab)^{-q}=\frac{1}{(ab)^q} \qquad \text{अनु० 313.}$$

$$=\frac{1}{a^q b^q}$$

$$=\frac{1}{a^q}\times\frac{1}{b^q} \qquad \because q \text{ एक धनात्मक राशि है।}$$

$$=a^{-q}\times b^{-q} \qquad \text{अनु० 313.}$$

$$=a^m b^m.$$

अतएव, m का मान चाहे कुछ ही क्यों न हो, $(ab)^m=a^m b^m$.

उपसिद्धान्त 1. $(abcd\ldots)^m=a^m b^m c^m d^m\ldots$

कारण, $$(abcd\ldots)^m=(a\times bcd\ldots)^m$$

$$=a^m\times(bcd\ldots)^m$$

$$=a^m\times b^m\times(cd\ldots)^m$$

$$=a^m b^m c^m d^m\ldots$$

उपसिद्धान्त 2. m, n, p का कुछ भी मान क्यों न हो,

$$(a^m b^n)^p=a^{mp}b^{np}.$$

उपसिद्धान्त 3. m का मान चाहे कुछ ही क्यों न हो,

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^m=\frac{\mathbf{a}^m}{\mathbf{b}^m}.$$

क्योंकि, $$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(a\times\frac{1}{b}\right)^m=(ab^{-1})^m \qquad \text{अनु० 313.}$$

$$=a^m.(b^{-1})^m \qquad \text{अनु० 316.}$$

$$=a^m b^{-m} \qquad \text{अनु० 315.}$$

$$=a^m\times\frac{1}{b^m} \qquad \text{अनु० 313.}$$

$$=\frac{a^m}{b^m}.$$

उदाहरण 1. सरल करो:—

$$\sqrt[3]{a^4b^6c^3}\times\sqrt[4]{a^2b^4c^3}\times\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}.$$

दी हुई राशिमाला $=\left(a^4b^6c^3\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(a^2b^4c^3\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}$

$$=a^{\frac{4}{3}}b^2c\times a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{3}{4}}\times a^{-3}b^{-3}c^{2}$$

$$=a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-3}\cdot b^{2+1-3}\cdot c^{1+\frac{3}{4}+2}$$

$$=a^{-\frac{7}{6}}b^0c^{\frac{15}{4}}=a^{-\frac{7}{6}}c^{\frac{15}{4}}.$$

उदाहरण 2. सरल करो:— $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}\div\left(xy^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}.$

दी हुई राशिमाला $=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}y^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(xy^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}y^{(-1)\times\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{(-1)\times\frac{2}{3}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}$

$$=x^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}y^0=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

उदाहरण 3. सरल करो:— $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{-4}\times\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^{4}.$

दी हुई राशिमाला $=\dfrac{x^{\frac{2}{5}\times(-4)}}{y^{\frac{3}{4}\times(-4)}}\times\dfrac{x^{\frac{3}{4}\times4}}{y^{\frac{2}{5}\times4}}=\dfrac{x^{-\frac{8}{5}}}{y^{-3}}\times\dfrac{x^3}{y^{\frac{8}{5}}}=\dfrac{x^{-\frac{8}{5}}\times x^3}{y^{-3}\times y^{\frac{8}{5}}}$

$$=\frac{x^{-\frac{8}{5}+3}}{y^{-3+\frac{8}{5}}}=\frac{x^{\frac{7}{5}}}{y^{-\frac{7}{5}}}=x^{\frac{7}{5}}y^{\frac{7}{5}}=(xy)^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{(xy)^7}.$$

प्रश्नावली 110.

निम्नलिखित राशियों का मान बताओ:—

1. $8^{\frac{1}{3}}$. 2. $(81)^{\frac{1}{4}}$ 3. $(1024)^{\frac{1}{5}}$ 4. $\sqrt[3]{8^2}$.

5. $(16)^{\frac{3}{4}}$. 6. $(32)^{\frac{4}{5}}$ 7. $9^{-\frac{5}{2}}$. 8. $4^{\frac{3}{2}}$.

9. $(27)^{\frac{4}{3}}$. 10. $4^{\frac{3}{2}}\times27^{\frac{2}{3}}$ 11. $(25\times36)^{-\frac{3}{2}}$,

12. $8^{-\frac{4}{3}} \times \frac{1}{(16)^{-\frac{3}{4}}}$ 13. $4^2 \times 8^{-2}$ 14. $\sqrt[3]{9} \times 3^{1}$.

15. $(125)^{-\frac{1}{3}} \div (25)^{-\frac{1}{2}}$.

सरल करो :—

16. $\sqrt[3]{a^6}$.   17. $\sqrt[4]{x^{-4}}$.   18. $\left(\frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{9}$.

19. $\left\{\frac{1}{(x^2)^3}\right\}^{1}$ 20. $\left\{\frac{1}{(x^{-3})^{\frac{1}{3}}}\right\}^{2}$ 21. $\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{5}}$.

22. $\left(\frac{1}{(a^{-5})^{\frac{2}{5}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.   23. $\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$.

24. $\left(\frac{1}{x^{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^{1}$.   25. $\{(x^{a+b-c} \times x^{a-b+c})^{bc}\}^{\frac{1}{5}}$.

26. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$.   27. $\left(\frac{a^{5}}{x^{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{a^{2}}{x^{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

28. $\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt{x^3} \times \sqrt[5]{x^4}$.   29. $\sqrt{x} \times x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{6}} \times x^{-\frac{2}{3}}$.

30. $(x^{3}y^{2})^{-\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$.   31. $\sqrt[3]{xy^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}} \div (xyz)^{\frac{1}{9}}$.

32. $(a^2\sqrt{x^{-6}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{4}\sqrt{x^{3}})^{-1}$.   33. $\sqrt[3]{a^{3}\sqrt{x^{-6}}} \div (a^{-1}x)^{-1}$.

34 $(a^{10}b^{15}c^{20})^{-\frac{1}{5}} \times (a^2b^4c^{6})^{-\frac{1}{2}}$.

35. $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

36. $a^{x-y} . a^{y-z} . a^{z-x}$.   37. $2^{a-b} . 2^{b-c} . 2^{c-a}$.

38. $(a-b)^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}$.   39. $\sqrt[3]{a-b} . (a-b)^{\frac{1}{2}} . \sqrt[4]{(a-b)^{11}}$

40. $\left(\frac{x^3y^2z^4}{x^{-3}y^{-2}z^{-4}}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(x^3y^{\frac{3}{2}}z^{\frac{9}{2}}\right)^{2}$.

41. $\frac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1}} \left\{\frac{8^{\frac{n}{3}}}{4}\right\}^{-n}$.

42. $\frac{2^{m+1} . 3^{2m-n} . 5^{m+n} . 6^n}{6^m . 10^{n+2} . 15^m}$.

43 $\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{x^{\frac{8}{5}}}{y^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{4}}.$

44. $(8a^3)^{-\frac{1}{3}} \times (16b^4)^{-\frac{1}{4}} \times (243c^5)^{-\frac{1}{5}} \div (144a^2b^2c^2)^{-\frac{1}{2}}$

45. $\left(\frac{m}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{mn} \times \frac{\sqrt{m^3n^2}}{\sqrt[3]{m^2n^3}} \times (mn^{27})^{-1\frac{1}{2}}.$

46. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}.$

47. $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{6} \times \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{7}{12}} \times \left(\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{4}.$

48. $\dfrac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^n\left(a-\frac{1}{b}\right)^m}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^n\left(b-\frac{1}{a}\right)^m}.$

49. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+c^2+bc} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+a^2+ca}.$

50 $\frac{a^{m+n}}{a^{l}} \times \frac{a^{n+l}}{a^{2m}} \times \frac{a^{l+m}}{a^{2n}}.$

51 $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{n}}(a^q)^{\frac{1}{m}}\right\}^{nm}}{\left\{\sqrt[q]{b^n}(\sqrt[m]{b})^q\right\}^{qm}} \div \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^q\right\}^r.$

52. यदि $p=a^x$, $q=a^y$ और $a^2=(p^yq^x)^z$ हो, तो सिद्ध करो कि $xyz=1$.

317. विविध प्रश्नों का हल ।

ऊपर वर्णन किये गये नियमों से सम्बन्ध रखने वाले प्रश्नों का हल नीचे दिया गया है ।

उदाहरण 1. $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ को $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ से गुणा करो ।

$$(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=(x^{\frac{1}{3}})^2-(y^{\frac{2}{3}})^2=x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{4}{3}}.$$

उदाहरण 2. $x^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{4}{5}}$ को $x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}$ से भाग करो।

$$x^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{4}{5}}=(x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}})(x^{\frac{2}{5}}-y^{\frac{2}{5}})=(x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}})(x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}})(x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}).$$

इसलिए निर्णय भागफल $=(x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}})(x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}})$

$$=x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{3}{5}}.$$

उदाहरण 3. $x^{\frac{3}{8}}-y^{\frac{3}{8}}$ और $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$ का म० स० निकालो।

अनु० 170 में वर्णित प्रक्रिया के अनुसार म० स० निकाला जाता है। निम्नलिखित रूप में भी म० स० की क्रिया सम्पन्न की जाती है:—

$$x^{\frac{3}{8}}-y^{\frac{3}{8}}=(x^{\frac{1}{8}})^3-(y^{\frac{1}{8}})^3$$
$$=(x^{\frac{1}{8}}-y^{\frac{1}{8}})\{(x^{\frac{1}{8}})^2+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+(y^{\frac{1}{8}})^2\}$$
$$=(x^{\frac{1}{8}}-y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}).$$

$$x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}=(x^{\frac{1}{4}})^2+(y^{\frac{1}{4}})^2+2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$
$$=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^2-(x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}})^2$$
$$=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}).$$

इसलिए, निर्णय म० स० $=x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}.$

उदाहरण 4. निम्नलिखित दोनों राशियों का गुणनफल निकालो:—

(i) $x+13\sqrt{x}+40$.

(ii) $a^{3n}-64$.

(i) $x+13\sqrt{x}+40=x+5\sqrt{x}+8\sqrt{x}+40$

$$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)+8(\sqrt{x}+5)$$
$$=(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}+8).$$

(ii) $a^{3n}-64=(a^n)^3-4^3$

$$=(a^n-4)(a^{2n}+4a^n+16).$$

उदाहरण 5. सरल करो $\dfrac{a^2-b^2}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}\times\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}\times\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{a-b}$.

दिया हुआ व्यंजक $=\dfrac{(a+b)(a-b)(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})}{(a-b)(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}$

$=(a+b)(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})$.

उदाहरण 6. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$ से गुणा करो।

दोनों व्यंजकों को a के घात के अवरोह-क्रम से लिखने से निम्नलिखित रूप मे गुणा की क्रिया सम्पन्न की जाती है:—

$$\begin{array}{l}
a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\\
a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\\
\hline
a+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\\
\quad -a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-b\\
\hline
a \qquad\qquad\qquad\qquad -b
\end{array}$$

निर्णेय गुणनफल $=a-b$.

उदाहरण 7. $x^{-4}+x^{-3}-24x^{-2}-35x^{-1}+57$ को $x^{-2}+2x^{-1}-3$ से भाग दो।

दोनों व्यंजकों को x के घात के अवरोह-क्रम के अनुसार लिखने से भाग की क्रिया इस प्रकार सम्पन्न की जाती है:—

$$\begin{array}{l}
x^{-2}+2x^{-1}-3\,)\,x^{-4}+x^{-3}-24x^{-2}-35x^{-1}+57\,(\,x^{-2}-x^{-1}-19\\
\qquad\qquad\qquad\; x^{-4}+2x^{-3}-3x^{-2}\\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad -x^{-3}-21x^{-2}-35x^{-1}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -x^{-3}-2x^{-2}+3x^{-1}\\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -19x^{-2}-38x^{-1}+57\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -19x^{-2}-38x^{-1}+57
\end{array}$$

निर्णेय भागफल $=x^{-2}-x^{-1}-19$

प्रश्नावली 111.

गुणा करो—

1. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ से ।

2. $x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{3}{8}}+1$ को $x^{\frac{3}{8}}-1$ से ।

3. $x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+1$ को $x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}}+1$ से ।

4. $a^{-2}+b^{-2}$ को $a^{-4}-a^{-2}b^{-2}+b^{-4}$ से ।

5. $a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+ax$ को $a^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$ से ।

भाग करो—

6. $x^{-3}+y^{-3}$ को $x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$ से ।

7. $x^{-\frac{4}{3}}-y^{-\frac{4}{3}}$ को $x^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ से ।

8. $x^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{4}{3}}$ को $x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ से ।

9. $a+ab^{-1}+b^{-1}+2ab^{-\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{2}}b^{-1}+2a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$ को $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}$ से ।

10. $2a^{2n}-15a^{-2n}+5a^{-n}-6$ को $a^{n}-3a^{-n}$ से ।

निम्नलिखित व्यंजकों का म० स० निकालो—

11. $3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2$, $3x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}$ और $3x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}-4$.

12. $4x+3x^{\frac{1}{2}}-10$ और $4x^{\frac{3}{2}}+7x-3x^{\frac{1}{2}}-15$.

13. $x^{-3}+3x^{-2}-9x^{-1}+5$ और $x^{-3}-19x^{-1}+30$.

14. $x^{-\frac{4}{5}}-9a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{5}}+10ax^{-\frac{1}{5}}$ और $a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{3}{5}}-a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{5}}-4a^{\frac{4}{3}}$.

निम्नलिखित व्यंजकों का ल० स० अ० निकालो—

15. $3x^{-2}-10a^{-3}x^{-1}+7a^{-6}$ और $x^{-3}-5a^{-3}x^{-2}+7a^{-6}x^{-1}-3a^{-9}$.

16. $6x^{\frac{3}{4}}+7x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{1}{4}}+2$ और $8x+6x^{\frac{3}{4}}-15x^{\frac{1}{2}}+9x^{\frac{1}{4}}-2$.

निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखंड निकालो—

17. $x^{-\frac{3}{8}}+y^{\frac{3}{8}}$.

18. $a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}+1$.

19. $a^{\frac{2}{3}}+15a^{\frac{1}{3}}+56$.

20. $a^{-\frac{3}{4}}-17x^{-\frac{3}{8}}+72$.

21. $a^{-\frac{5}{8}}-7a^{-\frac{5}{8}}x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{4}{3}}$.

22. $a^{-\frac{2}{5}}(b-c^{\frac{1}{4}})+b^2(c^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{5}})+c^{\frac{1}{2}}(a^{-\frac{1}{5}}-b)$.

23. $a+a^{-1}+2a^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}+3$.

24. $4(a^{-1}b-x^{-2}y^{-3})^2-(a^{-2}-x^{-4}-y^{-6}+b^2)^2$.

25. $12x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}-y^{-\frac{4}{5}}$.

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्ग निकालो—

26. $a^{-1}+x^{-1}$.

27. $a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}$.

28. $a^{-1}+a+1$.

29. $a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}$.

सरल करो—

30. $\dfrac{a^{2n}-x^{-2n}}{a^n+x^{-n}}$.

31. $\dfrac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}}$.

32. $\dfrac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}}+\dfrac{1}{1+x^{n-m}+x^{n-p}}+\dfrac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}}$.

33. $\left(\dfrac{x^{-2}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{-2}-y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x^{-2}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{-2}+y^{\frac{2}{3}}}\right)\div\left(\dfrac{x^{-1}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{-1}-y^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{-1}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{-1}+y^{\frac{1}{3}}}\right)$.

34. $\dfrac{x^{-3n}}{x^{-n}-1}-\dfrac{x^{-2n}}{x^{-n}+1}-\dfrac{1}{x^{-n}-1}+\dfrac{1}{x^{-n}+1}$.

35. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}$.

36. यदि $x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $2x^3+6x=3$.

37. यदि $a^x=b^y$ और $b^x=a^y$ हो, तो सिद्ध करो कि $a=b$.

38. यदि $a^x=z^y$ और $a^z=z^x$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^2=yz$.

39. सिद्ध करो कि $\dfrac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}$

$$=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\dots\dots\dots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}).$$

40. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ को $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ से गुणा करो और $x=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ होने पर x^3-6x का मान निकालो ।

318. घाताङ्कित समीकरण (Exponential Equation).

बहुत से समीकरणों में अव्यक्त राशियाँ घात के घाताङ्क के रूप में वर्त्तमान रहती हैं। ऐसे समीकरणों को घाताङ्कित समीकरण कहते हैं।

जैसे, $a^x = b$ एक घाताङ्कित समीकरण है।

नीचे दिये हुए उदाहरणों से एक या एक से अधिक अव्यक्त राशियों के घाताङ्कित समीकरण को हल करने की प्रणाली भली भाँति स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 1. हल करो:— $2^{x+7} = 4^{x+2}$.

$4^{x+2} = (2^2)^{x+2} = 2^{2x+4}$; $\quad \therefore \quad 2^{x+7} = 2^{2x+4}$;

$\therefore \quad x + 7 = 2x + 4$; $\quad \therefore \quad x = 3$.

उदाहरण 2. हल करो:— $2^{2x+3} + 4^x = 36$.

$2^{2x+3} + 4^x = 36$, या $2^{2x}.2^3 + 2^{2x} = 36$,

या $\quad 2^{2x}(2^3 + 1) = 36$, या $\quad 2^{2x} \times 9 = 36$;

$\therefore \quad 2^{2x} = 4 = 2^2$; $\quad \therefore \quad 2x = 2$, या $x = 1$.

उदाहरण 3. हल करो:— $3^{x-2}.5^{x-3} = 675$.

यह समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है—

$$\frac{3^x}{3^2} . \frac{5^x}{5^3} = 675;$$

$\therefore \quad 3^x.5^x = 675 \times 3^2 \times 5^3 = 5^2 \times 3^3 \times 3^2 \times 5^3 = 3^5.5^5$,

या $\quad (3.5)^x = (3.5)^5$; $\quad \therefore \quad x = 5$.

उदाहरण 4. हल करो:— $a^{x-3} = b^{x-3}$.

$a^{x-3} = b^{x-3}$;

$\therefore \quad \frac{a^{x-3}}{b^{x-3}} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$, अर्थात् $\left(\frac{a}{b}\right)^{x-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$;

$\therefore \quad x - 3 = 0$; $\quad \therefore \quad x = 3$.

उदाहरण 5. हल करो:— $\left.\begin{array}{r} 2^x.2^{y+2} = 16 \\ 3^{2x+1}.3^{y-1} = 27. \end{array}\right\}$

$2^x.2^{y+2} = 16$; $\quad \therefore \quad 2^{x+y+2} = 2^4$;

$\therefore \quad x + y + 2 = 4$, ...(1)

$3^{2x+1}.3^{y-1} = 27$; $\quad \therefore \quad 3^{2x+y} = 3^3$;

$\therefore \quad 2x + y = 3$. ....(2)

(1) और (2) को हल करने से,

$x = 1, \; y = 1$.

उदाहरण 6. हल करो:— $\left.\begin{aligned} x^y &= y^x, \\ x &= 2y. \end{aligned}\right\}$ ....(1) ....(2)

(1) में $x=2y$ लिखने से, $(2y)^y=y^{2y}$, अथवा $2^y.y^y=y^{2y}$,

या, $2^y=\dfrac{y^{2y}}{y^y}=y^{2y-y}=y^y$; $\therefore \quad y=2$,

$\therefore$ (2) से, $x=4$.

उदाहरण 7. हल करो:— $\left.\begin{aligned} a^x+b^y &= a+b, \\ a^{x+2}+b^{y+2} &= a^3+b^3. \end{aligned}\right\}$ ....(1) ....(2)

(1) से, $(a^x-a)+(b^y-b)=0$ ....(3)

(2) से, $a^x a^2+b^y.b^2=a^3+b^3$,

या, $a^2(a^x-a)+b^2(b^y-b)=0$. ....(4)

(3) और (4) में a^x-a के बदले u, और b^y-b के बदले v लिखने से,

$u+v=0$ और $a^2u+b^2v=0$;

हल करने से, $u=0$, $v=0$; $\therefore \quad u=a^x-a=0$; $\therefore \quad x=1$,

और $v=b^y-b=0$; $\therefore \quad y=1$.

उदाहरण 8. हल करो:— $2^x+3^y+5^z=10$ ....(1)

$2^{x+1}+3^{y+1}+5^{z+1}=38$ ....(2)

$2^{x+2}+3^y+5^z=16$. ....(3)

समीकरण (2) और (3) को क्रमशः

$2.2^x+3.3^y+5.5^z=38$,

और $2^2.2^x+3^y+5^z=16$ लिखा जाता है ।

$\therefore$ 2^x, 3^y और 5^z के बदले क्रमशः u, v और w लिखने से दिये हुए तीनों समीकरण निम्नलिखित रूप धारण कर लेते हैं:—

$u+v+w=10$, ...(4)

$2u+3v+5w=38$, ...(5)

$4u+v+w=16$. ....(6)

(4), (5) और (6) को हल करने से,

$u=2$, $v=3$, $w=5$.

$\therefore \quad 2^x=u=2=2^1$; $\therefore \quad x=1$;

$3^y=v=3=3^1$; $\therefore \quad y=1$;

$5^z=w=5=5^1$; $\therefore \quad z=1$.

प्रश्नावली 112.

हल करो:—

1. $3^{x+2}=81.$ 2. $4^{x}=2^{x+5}.$

3. $8^{x-1}=2^{x+5}.$ 4. $2^{x+2}=\frac{1}{2}.4^{2x-3}.$

5. $3^{5x-2}=9^{\frac{1}{2}x}.$ 6. $3^{x-1}+1=28.$

7. $3^{2x-1}+9=36.$ 8. $2^{x+2}+2^{x+3}=24.$

9. $5^{x-2}=5^{x}-24.$ 10. $2^{x-2}.3^{x-3}=2.$

11. $(p-q)^{x-a}+q=p.$ 12. $\left(\frac{a}{b}\right)^{x-1}=\left(\frac{b}{a}\right)^{x-2}.$

13. $\left.\begin{array}{l} a^{2x}.a^{3y+2}=a^{15} \\ b^{2y}.b^{3x+5}=b^{17} \end{array}\right\}.$ 14. $\left.\begin{array}{l} 3^{4x}\,3^{3y+2}=3 \\ 4^{4y}\,4^{3x+11}=4^{5} \end{array}\right\}.$

15. $\left.\begin{array}{l} a^{x}.a^{y+1}=a^{7} \\ a^{2y}.a^{3x+5}=a^{20} \end{array}\right\}.$ 16. $\left.\begin{array}{l} 3^{4x}=9^{4y-\frac{2}{3}x} \\ 2^{6y-x}=8^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}.$

17. $\left.\begin{array}{l} 3^{x+1}+2^{y}=35 \\ 3^{x}+2^{y+2}=41 \end{array}\right\}.$ 18. $\left.\begin{array}{l} 2^{x-1}+3^{y-1}=5 \\ 3.\,2^{x-2}+2.\,3^{y-3}=3\frac{2}{3} \end{array}\right\}.$

19. $\left.\begin{array}{l} 2^{x-y}.3^{x-2y}=2^{y} \\ 3^{x-2}.5^{x-1}=5^{3y+1}.3^{3y} \end{array}\right\}.$ 20. $\left.\begin{array}{l} 2^{x}+3^{y}=11 \\ 3^{y}-2^{x}=-5 \end{array}\right\}.$

21. $\left.\begin{array}{l} a^{x}+b^{y}=a+b \\ a^{x-1}+b^{y-1}=2 \end{array}\right\}.$ 22. $\left.\begin{array}{l} 3^{x}+5^{y}=8 \\ 3^{x+2}+5^{y+2}=152 \end{array}\right\}.$

23. $\left.\begin{array}{l} 4^{x+y-z}=1 \\ 5^{4x-2y+z}=125 \\ 9^{x+2y+z}=3^{6x+6y+z} \end{array}\right\}.$

24. $\left.\begin{array}{l} a^{x}+b^{y}+c^{z}=3 \\ la^{x}+mb^{y}+nc^{z}=l+m+n \\ l^{2}a^{x}+m^{2}b^{y}+n^{2}c^{z}=l^{2}+m^{2}+n^{2} \end{array}\right\}.$

25. $\left.\begin{array}{l} 2^{x+y+z}=8^{x+z-y} \\ 5^{3y+2}=25^{x+z} \\ 3^{2z+2x+y}=9^{2z+y} \end{array}\right\}.$ 26. $\left.\begin{array}{l} a^{x}=(x+y+z)^{y} \\ a^{y}=(x+y+z)^{z} \\ a^{z}=(x+y+z)^{x} \end{array}\right\}.$

27. $\left.\begin{array}{l} a^{x-4}.\,a^{1+y}=a \\ b^{y-z}.\,b^{z-x}=b^{2} \\ c^{y-1}.\,c^{x-z}=c^{3} \end{array}\right\}.$

——:o:——

सत्ताईसवाँ अध्याय

घातमूल क्रिया (Evolution), वर्गमूल (Square Root).

319. घातमूल क्रिया (Evolution).

किसी राशि के मूल निकालने की प्रणाली को घातमूल क्रिया कहते हैं।

320. वास्तव (Real) और कल्पित (Imaginary) राशि ।

$+x$ और $-x$ दोनों ही का वर्ग x^2 है, अतएव राशि धनात्मक या ऋणात्मक चाहे जो हो उनका वर्ग सदा ही धनात्मक होगा। ऐसी कोई राशि नहीं है जिसका वर्ग ऋणात्मक हो अर्थात् ऋणात्मक राशि के वर्गमूल को असत्य या कल्पित समझना होगा; जैसे, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-x^2}$; ये दोनों कल्पित राशियाँ हैं।

चूँकि $(x)^4=(-x)^4=x^4$, $(x)^6=(-x)^6=x^6$, इत्यादि; इसलिए समघात से युक्त धनात्मक या ऋणात्मक राशि सदा ही धनात्मक होगी। ऐसी कोई भी राशि नहीं है जिसका समघात ऋण हो। अतएव ऋणात्मक राशि का समघूल कल्पित है। जैसे $\sqrt[4]{-3}$, $\sqrt[6]{-x^2}$ ये कल्पित राशि हैं। जो राशियाँ कल्पित नहीं हैं, वे वास्तव हैं।

$\sqrt{-1}$ कल्पित राशि साधारणतः 'i' अक्षर के द्वारा सूचित होती है।

अतएव $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\times\sqrt{2}=i\sqrt{2}$; $\sqrt{-x^2}=\sqrt{-1}\times\sqrt{x^2}$ $=ix$ इत्यादि।

एक वास्तव और एक कल्पित राशि का योग और अन्तर दोनों ही कल्पित राशियाँ होती हैं। जैसे, a एक वास्तव राशि और ib एक कल्पित राशि होने पर, $a+ib$ एक कल्पित राशि और $a-ib$ भी एक कल्पित राशि है।

$a+ib$, $a-ib$, $x+iy$ आदि आकार की राशियाँ मिश्र-राशि (Complex Quantity) भी कही जाती हैं। ia, ix आदि आकार की राशियों को कभी कभी शुद्ध कल्पित (Pure Imaginary) राशि भी कहते हैं। शुद्ध-कल्पित राशि का वर्ग वास्तव राशि है। जैसे, $(ia)^2=-a^2$, इत्यादि।

321. मूलों के चिह्न ।

$$(+x)^2=+x^2;\ (-x)^2=+x^2,$$
$$(+x)^4=+x^4,\ (-x)^4=+x^4 \text{ इत्यादि ।}$$

उक्त फलों से ज्ञात होता है कि किस राशि का मूल धनात्मक भी हो सकता है और ऋणात्मक भी । जैसे, x^2 का वर्गमूल $+x$ या $-x$.

फिर, $(+x)^3=+x^3, (-x)^3=-x^3,$
$$(+x)^5=+x^5,\ (-x)^5=-x^5, \text{ इत्यादि ।}$$

उक्त फलों से ज्ञात होता है कि किस राशि का और उसके घातक्रिया का चिह्न एक ही है ।

322. कोई राशि सरल या मिश्र चाहे कैसी हो क्यों न हो, उसके दो वर्गमूल, तीन घनमूल, चार चतुर्थमूल और साधारणतः n संख्या तक nवाँ मूल रहता है । ये मूल वास्तव और कल्पित दोनों ही हो सकते हैं । अगले उदाहरणों से केवल एक एक करके वास्तव मूल निकाले जायँगे ।

चूँकि $\sqrt{x^2}=\pm x$, इसलिए किसी राशि के दोनों वर्गमूल विपरीत चिह्नों से युक्त होते हैं । किन्तु उनका परममान (Absolute Value) परस्पर समान है । साधारण तौर से सरल राशि का धनात्मक वर्गमूल और मिश्र राशि के दोनों वर्गमूलों में से जिसका प्रथम पद धनात्मक होता है वही निकाला जाता है । निर्णय मूल के पदों के चिह्न परिवर्तित कर देने पर ही दूसरा मूल पाया जाता है ।

323. सरल राशियों का मूल निकालना ।

घाताङ्क नियम की सहायता से सरलतापूर्वक राशियों का मूल निकाला जाता है ।

उदाहरण 1. $-27a^6b^3c^4$ का घनमूल निकालो ।

$$\sqrt[3]{-27a^6b^3c^4}=(-27a^6b^3c^4)^{\frac{1}{3}}$$
$$=(-27)^{\frac{1}{3}}(a^6)^{\frac{1}{3}}(b^3)^{\frac{1}{3}}(c^4)^{\frac{1}{3}} \quad \text{अनु० 316.}$$
$$=-3a^2bc^{\frac{4}{3}}. \quad \text{अनु० 315.}$$

उदाहरण 2. $64x^4y^{-2}z^{-5}$ का षष्ठमूल निकालो ।

$$\sqrt[6]{64x^4y^{-2}z^{-5}}=(64x^4y^{-2}z^{-5})^{\frac{1}{6}}$$
$$=2x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{5}{6}}.$$

प्रश्नावली 113.

निम्नलिखित राशियों का वर्गमूल निकालो:—

1. $9a^6b^2$. 2. $16x^4y^6z^8$. 3. $64x^4y^2z^{10}$.

4. $\dfrac{9x^2y^4}{16a^4b^6}$. 5. $\dfrac{36a^8m^7}{25b^5n^6}$. 6. $\dfrac{7a^{-2}b^5}{8x^4y^{-4}}$.

7. $\dfrac{27x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{75a^8b^4}$. 8. $\dfrac{20x^{-2}y^{-4}}{45a^{-3}b^{-6}}$. 9. $\dfrac{12a^2b^4}{27x^3y^3}$.

सरल करो:—

10. $\sqrt[3]{8a^3b^3c^3}$. 11. $\sqrt[3]{27x^3y^6z^2p^2q^3}$.

12. $\sqrt[4]{16p^8q^4x^2y^2}$. 13. $\sqrt[5]{243a^{10}b^{15}c^{-10}d^{-5}}$.

14. $\sqrt[n]{x^{-n}y^{5n}z^{4n}}$. 15. $\sqrt[p]{a^{2p}b^{3p}c^{-p}x^{-4p}}$.

324. मिश्र राशियों का वर्गमूल निकालना ।

नीचे वर्णन की गई दोनों प्रणालियों में से किसी एक की सहायता से मिश्र राशियों का वर्गमूल निकाला जाता है ।

पहली प्रणाली—पूर्ण वर्ग के रूप में प्रकट करके मिश्र राशि का वर्गमूल निकाला जाता है ।

उदाहरण 1. $9a^2-30ab+25b^2$ का वर्गमूल निकालो ।

$$9a^2-30ab+25b^2=(3a)^2-2(3a)(5b)+(5b)^2$$
$$=(3a-5b)^2$$

∴ निर्णय वर्गमूल $=3a-5b.$

टीका— $-(3a-5b)$, अर्थात् $(5b-3a)$ भी एक वर्गमूल है ।

उदाहरण 2. $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$ का वर्गमूल निकालो।

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}+1\right)^2.$$

$\therefore$ निर्णेय वर्गमूल $=x-\frac{1}{x}+1.$

उदाहरण 3. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ का वर्गमूल निकालो।

दी हुई राशि के पहले पद के चार गुणनखण्डों को दो दो करके इस प्रकार रक्खो कि उनमें से एक जोड़े के गुणनफल का x^2 और x सम्बन्धी पद क्रम से दूसरे जोड़े के गुणनफल के x^2 और x सम्बन्धी पद के समान हों; अतएव, दी हुई राशि

$$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$
$=a(a+2)+1$ [x^2+3x के बदले a लिखने से]
$$=a^2+2a+1=(a+1)^2$$
$=(x^2+3x+1)^2$; $\because$ $a=x^2+3x.$

$\therefore$ निर्णेय वर्गमूल $=x^2+3x+1.$

उदाहरण 4. $3(3a^2-2ab+b^2)(a^2+3b^2)+b^2(a+4b)^2$ का वर्गमूल निकालो।

दिया हुआ व्यंजक

$$=3(3a^4+3b^4+10a^2b^2-2a^3b-6ab^3)+b^2(a^2+8ab+16b^2)$$
$$=9a^4-6a^3b+31a^2b^2-10ab^3+25b^4$$
$$=(9a^4+25b^4+30a^2b^2)-2ab(3a^2+5b^2)+a^2b^2$$
$$=(3a^2+5b^2)^2-2ab(3a^2+5b^2)+(ab)^2$$
$$=(3a^2-ab+5b^2)^2.$$

$\therefore$ निर्णेय वर्गमूल $=3a^2-ab+5b^2.$

प्रश्नावली 114.

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्गमूल निकालो :—

1. $4a^2 - 80ab + 400b^2$.
2. $9x^2 - 150xy + 625y^2$.
3. $9a^4b^4 + 25a^6b^6 - 30a^5b^5$.
4. $\frac{1}{4}a^6 + \frac{1}{3}a^3b^3 + \frac{1}{9}b^6$.
5. $x + y - 2\sqrt{xy}$.
6. $\frac{1}{9}a^4b^8 + \frac{1}{16}a^6b^6 + \frac{1}{6}a^5b^7$.
7. $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 2xy$.
8. $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx + 2xy$.
9. $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4zx$.
10. $9a^4 + 4b^4 + 25c^4 + 12a^2b^2 - 20b^2c^2 - 30c^2a^2$.
11. $x^{-4} + 9y^{-4} + 6x^{-2}y^{-2}$.
12. $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3$.
13. $x^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.
14. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 3$.
15. $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} + 2\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}\right) - 1$.
16. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$.
17. $\left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 - 14\left(a - \frac{1}{2a}\right) + 47$.
18. $x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2$.
19. $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6$.
20. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$.
21. $(2x-1)(2x-3)(2x-5)(2x-7) + 16$.
22. $a^4b^2(a^2+b^2) + 2a^2b(a-b) - 2a^5b^3 + 1$.
23. $x^{-10} + x^{-8} + 2x^{-9} + 2x^{-5} + 2x^{-4} + 1$.
24. $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy - 2bcyz + 2cazx$.

25. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\frac{3}{4}$.

26. $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-2\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)+3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+5$.

27. $(x^2+8x+7)(2x^2-x-3)(2x^2+11x-21)$ के वर्गमूल के गुणनखण्डों को विश्लेषण करके रखो।

325. दूसरी प्रणाली—नीचे बतलाई गई प्रणाली मिश्र राशियों के वर्गमूल निकालने की साधारण प्रक्रिया है।

$x^2+2xy+y^2$ व्यंजक को लो। इसका वर्गमूल $x+y$ है। निम्नलिखित उपाय से यह मूल निकाला जाता है:—

वर्गमूल का पहला पद x दिये हुए व्यंजक के पहले पद का वर्गमूल है। दिये हुए व्यंजक से x का वर्ग घटाने पर $2xy+y^2$ अर्थात् $y(2x+y)$ बाक़ी बचेगा।

इसके पहले पद $2xy$ को वर्गमूल के पहले पद x के दूने से भाग देने पर भागफल y आता है। यह वर्गमूल का दूसरा पद है। इसे $2x$ में जोड़ने पर योगफल $2x+y$ आता है जिसको नया भाजक और y को भागफल मानने पर पहले आई हुई बाक़ी $y(2x+y)$ पायी जाती है। यह प्रक्रिया निम्न प्रकार से दिखाई जा सकती है।—

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2xy+y^2\ (x+y \\
 & x^2 \\
\hline
2x+y) & 2xy+y^2 \\
 & 2xy+y^2 \\
\hline
\end{array}
$$

दिये हुए व्यंजक में तीन से अधिक पद होने पर इसी रीति से वर्गमूल निकाला जाता है।

अतः वर्गमूल निकालने का यह साधारण नियम प्राप्त हुआ—

(1) दिये हुए व्यंजक को उसके किसी अक्षर के घातों के आरोह या अवरोह क्रम से सजाओ।

(2) व्यंजक के पहले पद का वर्गमूल निकालकर पूरे व्यंजक के दाहिनी ओर भागफल की भाँति रखो। यह निर्णेय वर्गमूल का पहला पद होगा।

(3) उक्त मूल के वर्ग को दिये हुए व्यंजक में से घटाओ और अन्तरफल के पहले पद को वर्गमूल के दूने से ज़बानी भाग करो। इस प्रकार जो फल प्राप्त होगा वह निर्णेय वर्गमूल का दूसरा पद होगा।

(4) इस दूसरे पद को पहले निकाले गये पहले पद के दूने में जोड़कर योगफल को उक्त अन्तरफल की बाईं ओर भाजक के रूप में लिखो।

(5) इस भाजक को वर्गमूल के दूसरे पद से गुणा करके गुणनफल को पूर्वोक्त अन्तरफल में से घटाओ।

(6) वर्गमूल के पहले और दूसरे पद को एक राशि मानकर वर्गमूल के पहले पद और पहले अन्तरफल में प्रयोग की गई प्रक्रिया के अनुसार क्रिया करो।

इस प्रकार जब तक कोई अन्तरफल रहे भाग करते जाओ।

उदाहरण 1. $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$ का वर्गमूल निकालो।

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9\ (\,x^2+2x-3$$
$$x^4$$
$$2x^2+2x\ )\ 4x^3-2x^2-12x+9$$
$$4x^3+4x^2$$
$$2x^2+4x-3\ )\ -6x^2-12x+9$$
$$-6x^2-12x+9$$

निर्णेय वर्गमूल $=x^2+2x-3$.

उदाहरण 2. $x^4+\frac{1}{x^4}+8\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+14$ का वर्गमूल निकालो।

दिये हुए व्यंजक को x के घात के अवरोह-क्रम के अनुसार सजाकर वर्गमूल निकाला गया है।

$$x^4+8x^2+14-8x^{-2}+x^{-4}\ (\,x^2+4-x^{-2}$$
$$x^4$$
$$2x^2+4\ )\ 8x^2+14-8x^{-2}+x^{-4}$$
$$8x^2+16$$
$$2x^2+8-x^{-2}\ )\ -2\ -8x^{-2}+x^{-4}$$
$$-2\ -8x^{-2}+x^{-4}$$

निर्णेय वर्गमूल $=x^2+4-\frac{1}{x^2}$.

उदाहरण 3. $x^{\frac{4}{5}}+2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}-2x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}-2y^{\frac{1}{5}}+1$ का वर्गमूल निकालो।

$x^{\frac{4}{5}}+2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}-2x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}-2y^{\frac{1}{5}}+1\,\big(\,x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{1}{5}}-1$, निर्णय वर्गमूल।

$x^{\frac{4}{5}}$

$2x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{1}{5}}\big)\;2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}-2x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}-2y^{\frac{1}{5}}+1$

$\qquad 2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}\qquad +y^{\frac{2}{5}}$

$2x^{\frac{2}{5}}+2y^{\frac{1}{5}}-1\big)\;-2x^{\frac{2}{5}}\qquad -2y^{\frac{1}{5}}+1$

$\qquad -2x^{\frac{2}{5}}\qquad -2y^{\frac{1}{5}}+1$

उदाहरण 4. $x^4+(x-y)(x-y-2)-2x^2(x-y-1)+1$ का वर्गमूल निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=x^4+(x-y)^2+1-2x^2(x-y)-2(x-y)+2x^2$

$=x^4-2x^2z+z^2+2x^2-2z+1$, जबकि $z=x-y$.

$x^4-2x^2z+z^2+2x^2-2z+1\,\big(\,x^2-z+1$

x^4

$2x^2-z\big)\;-2x^2z+z^2+2x^2-2z+1$

$\qquad -2x^2z+z^2$

$2x^2-2z+1\big)\;2x^2-2z+1$

$\qquad 2x^2-2z+1$

निर्णय वर्गमूल $=x^2-z+1=x^2-(x-y)+1=x^2-x+y+1$.

प्रश्नावली 115.

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्गमूल निकालो:—

1. $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$.
2. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$.
3. $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$.
4. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$. 5. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
6. $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2abxy-2bcyz+2cazx$.
7. $9a^2+16b^2+c^2+24ab-6ac-8bc$.
8. $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$.
9. $4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$.
10. $9x^4-30x^3+13x^2+20x+4$.

11. $9x^4-6x^3-11x^2+4x+4.$

12. $x^6+2x^4+8x^3+x^2+8x+16.$

13. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{9}x^2+\frac{2}{3}x+1.$

14. $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3.$ 15. $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+9.$

16. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)+3.$ 17. $x+\frac{1}{x}+2\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)+3.$

18. $a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{6}}+1.$ 19. $a^{2m}+a^{-2n}+2a^{m}a^{-n}.$

20. $4x^{-4}+9y^{-6}+12x^{-2}y^{-3}+4x^{-2}+6y^{-3}+1.$

21. $a^2x^{-4}+b^2y^{-6}+c^2z^{-8}+2abx^{-2}y^{-3}+2bcy^{-3}z^{-4}+2cax^{-2}z^{-4}.$

22. $x+y+2\sqrt{xy}.$

23. $x+y+2\sqrt{xy}-2\sqrt{x}-2\sqrt{y}+1.$

24. $x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}.$

25. $x^3-2x^2+2x^{\frac{3}{2}}+x-2x^{\frac{1}{2}}+1.$

26. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd+2ac-2ad+2bd.$

27. $4x^2+9y^2+16z^2+u^2-12xy+16xz+4xu-24yz-6yu+8zu.$

28. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2b^2+2a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2+2b^2d^2-2c^2d^2.$

29. $x^6+\frac{1}{x^6}+6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+20.$

30. $x^4+4x^3(1+x)+6x^2(1+x)^2+4x(1+x)^3+(1+x)^4.$

326. असम्पूर्ण वर्ग ।

नीचे असम्पूर्ण वर्ग सम्बन्धी कुछ प्रश्न हल किये गये हैं ।

उदाहरण 1. $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$ में कितना जोड़ने से वर्ग सम्पूर्ण हो जायगा ?

दिये हुए व्यंजक का वर्गमूल निकाला जायगा ।

$$\begin{array}{lr}
 & 4a^4-12a^3-7a^2+23a+14\,(2a^2-3a-4 \\
 & 4a^4 \\
4a^2-3a) & -12a^3-7a^2+23a+14 \\
 & -12a^3+9a^2 \\
4a^2-6a-4) & -16a^2+23a+14 \\
 & -16a^2+24a+16 \\
 & -a-2
\end{array}$$

$-(a+2)$ अवशिष्ट रहा है। यदि यह अवशिष्ट शून्य रहता, तो व्यंजक सम्पूर्ण वर्ग होता। दिये हुए व्यंजक में $a+2$ जोड़ने से अवशिष्ट शून्य होता है अर्थात् नया व्यंजक सम्पूर्ण वर्ग होजाता है।

उदाहरण 2. कौनसी शर्त सिद्ध होने पर $ax^2+2bx+c$ व्यंजक पूर्ण वर्ग होगा ?

वर्गमूल निकालने से,

$$\begin{array}{r|l}
 & ax^2+2bx+c\,\Big(\sqrt{a}\,x+\dfrac{b}{\sqrt{a}} \\
 & \underline{ax^2} \\
2\sqrt{a}\,x+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\;\Big) & 2bx+c \\
 & \underline{2bx+\dfrac{b^2}{a}} \\
 & c-\dfrac{b^2}{a}
\end{array}$$

अतएव, $c-\dfrac{b^2}{a}=0$, अर्थात् $ac-b^2=0$, अर्थात् $b^2=ac$ होने पर $ax^2+2bx+c$ एक सम्पूर्ण वर्ग होगा।

उदाहरण 3. $1-x^2$ का वर्गमूल चार पद तक निकालो।

टीका—जो व्यंजक सम्पूर्ण वर्ग नहीं होता उसका वर्गमूल इस उदाहरण की भाँति इच्छानुसार कई पदों तक निकाला जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-x^2\,\Big(1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^6}{16} \\
 & \underline{1} \\
2-\dfrac{x^2}{2}\;\Big) & -x^2 \\
 & \underline{-x^2+\dfrac{x^4}{4}} \\
2-x^2-\dfrac{x^4}{8}\;\Big) & -\dfrac{x^4}{4} \\
 & \underline{-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{8}+\dfrac{x^8}{64}} \\
2-x^2-\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^6}{16}\;\Big) & -\dfrac{x^6}{8}-\dfrac{x^8}{64} \\
 & \underline{-\dfrac{x^6}{8}+\dfrac{x^8}{16}+\dfrac{x^{10}}{64}+\dfrac{x^{12}}{256}}
\end{array}$$

$\therefore$ निर्णय वर्गमूल $=1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^6}{16}$.

प्रश्नावली 116.

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्गमूल चार पदों तक निकालोः—

1. $1+2x$.
2. a^2+x^2.
3. $1+x+x^2$.
4. $1-x-x^2$.
5. सिद्ध करो कि $4x^4-8x^3y^2+4xy^6+y^8$ एक पूर्ण वर्ग है।
6. m का मान कितना होने पर $x^4+6x^3+7x^2-6x+m$ व्यंजक एक पूर्ण वर्ग होगा ?
7. x का मान कितना हो कि $9x^4-12x^3+22x^2-13x+12$ एक पूर्ण वर्ग होजाय ?
8. x का मान कितना होने पर $x^6-6x^5+17x^4-26x^3+22x^2+4x-3$ व्यंजक एक पूर्ण वर्ग होगा ?
9. सिद्ध करो कि $(x+a)(x+b)(x+2a-b)(x+2b-a)+(a-b)^4$ एक पूर्ण वर्ग है।
10. $x^4+4x^3+10x^2+12x+3$ में कितना जोड़ा जाय कि योगफल एक पूर्ण वर्ग होजाय ?
11. सिद्ध करो कि $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$ एक पूर्ण वर्ग है।
12. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(bz-cy)^2-(cx-az)^2-(ay-bx)^2$ का वर्गमूल निकालो।
13. सिद्ध करो कि x और y के किसी भी मान के लिए $9x^6-12x^5y+10x^4y^2-10x^3y^3+5x^2y^4-2xy^5+y^6$ व्यंजक सदा ही एक पूर्ण वर्ग है।
14. x का मान कितना होने पर $4x^4+28x^3+25x^2-83x+29$ व्यंजक एक पूर्ण वर्ग होगा ?

——:o:——

अट्ठाईसवाँ अध्याय

करणी (Surds)

327. करणी (Surd).

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^2-y^2}$ इस प्रकार की वास्तव राशियों का मूल ठीक ठीक नहीं निकलता; इन्हें करणीगत राशि (Irrational Quantity) कहते हैं। जो वास्तव राशि करणीगत नहीं होती है उसे अकरणीगत राशि (Rational Quantity) कहते हैं।

$\sqrt{x^2-y^2}$ एक 'करणी' है क्योंकि इसका मान (x और y अक्षरों में) ठीक ठीक नहीं निकलता। x और y के कितने ही विशेष मान क्यों न लिये जायँ, उसका मान ठीक ठीक नहीं निकाला जा सकता। जैसे, यदि $x=5$, $y=3$ हो, तो $\sqrt{x^2-y^2}=4$.

$\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ राशियाँ करणीगत नहीं हैं, क्योंकि इनका मान ठीक ठीक निकाला जा सकता है। ये सब क्रम से 2, 3 और $x-y$ के समान हैं।

टीका—अकरणीगत राशि के रूप में प्रकाश्य होने पर भी बहुधा मूल चिह्नवाली राशि को ही करणी के रूप में माना जाता है।

328. अनियमित राशि (Incommensurable Quantity).

जिन सारी राशियों को धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णाङ्क या भिन्न के रूप में प्रकट नहीं किया जा सकता, उनको अनियमित राशियाँ कहते हैं, क्योंकि किसी भी इकाई की सहायता से इसका वास्तविक मान नहीं निकाला जा सकता है। (अनु० 291 देखो।)

ऊपर लिखी हुई परिभाषा से स्पष्ट है कि सभी करणीगत अनियमित हैं। परन्तु बहुत सी राशियाँ ऐसी भी हैं जो अनियमित होते हुए भी करणीगत नहीं हैं।

329. पूर्ण करणी (Complete Surd).

जिन समस्त करणियों का कोई अकरणीगत (Rational) वर्ग नहीं होता, उनको पूर्ण करणी कहते हैं।

कोई भी राशि पूर्ण करणी के रूप में प्रकट हो सकती है।

उदाहरण 1. $7\sqrt{11}$ और $10\sqrt[3]{5}$ को पूर्ण करणी के रूप में प्रकट करो।

$$7\sqrt{11}=7\times 11^{\frac{1}{2}}=(7^2)^{\frac{1}{2}}\times 11^{\frac{1}{2}} \qquad \text{अनु० 315.}$$
$$=(7^2\times 11)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{अनु० 316.}$$
$$=(49\times 11)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{539}.$$
$$10\sqrt[3]{5}=10\times 5^{\frac{1}{3}}=(10^3)^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}} \qquad \text{अनु० 315.}$$
$$=(10^3\times 5)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{अनु० 316.}$$
$$=(1000\times 5)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5000}.$$

उदाहरण 2. $a^2b\sqrt[3]{b^3c}$ को पूर्ण करणी के रूप में प्रकट करो।

$$a^2b\sqrt[3]{b^3c}=a^2b\times(b^3c)^{\frac{1}{3}}=(a^6b^3)^{\frac{1}{3}}\times(b^3c)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{अनु० 315.}$$
$$=(a^6b^3\times b^3c)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{अनु० 316.}$$
$$=\sqrt[3]{a^6b^6c}.$$

उदाहरण 3. $\sqrt{405}$ और $\sqrt[3]{875}$ को अकरणीगत गुणक और करणीगत गुणनफल के रूप में प्रकट करो।

$$\sqrt{405}=\sqrt{81\times 5}=\sqrt{9^2\times 5}=(9^2)^{\frac{1}{2}}.\,5^{\frac{1}{2}} \qquad \text{अनु० 316.}$$
$$=9\sqrt{5}.$$
$$\sqrt[3]{875}=\sqrt[3]{125\times 7}=(5^3\times 7)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5\times 7^{\frac{1}{3}}=5\sqrt[3]{7}.$$

प्रश्नावली 117.

1. निम्नलिखित राशियों में से कौनसी वास्तविक करणी हैं ?

   (*i*) $\sqrt{9}$; (*ii*) $\sqrt{27}$; (*iii*) $\sqrt[3]{27}$;

   (*iv*) $\sqrt[3]{64}$; (*v*) $\sqrt{a^2+x^2}$; (*vi*) $\sqrt{(x^4-y^4)}$.

2. यदि एक समकोण (Right-angled) समद्विबाहु (Isosceles) त्रिभुज की दो समान भुजाओं में से प्रत्येक की लम्बाई 1 हो, तो सिद्ध करो कि उसके कर्ण की लम्बाई एक अनियमित राशि होगी।

3. किसी वर्गक्षेत्र के भुजा की लम्बाई अकरणीगत होने पर उसका कर्ण अनियमित होता है।

4. एक सन्दूक़ की लम्बाई 5 फ़ुट, चौड़ाई 2 फ़ुट और ऊँचाई 1 फ़ुट है। सिद्ध करो कि उसके किसी कोण से सम्मुख कोण की दूरी एक अनियमित राशि होती है।

5. एक वर्ग का क्षेत्रफल 250 वर्ग गज़ है। सिद्ध करो कि उसकी भुजा की लम्बाई ठीक ठीक नहीं नापी जा सकती।

निम्नलिखित राशियों को पूर्ण करणी के रूप में प्रकट करो:—

6. $2\sqrt{6}$. 7. $3\sqrt{10}$. 8. $8\sqrt[3]{27}$.

9. $x^2\sqrt[5]{y}$. 10. $2a\sqrt[3]{xy}$. 11. $5a^3\sqrt[4]{b^3}$.

सरल करो:—

12. $\sqrt{27}$. 13. $\sqrt{350}$. 14. $\sqrt[3]{270}$.

15. $\sqrt[3]{80}$. 16. $\sqrt[4]{112}$. 17. $\sqrt[5]{486}$.

18. $\sqrt[6]{x^{12}y^2}$. 19. $\sqrt[5]{-x^5y^{10}z^2}$. 20. $\sqrt[n]{x^{2n}y^n}$.

330. करणी का क्रम (Order).

मूलचिह्न द्वारा करणी का क्रम निरूपित होता है। जैसे, $\sqrt{2}$ एक दूसरे क्रम की करणी है और $a^{\frac{1}{3}}$ एक तीसरे क्रम की करणी है, इत्यादि।

दूसरे, तीसरे आदि क्रम की करणियों को क्रमशः द्विघात करणी, त्रिघात करणी, इत्यादि नामों से सम्बोधित करते हैं।

जब कई करणीगत राशियाँ एक ही क्रम की होती हैं तो उनको **समकरणी** (Equiradical) कहा जाता है। जैसे $\sqrt[3]{2}$ और $x^{\frac{5}{3}}$ दोनों राशियाँ समकरणी हैं।

331. विभिन्न क्रमों की करणीगत राशियों को समकरणियों में रूपान्तर करना।

विभिन्न क्रम की किसी भी संख्या की करणीगत राशियों को समकरणियों में रूपान्तरित करने पर रूपान्तरित करणीगत राशियों का क्रम दिये हुए करणीगत राशि-समूह के क्रम के ल० स० अ० के समान होता है।

उदाहरण। $\sqrt[4]{3}$ और $\sqrt[5]{4}$ को सममूलीय समकरणियों में रूपान्तरित करो।

4 और 5 का ल० स० अ० 20 है। अतएव दी हुई दोनों करणीगत राशियों में से प्रत्येक को 20 वाँ क्रम विशिष्ट करणीगत राशि में रूपान्तरित करना होगा।

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = (3^5)^{\frac{1}{20}}. \qquad \text{अनु० 315.}$$
$$= \sqrt[20]{243}.$$
$$\sqrt[5]{4} = 4^{\frac{1}{5}} = (4^4)^{\frac{1}{20}} \qquad \text{अनु० 315.}$$
$$= \sqrt[20]{256}.$$

332. करणीगत राशि-समूह की तुलना।

दो या दो से अधिक करणीगत राशियों की तुलना उनको पूर्ण समकरणियों में परिवर्तित करके की जाती है।

उदाहरण। $\sqrt[4]{5}$ **और** $\sqrt[5]{6}$ **में कौन बड़ा है ?**

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = (5^5)^{\frac{1}{20}} = (3125)^{\frac{1}{20}};$$
$$\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}} = (6^4)^{\frac{1}{20}} = (1296)^{\frac{1}{20}}.$$
$$\therefore \quad \sqrt[4]{5} > \sqrt[5]{6}.$$

333. सजातीय व विजातीय करणीगत राशियाँ।

एक ही करणीगत गुणनखंडवाली करणीगत राशियों को सजातीय (Similar अथवा Like) और विभिन्न करणीगत गुणनखंडवाली करणीगत राशियों को विजातीय (Dissimilar अथवा Unlike) करणियाँ करते हैं। जैसे, $\sqrt{175}$ और $\sqrt{63}$ ये दोनों करणीगत राशियाँ सजातीय हैं क्योंकि ये क्रम से $5\sqrt{7}$ और $3\sqrt{7}$ के समान हैं और $5\sqrt{7}$ और $3\sqrt{7}$ दोनों ही का करणीगत गुणनखंड $\sqrt{7}$ है परन्तु $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ ये दोनों करणीगत राशियाँ विजातीय हैं।

प्रश्नावली 118.

निम्नलिखित को समकरणियों में लाओः—

1. $\sqrt{5}$ और $\sqrt[3]{4}$.
2. $\sqrt[3]{5}$ और $\sqrt[5]{3}$.
3. $\sqrt[4]{5}$ और $\sqrt[6]{2}$.
4. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$.

निम्नलिखित करणीगत राशियों की तुलना करोः—

5. $\sqrt{3}$ और $\sqrt[3]{4}$.
6. $\sqrt[4]{5}$ और $\sqrt[3]{4}$.
7. $\sqrt[3]{5}$ और $\sqrt{3}$.
8. $\sqrt{2}$ और $\sqrt[3]{3}$.

सिद्ध करो कि निम्नलिखित करणीगत राशियाँ सजातीय हैंः—

9. $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$.
10. $\sqrt{75}$, $\sqrt{147}$.
11. $\sqrt{108}$, $\sqrt{300}$.
12. $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{1715}$.

सिद्ध करो कि निम्नलिखित करणीगत राशियाँ विजातीय हैंः—

13. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{54}$.
14. $\sqrt[5]{486}$, $\sqrt[5]{320}$.

334. करणीगत राशियों का योग और अन्तर।

जब दो व दो से अधिक सजातीय करणीगत राशियों का बीजगणितीय योग निकालना होता है तो उनके साधारण (सार्व) करणीगत गुणनखण्ड के गुणकों के बीजीय योग को उक्त करणीगत गुणनखण्ड से गुणा करना होता है। विजातीय करणीगत राशियों का योगफल एक पद के द्वारा नहीं प्रकट किया जाता है।

उदाहरण 1. $2\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$ और $-3\sqrt{3}$ का योगफल निकालो।

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}+(-3\sqrt{3})$$
$$=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

उदाहरण 2. सरल करो: $\sqrt[3]{32}+5\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{1372}.$

$$\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\times 4}=2\sqrt[3]{4}.$$
$$\sqrt[3]{1372}=\sqrt[3]{4\times 343}=7\sqrt[3]{4}.$$

इसलिए, दिया हुआ व्यंजक $=2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{4}$

$$=(2+5-7)\sqrt[3]{4}=0\times\sqrt[3]{4}=0.$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}.$

$$\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{36\times 3}-\sqrt{25\times 3}$$
$$=\sqrt{6^2\times 3}-\sqrt{5^2\times 3}=6\sqrt{3}-5\sqrt{3}.$$
$$=\sqrt{3}.$$

प्रश्नावली 119.

जोड़ो :—

1. $3\sqrt{5}, -7\sqrt{5}$ और $2\sqrt{5}$.
2. $5\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$ और $-8\sqrt{7}$.
3. $6\sqrt{2}, 8\sqrt{2}$ और $-3\sqrt{2}$.
4. $\sqrt{12}, \sqrt{75}$ और $\sqrt{147}$.
5. $\sqrt{5}, \sqrt{20}$ और $-\sqrt{45}$.

सरल करो :—

6. $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{98}$.
7. $\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{12}$.
8. $2\sqrt{32}+4\sqrt{50}-6\sqrt{18}$.
9. $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{192}$.
10. $2\sqrt[3]{54}+9\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}$.
11. $3\sqrt{4x^3}+5\sqrt{x^5}+2\sqrt{16x^7}$.
12. $2\sqrt{3x^3}-3\sqrt{3xy^2}+2\sqrt{12xz^2}$.
13. $a\sqrt[3]{4a^3x}+2\sqrt[3]{-32xb^6}+c\sqrt[3]{500xc^3}$.

335. सरल (Simple) और मिश्र (Compound) करणीगत राशियाँ।

एकपद करणीगत राशियों को प्रायः सरल करणीगत राशियाँ (Simple Surds) कहा जाता है।

दो या उससे अधिक सरल करणीगत राशियों के समूह को जो '+' और '−' चिह्न से युक्त हों या उक्त चिह्न से युक्त अकरणीगत राशि और सरल करणीगत राशि-समूह को मिश्र करणीगत राशियाँ (Compound Surds) कहते हैं। जैसे, $5\sqrt{2}$ और $3\sqrt[3]{7}$ ये दोनों सरल करणीगत राशियाँ हैं परन्तु $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ और $5-3\sqrt{7}$, दोनों मिश्र करणीगत राशियाँ हैं।

336. करणीगत राशियों का गुणा।

सरल (सममूलीय और विभिन्न मूलीय) और मिश्र करणीगत राशियों के गुणन का नियम नीचे दिया गया है:—

सममूलीय करणीगत राशियों का गुणनफल निकालते समय करणीगत राशियों के अकरणीगत (Rational) गुणनखण्डों के गुणनफल को करणीगत (Irrational) गुणनखण्डों के गुणनफल द्वारा गुणा करना होता है।

उदाहरण 1. $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{7}$ और $\sqrt{2}$ का गुणनफल निकालो।

$$2\sqrt{5}\times3\sqrt{7}\times\sqrt{2}$$
$$=2\times3\times1\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}$$
$$=6\sqrt{5\times7\times2} \qquad \text{अनु}^\circ\ 316$$
$$=6\sqrt{70}.$$

विभिन्न मूलीय करणीगत राशियों का गुणनफल निकालने के पूर्व उनको अनु० 331 की सहायता से समकरणियों में रूपान्तरित कर लेना होता है। तत्पश्चात् ऊपर वर्णित नियम के अनुसार इन रूपान्तरित करणीगत राशियों का गुणनफल निकाला जाता है।

उदाहरण 2. $2\sqrt[3]{2}$ को $4\sqrt{6}$ से गुणा करो।

$$2\sqrt[3]{2}\times4\sqrt{6}=2(2^2)^{\frac{1}{6}}\times4(6^3)^{\frac{1}{6}}$$
$$=2\times4\times(4\times216)^{\frac{1}{6}} \qquad \text{अनु}^\circ\ 316$$
$$=8\sqrt[6]{864}.$$

मिश्र राशियों के गुणन-प्रक्रिया के अनुसार ही मिश्र करणीगत राशियों की गुणन-क्रिया सिद्ध की जाती है ।

उदाहरण 3. $2+\sqrt{3}$ को $3-\sqrt{2}$ से गुणा करो ।

$$(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})$$
$$=2\times 3+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}$$
$$=6+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

उदाहरण 4. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}$ को $2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ से गुणा करो ।

$$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3})(2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$$
$$=2\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}+2\times 2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}$$
$$=2\times(2^3)^{\frac{1}{6}}\times(2^2)^{\frac{1}{6}}+2\times(2^2)^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{4}}+(2\times 3)^{\frac{1}{3}}+(3^4)^{\frac{1}{12}}\times(3^3)^{\frac{1}{12}}$$
$$=2(8\times 4)^{\frac{1}{6}}+2(4\times 3)^{\frac{1}{4}}+6^{\frac{1}{3}}+(81\times 27)^{\frac{1}{12}}$$
$$=2\sqrt[6]{32}+2\sqrt[4]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[12]{2187}.$$

उदाहरण 5. $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ को $\sqrt{2}-\sqrt{7}$ से गुणा करो ।

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})$$
$$=2-\sqrt{2}\sqrt{7}+\sqrt{2}\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{7}$$
$$=2-7=-5.$$

उदाहरण 6. $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ का वर्ग निकालो ।

$$(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2$$
$$=(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3})(2\sqrt{5})+(2\sqrt{5})^2$$
$$=3-4\sqrt{15}+20$$
$$=23-4\sqrt{15}.$$

उदाहरण 7. $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$ का वर्ग निकालो ।

$$(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})^2$$
$$=(\sqrt{a+x})^2+(\sqrt{a-x})^2-2\sqrt{a+x}.\sqrt{a-x}$$
$$=(a+x)+(a-x)-2\sqrt{(a+x)(a-x)}$$
$$=2a-2\sqrt{a^2-x^2}.$$

प्रश्नावली 120.

गुणा करो:—

1. $\sqrt{2}$ को $\sqrt{3}$ से ।

2. $\sqrt{3}$ को $5\sqrt{2}$ से ।

3. $\sqrt{6}$ को $3\sqrt{7}$ से ।

4. $\sqrt[3]{2}$ को $\sqrt[3]{3}$ से ।

5. $\sqrt[4]{7}$ को $\sqrt[4]{3}$ से ।

6. $\sqrt[3]{2}$ को $\sqrt{3}$ से ।

7. $\sqrt{20}$ को $\sqrt{80}$ से ।

8. $\sqrt{45}$ को $\sqrt{75}$ से ।

9. $\sqrt[3]{4}$ को $\sqrt[4]{7}$ से ।

सरल करो:—

10. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{9}$.

11. $\sqrt[3]{5}\times 5$.

12. $\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{270}$.

13. $\sqrt[4]{112}\times\sqrt[4]{240}$.

14. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{6}$.

15. $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{2}$.

16. $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[6]{2}$.

17. $\sqrt[5]{2}\times\sqrt[10]{9}$.

18. $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{12}$.

19. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}$.

20. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}$.

21. $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{9}\times\sqrt[9]{27}$.

22. $2\sqrt{2}\times 3\sqrt[3]{3}$.

23. $\sqrt{ax^2}\times\sqrt{bx^2}\times\sqrt{cx^4}$.

24. $2\sqrt[3]{a^3x}\times 3\sqrt[3]{b^3x}$.

25. $\sqrt[4]{a^2b^2}\times\sqrt[4]{2b^2c^2}\times\sqrt[4]{8c^4a^4}$.

निम्नलिखित गुणनफल निकालो—

26. $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

27. $\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

28. $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$.

29. $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$.

30. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

31. $(2\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$.

32. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

33. $(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)$.

34. $(\sqrt{a}+\sqrt{x})(2\sqrt{a}+3\sqrt{x})$.

35. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

36. $(\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{6})$.

37. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$.

38. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(3\sqrt{y}-4\sqrt{z})$.

39. $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+1)$.

40. $(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{4}+\sqrt{5})$.

निम्नलिखित राशियों का वर्ग निकालो :—

41. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

42. $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

43. $8\sqrt{5}+3\sqrt{8}$.

44. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$.

45. $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$.

46. $\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}$.

47. $\sqrt{a^2-x^2}+x$.

48. $3\sqrt{x^2+2}-2\sqrt{x^2+3}$.

सरल करो:—

49. $(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})(a+\sqrt{a+x})$.

50. $(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$.

51. $(a\sqrt{b^2x^2-1}-b\sqrt{1-a^2x^2})(a\sqrt{b^2x^2-1}+b\sqrt{1-a^2x^2})$.

337. अकरणीकरण प्रक्रिया (Rationalisation).

सरल या मिश्र करणीगत राशि को किसी उपयुक्त राशि से गुणा करके अकरणीगत राशि में परिवर्तित करने की प्रक्रिया को अकरणीकरण प्रक्रिया कहते हैं।

अकरणीगत राशि में परिवर्तित करने के लिए करणीगत राशि को जिस राशि से गुणा किया जाता है उसे अकरणीकारक (Rationalising) गुणनखण्ड कहा जाता है।

उदाहरण 1. $3\sqrt{7}$ करणी को अकरणीगत राशि में लाओ।

$3\sqrt{7}$ को $\sqrt{7}$ से गुणा करने से,

$3\sqrt{7}\times\sqrt{7}=3\times7=21$ जो एक अकरणीगत राशि है।

यहाँ $\sqrt{7}$ एक अकरणीकारक गुणनखण्ड है।

उदाहरण 2. $2\sqrt{3}-4\sqrt{5}$ व्यंजक की करणीगत राशि में लाओ।

$$(2\sqrt{3}-4\sqrt{5})(2\sqrt{3}+4\sqrt{5})$$
$$=(2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{5})^2$$
$$=12-80=-68$$ जो एक अकरणीगत राशि है।

यहाँ $2\sqrt{3}+4\sqrt{5}$ एक अकरणीकारक गुणनखण्ड है।

338. पूरक करणीगत राशियाँ (Conjugate Surd).

द्विपद द्विघातवाली अकरणीगत राशियाँ जिनमें केवल उनके पदों के बीच वर्त्तमान चिह्नों में विभिन्नता होती है एक दूसरे की पूरक करणीगत राशियाँ कहलाती हैं। जैसे, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ और $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ दोनों करणीगत राशियाँ एक दूसरे की 'पूरक' हैं; $\sqrt{a}+\sqrt{x}$ और $\sqrt{a}-\sqrt{x}$ भी एक दूसरे की पूरक करणियाँ हैं; इत्यादि।

उपसिद्धान्त। दो पूरक करणीगत राशियों का गुणनफल एक अकरणीगत राशि होती है।

मान लो कि $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ और $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ एक दूसरे की पूरक करणियाँ हैं। ऐसी दशा में $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ एक अकरणीगत राशि है।

339. करणीगत राशि वाली भिन्नों का सरलीकरण।

ऐसी भिन्नों को सरल करते समय हर को किसी उपयुक्त गुणनखण्ड से गुणा करके अकरणीगत राशि में परिवर्त्तित करलेने से सरलीकरण में बड़ी सुविधा होती है।

यदि हर एक द्विपद द्विघात करणीगत राशि हो तो अनु० 338 के उपसिद्धान्त के अनुसार उसे उसके 'पूरक' करणीगत राशि से गुणा करने पर वह एक अकरणीगत राशि में परिवर्त्तित हो जायगी।

उदाहरण 1. सरल करोः— $\dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$.

$$\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\tfrac{2}{3}\sqrt{6}.$$

उदाहरण 2. $3\sqrt{7}+5\sqrt{2}$ को $4\sqrt{3}$ से भाग करो।

$$\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{(3\sqrt{7}+5\sqrt{2})\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{21}+5\sqrt{6}}{12}=\tfrac{1}{4}\sqrt{21}+\tfrac{5}{12}\sqrt{6}.$$

उदाहरण 3. सरल करोः— $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}$.

$$\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{10}+\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{2-1}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}.$$

उदाहरण 4. सरल करो:— $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{12}+\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{3}}$

$$\text{हर}=2\sqrt{3}+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

इसलिए, दिया हुआ व्यंजक $=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$$=\frac{8-2\sqrt{15}}{-2}=-4+\sqrt{15}.$$

उदाहरण 5. सरल करो:—

$$\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}+\frac{1}{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}}.$$

यहाँ, $\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12-18}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{-6};$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{18-80}=\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{-62};$$

$$\frac{1}{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{80-12}=\frac{4\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{68}.$$

इसलिए, दिया हुआ व्यंजक

$$=-\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{34}\right)\sqrt{3}+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{62}\right)\sqrt{2}+\left(\tfrac{1}{17}+\tfrac{2}{31}\right)\sqrt{5}$$

$$=\frac{14\sqrt{2}}{31}+\frac{65\sqrt{5}}{527}-\frac{37\sqrt{3}}{102}.$$

उदाहरण 6. सरल करो:— $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$

इसलिए, दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})\ (x+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\frac{x^2+x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}-x^2-(x^2-1)+2x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}$$

$$=4x\sqrt{x^2-1}.$$

प्रश्नावली 121.

पहली राशि को दूसरी राशि से भाग करो :—

1. $\sqrt{3}, \sqrt{2}$. 2. $\sqrt{3}, \sqrt{5}$. 3. $2\sqrt{7}, \sqrt{3}$.

4. $3\sqrt{5}, 2\sqrt{7}$. 5. $\sqrt[3]{4}, \sqrt{3}$. 6. $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{2}$.

7. $\sqrt{2}+1, \sqrt{2}$. 8. $\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt{5}$.

9. $3\sqrt{2}+4\sqrt{7}, \sqrt{6}$. 10. $\sqrt{80}+\sqrt{75}, \sqrt{2}$.

निम्नलिखित को अकरणीगत राशि के हरवाली सम-मानीय भिन्न में परिवर्तित करो :—

11. $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$. 12. $\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$. 13. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2\sqrt{3}}$.

14. $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$. 15. $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-3}$. 16. $\frac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$.

17. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. 18. $\frac{x+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{x-\sqrt{z}}$.

19. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. 20. $\frac{4+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

सरल करो :—

21. $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$. 22. $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$.

23. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$. 24. $\frac{1}{a+\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{1}{a-\sqrt{a^2+b^2}}$.

25. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{27}+\sqrt{63}-\sqrt{28}-\sqrt{48}}$.

26. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{75}+\sqrt{50}-\sqrt{48}-\sqrt{32}}$.

27. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

28. $\frac{1}{4(1+\sqrt{x})}+\frac{1}{4(1-\sqrt{x})}+\frac{1}{2(1+x)}$.

29. $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}$.

30. निम्नलिखित राशियों का मान 3 दशमलव अङ्क तक निकालोः—

(i) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$; (ii) $\dfrac{3\sqrt{5}+2}{2+\sqrt{5}}$.

340. द्विघात करणीगत राशि सम्बन्धी सिद्धान्त ।

नीचे द्विघात करणीगत राशि सम्बन्धी अत्यन्त आवश्यक सिद्धान्त दिये गये हैं:—

सिद्धान्त I. अकरणीगत राशि कभी करणीगत राशि के समान नहीं हो सकती ।

यह सिद्धान्त करणी की परिभाषा (अनु० 327) से निकलता है ।

इसलिए, यदि $a=\sqrt{b}$ हो, तो दोनों पक्ष शून्य के समान होंगे अर्थात् $a=0$, $b=0$.

सिद्धान्त II. यदि $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$, तो $a=x$ और $b=y$ होगा।

यदि a, x के समान न हो, तो कल्पना करो कि $a=x+c$; उस दशा में दी हुई शर्त के अनुसार,

$$x+c+\sqrt{b}=x+\sqrt{y};$$

$$\therefore \quad c+\sqrt{b}=\sqrt{y};$$

$$\therefore \quad c^2+2c\sqrt{b}+b=y;$$

$$\therefore \quad \sqrt{b}=\frac{y-c^2-b}{2c};$$

किन्तु यह असम्भव है क्योंकि करणीगत राशि कभी अकरणीगत राशि के समान नहीं हो सकती (सि० I);

इसलिए, $a=x$, $\therefore\ b=y$.

उपसिद्धान्त । यदि $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ हो तो

$$a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}.$$

सिद्धान्त III. कोई द्विघात करणी कभी किसी अकरणीगत राशि और किसी द्विघात करणी के बीजीय योग के समान नहीं हो सकती ।

यदि सम्भव हो, तो कल्पना करो कि

$$\sqrt{a}=x+\sqrt{y}.$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने से $\quad a=x^2+y+2x\sqrt{y},$

या, $\quad \sqrt{y}=\dfrac{a-x^2-y}{2x};$

यह असम्भव है, क्योंकि करणी कभी अकरणीगत राशि के समान नहीं हो सकती। (सिद्धान्त I.)

सिद्धान्त IV. यदि $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ हो, तो

$$\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

दोनों पक्षों का वर्ग निकालने से, $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy};$

$\therefore$ सिद्धान्त II के अनुसार दोनों पक्षों की अकरणीगत और करणीगत राशियों को बराबर करने से,

$$a=x+y \text{ और } \sqrt{b}=2\sqrt{xy};$$

$$\therefore \quad a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2;$$

$$\therefore \quad \sqrt{(a-\sqrt{b})}=\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

यहाँ बायाँ पक्ष धनात्मक राशि है, इसलिए $x>y$ होने पर दायें पक्ष में + चिह्न और $x<y$ होने पर दायें पक्ष में − चिह्न होगा।

341. $a+\sqrt{b}$ का वर्गमूल निकालना।

मान लो कि, $\quad \sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

दोनों पक्षों का वर्ग निकालने से, $\quad a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}.$

दोनों पक्षों की करणीगत व अकरणीगत राशियों को बराबर करने से (सिद्धान्त II), $\quad a=x+y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

और $\quad \sqrt{b}=2\sqrt{xy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

(2) से, $\quad 4xy=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

(1) से, $\quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b;$

$\therefore \quad x-y=\sqrt{a^2-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

(1) और (4) से, $\quad \left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=\sqrt{a^2-b} \end{array}\right\}$

इन दोनों समीकरणों से,

$$x=\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b}),$$
$$y=\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b}).$$

अतएव, $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}.$

टीका—(4) में $x-y=-\sqrt{a^2-b}$ लिखने पर भी वही फल प्राप्त होता है।

उदाहरण 1. $5+2\sqrt{6}$ का वर्गमूल निकालो।

मान लो कि $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

वर्ग करने से, $5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy};$

$$\therefore \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ xy=6 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=25-24=1;$

$$\therefore \quad x-y=1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) और (2) से, $x=3,\ y=2;$

$\therefore\ \sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

टीका—(2) में $x-y=-1$ लिखने से भी वही फल प्राप्त होता है।

उदाहरण 2. $19-6\sqrt{2}$ का वर्गमूल निकालो।

मान लो कि, $\sqrt{19-6\sqrt{2}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$

तो, $19-6\sqrt{2}=x+y-2\sqrt{xy}.$

दोनों पक्षों की अकरणीगत और करणीगत राशियों को बराबर करने से,

$$\left.\begin{array}{r} x+y=19 \\ xy=18 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=361-72=289;$$

$$\therefore\ x-y=17. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

इसलिए, $x=18,\ y=1;$

$\therefore$ निर्णेय वर्गमूल $=\sqrt{18}-\sqrt{1}$

$=3\sqrt{2}-1.$

टीका—(2) में $x-y=-17$ लिखने से भी ऊपर लिखा हुआ फल प्राप्त होता है किन्तु पहले एक ऋण चिह्न लगता है।

उदाहरण 3. $11+6\sqrt{2}$ का वर्गमूल निकालो।

$x+y+2\sqrt{xy}$ का वर्गमूल $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; इसलिए $a+2\sqrt{b}$ का वर्गमूल निकालते समय ऐसी दो राशियाँ x और y निकालनी होती हैं जिससे कि $x+y=a$ और $xy=b$ हो। दी हुई राशियाँ ध्यानपूर्वक देखने से ही बहुधा मालूम हो जाती हैं। जैसे, वर्तमान उदाहरण में देखने में आता है कि

$$11+6\sqrt{2}=11+2\sqrt{18}.$$

यहाँ ऐसी दो संख्याएँ निकालना हैं जिनका योग 11 और गुणनफल 18 हों। ये दोनों संख्याएँ 9 और 2 हैं। इसलिए निर्णेय वर्गमूल $=3+\sqrt{2}$.

उदाहरण 4. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}$ का मान निकालो

मान लो कि, $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

दोनों पक्षों का वर्ग निकालने से $x+\sqrt{x^2-y^2}=a+b+2\sqrt{ab}$;

$\therefore \quad a+b=x$ और $4ab=x^2-y^2$;

$\therefore \quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=x^2-(x^2-y^2)=y^2$;

$\therefore \quad a-b=y$ ....(1)

अतएव $a+b=x$ और $a-b=y$.

हल करने से, $a=\dfrac{x+y}{2},\ b=\dfrac{x-y}{2}$;

$\therefore$ निर्णेय मान $=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}$.

टीका 1—(1) में $a-b=-y$ रखने से भी यही फल पाया जाता है।

टीका 2—ठीक इसी उपाय से सिद्ध किया जाता है कि,

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{\frac{x-y}{2}}.$$

उदाहरण 5. सिद्ध करो कि,

$$\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}=\sqrt{2x}.$$

बायें पक्ष का वर्ग

$$=y+\sqrt{2xy-x^2}+y-\sqrt{2xy-x^2}$$
$$+2(\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}})(\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}})$$
$$=2y+2\sqrt{y^2-\sqrt{(2xy-x^2)^2}}$$
$$=2y+2\sqrt{y^2-2xy+x^2}$$
$$=2y+2\sqrt{(x-y)^2}$$
$$=2y+2(x-y)$$
$$=2x,$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=\sqrt{2x}$.

टीका— $\sqrt{(x-y)^2}=\pm(x-y)$; किन्तु वर्गमूल के पहले (−) लेने से तादात्म्य प्रमाणित नहीं होगा।

उदाहरण 6. यदि $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ और $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ हो, तो

$\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$ का मान बताओ।

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{12}{4}=3,$$

$$x-y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{4\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}.$$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{5+9}{3\sqrt{5}}=\dfrac{14}{3\sqrt{5}}=\dfrac{14\sqrt{5}}{15}$.

342. $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ का वर्गमूल निकालना।

दिये हुए व्यंजक का कोई वर्गमूल होने पर वह $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ आकारवाला होगा।

अतएव, $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$

$$=(x+y+z)+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy};$$

$\therefore\quad x+y+z=a,\ 4yz=b,\ 4zx=c$ और $4xy=d$ ......(1)

इस प्रकार माना जा सकता है ।

(1) के अन्तवाले तीन समीकरणों से, $64x^2y^2z^2=bcd$;

$$\therefore\qquad 8xyz=\sqrt{bcd}. \qquad ......(2)$$

समीकरण (2) को (1) के अन्तिम तीनों समीकरणों में से प्रत्येक से क्रमशः भाग देने पर

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}},\ \ y=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}},\ \ z=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}.$$

x, y, z के इन तीनों मानों के द्वारा,

$x+y+z=a$ यह समीकरण सिद्ध होगा,

अर्थात्, $\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}=a$ होना प्रयोजनीय है,

अर्थात्, $bc+cd+bd=2a\sqrt{bcd}$ होगा ......(3)

अतएव (3) की शर्त सिद्ध न होने पर दिये हुए व्यंजक का वर्गमूल $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ आकारवाला न होगा ।

उदाहरण । $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ का वर्गमूल निकालो ।

$6\sqrt{2}=\sqrt{72},\ 4\sqrt{3}=\sqrt{48}$, और $2\sqrt{6}=\sqrt{24}$;

इसलिए, यहाँ $a=11,\ b=72,\ c=48$ और $d=24$.

अब $bc+cd+db=72\times48+48\times24+24\times72=6336$;

और $2a\sqrt{bcd}=2\times11\times\sqrt{72\times48\times24}$

$$=2\times11\times\sqrt{6\times12\times4\times12\times6\times4}$$

$$=2\times11\times\sqrt{6^2\times12^2\times4^2}$$

$$=2\times11\times6\times12\times4=6336.$$

इसलिए यहाँ (3) की शर्त सिद्ध हुई है; अतएव दिये हुए व्यंजक का एक ही वर्गमूल है ।

मानलो कि, $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

तो दोनों पक्षों का वर्ग करने से $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

$$=x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy};$$

पूर्वोक्त उदाहरण के समान,

$x+y+z=11$, $4yz=72$, $4zx=48$ और $4xy=24$ ......(1)

अन्त के तीन समीकरणों से, $64x^2y^2z^2=72\times48\times24$;

$\therefore$ $xyz=36$ ......(2)

[$xyz=-36$ मानने से अभीष्ट फल नहीं पाया जाता ।]

(2) को (1) की अन्तिम तीनों समीकरणों में से प्रत्येक के द्वारा भाग करने से, $x=2$, $y=3$ और $z=6$.

x, y, z के इन मानों के द्वारा $x+y+z=11$ समीकरण सिद्ध होता है । अतएव निर्णय वर्गमूल $=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

प्रश्नावली 122.

निम्नलिखित का वर्गमूल निकालो:—

1. $3-2\sqrt{2}$.
2. $11-6\sqrt{2}$.
3. $4-2\sqrt{3}$.
4. $9-4\sqrt{5}$.
5. $5-2\sqrt{6}$.
6. $13-4\sqrt{10}$.
7. $39-12\sqrt{3}$.
8. $14-6\sqrt{5}$.
9. $23-4\sqrt{15}$.
10. $12-2\sqrt{35}$.
11. $7-2\sqrt{6}$.
12. $19-8\sqrt{3}$.
13. $1+2\sqrt{a-a^2}$.
14. $2a+2\sqrt{a^2-1}$.
15. $2a-2\sqrt{a^2-x^2}$.
16. $2a-b+2\sqrt{a^2-ab}$.
17. $2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}$.
18. $\frac{1}{2}(x-z)+\sqrt{xy+yz-zx-y^2}$.
19. $10+\sqrt{24}-\sqrt{40}-\sqrt{60}$.
20. $x+3y+4+4\sqrt{x}-4\sqrt{3y}-2\sqrt{3xy}$.

सरल करो—

21. $\frac{1}{\sqrt{(7-4\sqrt{3})}}$. 22. $\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

23. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

24. सिद्ध करो कि,

$$\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}=\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}.$$

25. $x+y+z+2\sqrt{zx+yz}$ का वर्गमूल निकालो।

26. यदि $x=\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}$ और $y=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$ हो, तो $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$ का मान बताओ।

27. यदि $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ हो, तो $\frac{2x\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ का मान बताओ।

28. यदि $x=\frac{3}{5}a$ हो, तो $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ का मान बताओ।

343. करणीगत राशि सम्बन्धी कुछ कठिन प्रश्नों का हल।

उदाहरण 1. सरल करो—

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b}\ldots\ldots}}}\text{ असीम पर्य्यन्त।}$$

मान लो कि $x=\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b}\ldots\ldots}}}$ असीम पर्य्यन्त;

दोनों पक्षों का वर्ग करने से,

$$x^2=a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\ldots}}}}\text{ असीम पर्य्यन्त}$$

$$=a\sqrt[3]{bx};$$

दोनों पक्षों का घन लेने से, $x^6=a^3bx$;

दोनों पक्षों को x से भाग देने से $x^5=a^3b$; $\therefore\ x=a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}$.

अतएव दी हुई राशि का मान $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}$.

उदाहरण 2. सरल करो—

$$(\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-x^2}+ax)^2-2ax(\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-x^2}+ax)+x^2$$

$(\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-x^2}+ax)=X$ और $ax=Y$ लिखने से,

$$\begin{aligned}\text{दी हुई राशि} &= X^2-2XY+x^2\\ &=(X^2-2XY+Y^2)+(x^2-Y^2)\\ &=(X-Y)^2+(x^2-Y^2)\\ &=(1-a^2)(1-x^2)+(x^2-a^2x^2)=1-a^2.\end{aligned}$$

उदाहरण 3. $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ होने पर x^3-6x^2+6x-2 का मान निकालो।

$$x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}},$$

या, $$x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}}+1);$$

दोनों पक्षों को घन करने से

$$x^3-6x^2+12x-8=2(2^{\frac{1}{3}}+1)^3,$$

या, $$\begin{aligned}x^3-6x^2+6x-2&=2(2^{\frac{1}{3}}+1)^3-6x+6\\ &=2(3+3.2^{\frac{2}{3}}+3.2^{\frac{1}{3}})-6x+6\\ &=6(2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}-x)=0.\end{aligned}$$

प्रश्नावली 123.

1. $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$ का वर्गमूल निकालो।

2. $\dfrac{7}{2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{4}}+1}$ को अकरणीगत राशि युक्त भिन्न में परिवर्त्तित करो।

3. $x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ और $y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ होने पर x^3+y^3 का मान बताओ।

4. $x=2+\sqrt{3}$ होने पर सिद्ध करो कि,

$$\frac{1+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{-\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1}=2(1-\sqrt{3}).$$

5. $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ होने पर $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$ का मान बताओ।

6. $x=\sqrt{(a-2)^2-1}$ होने पर

$$\frac{1+x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x}{1-x+\sqrt{1+x^2}}$$ का मान बताओ ।

7. $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\pm\sqrt{z}=0$ को करणी-परिवर्त्तन करो ।

8. सिद्ध करो कि

$$\sqrt{[a\sqrt{\{a\sqrt{(a\ldots\ldots \text{असीम पर्यन्त})\}}]}=a.$$

9. यदि $c=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$ हो, तो सिद्ध करो कि
$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4a^2b^2c^2$.

10 $x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{5}{2}$ का वर्गमूल निकालो ।

11. सरल करो :—

$$\frac{\sqrt[3]{64x^6-48x^4+12x^2-1}-\sqrt{16x^4-64x^3+24x^2+80x+25}}{4x^2-12x-7}.$$

12. सिद्ध करो कि $\frac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=a+x+\sqrt{ax+x^2}$.

13. यदि,

$\sqrt{\{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2\}}+\sqrt{\{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2\}}=2a$

हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

14. यदि $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$bx^2-ax+b=0.$$

15. सरल करो :—

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}.$$

344. **अकरणीगत राशि वाले समीकरण** (Irrational Equations).

जिस समीकरण में अव्यक्त राशि या अव्यक्त राशि वाला कोई व्यंजक मूल-चिह्न से युक्त होता है उसको अकरणीगत राशि वाला समीकरण कहते हैं।

जैसे, $\sqrt{x}=2$, $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}=5$; ये अकरणीगत राशि वाले समीकरण हैं।

यहाँ विशेष तौर से एक अव्यक्त राशि वाले और द्विघात करणी सम्पर्कित अकरणीगत राशि वाले समीकरण को हल करने की प्रक्रिया पर विचार किया जायगा।

नीचे के उदाहरणों में यह प्रक्रिया भली भाँति स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 1. हल करो— $\sqrt{x+1}=\sqrt{x}+7$.

दोनों पक्षों का वर्ग करने से $x+1+2\sqrt{x}=x+7$;

पक्ष-परिवर्तन द्वारा $2\sqrt{x}=6$,

या, $\sqrt{x}=3$, या $x=9$.

उदाहरण 2. हल करो— $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}=5$.

पक्ष-परिवर्त्तन द्वारा, $\sqrt{x-1}=5-\sqrt{x-6}$,

दोनों पक्षों का वर्ग करने से, $x-1=25+(x-6)-10\sqrt{x-6}$,

या, $10\sqrt{x-6}=20$, या $\sqrt{x-6}=2$, या $x-6=4$;

$\therefore \quad x=10$.

जिस प्रक्रिया के अनुसार इस समीकरण को हल किया जाता है उसे पक्षान्तरीकरण प्रक्रिया (Method of Transposition) कहते हैं।

उदाहरण 3. हल करो—

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+2}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x+6}.$$

$$(3x+1)-(5x+2)=(4x+5)-(6x+6)$$

एक तादात्म्य है।

इसलिए $$\frac{(3x+1)-(5x+2)}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+2}}=\frac{(4x+5)-(6x+6)}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x+6}};$$

$$\therefore \quad \sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+2}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{6x+6}$$

दिये हुए समीकरण में अन्त वाले समीकरण को जोड़ने से,

$$2\sqrt{3x+1}=2\sqrt{4x+5},$$

या, $3x+1=4x+5$, या $x=-4$.

यहाँ जिस प्रक्रिया का अवलम्बन किया गया है उसे तादात्म्यमूलक प्रक्रिया (Method of Identity) कहते हैं।

उदाहरण 4. हल करो— $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$.

'भक्त-योग क्रिया' (अनु० 298) की सहायता से,

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2+1}{2-1},$$

या, $$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=3,$$

वर्ग करने से, $$\frac{x+1}{x-1}=9,$$

या, $$x+1=9x-9,$$

या, $$8x=10, \quad \therefore \quad x=\tfrac{5}{4}.$$

इसको भक्त-योग क्रिया द्वारा हल करना कहते हैं।

उदाहरण 5. हल करो— $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}$

इस समीकरण में $x=u^2$ लिखने से,

$$\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u-2}=\frac{3}{u-3},$$

या, $$\frac{1}{u-1}-\frac{2}{u-3}=\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u-2},$$

या, $$\frac{-(u+1)}{u-1}=\frac{1}{u-2},$$

या, $$u^2=3; \quad \therefore \quad x=u^2=3.$$

उदाहरण 6. हल करो—

$$\sqrt{\frac{x}{a}+\frac{a}{b}}+9\sqrt{\frac{x}{a}-\frac{a}{b}}=6\sqrt[4]{\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}},$$

इस समीकरण में $\frac{x}{a}+\frac{a}{b}=X$ और $\frac{x}{a}-\frac{a}{b}=Y$ लिखने से,

$$\sqrt{X}+9\sqrt{Y}=6\sqrt[4]{XY};$$

वर्ग करने से, $X+81Y+18\sqrt{XY}=36\sqrt{XY};$

पक्ष-परिवर्तन द्वारा $X+81Y-18\sqrt{XY}=0;$

या, $(\sqrt{X}-9\sqrt{Y})^2=0;$

$\therefore$ $\sqrt{X}-9\sqrt{Y}=0,$

या, $X=81Y;$

X और Y के मान लिखने से $\frac{x}{a}+\frac{a}{b}=81\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{b}\right);$

$\therefore$ $80\frac{x}{a}=82\frac{a}{b};$ $\therefore$ $x=\frac{82}{80}\cdot\frac{a^2}{b}=\frac{41}{40}\cdot\frac{a^2}{b}.$

उदाहरण 7. यदि $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x+y}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x=0$, अथवा $y=0$, अथवा $x+y=0$.

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x+y};$$

दोनों पक्षों का घन करने से $x+y+3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=x+y,$

या, $3\sqrt[3]{xy}\sqrt[3]{x+y}=0;$

3 से भाग करने से, $\sqrt[3]{xy(x+y)}=0;$

घन निकालने से, $xy(x+y)=0;$

$\therefore$ $x=0$, अथवा $y=0$, अथवा $(x+y)=0$.

345. विजातीय मूल (Extraneous Solution).

शेषोक्त अनुच्छेद में वर्णन की गई प्रक्रियाओं की सहायता से अकरणीगत राशि वाले किसी समीकरण का (Rationalisation) करने पर जो समीकरण पाया जाता है उसके मूलों में से हर एक दिये हुए समीकरण का मूल नहीं भी हो सकता।

उदाहरणार्थ नीचे का ही उदाहरण लो—

$$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

पक्षान्तर द्वारा, $\sqrt{2x+5}=1+\sqrt{x+6}$;

दोनों पक्षों का वर्ग करने से, $2x+5=1+x+6+2\sqrt{x+6}$,

या, $x-2=2\sqrt{x+6}$;

दोनों पक्षों का वर्ग करने से $x^2-4x+4=4(x+6)$,

या, $x^2-8x-20=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

या, $(x-10)(x+2)=0$;

$\therefore$ $x=10$, अथवा -2.

समीकरण (1) में x के बदले 10 और -2 लिखने पर ज्ञात होगा कि $x=10$ द्वारा समीकरण सिद्ध होता है किन्तु $x=-2$ द्वारा नहीं सिद्ध होता।

इस प्रकार के व्यतिक्रम का कारण यह है कि समीकरण (1) को सीधे सीधे हल किये बिना उक्त दोनों मूल नहीं पाये जाते वे समीकरण (2) के मूल हैं। यह समीकरण, समीकरण (1) और $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}=-1$, इन दोनों ही समीकरणों से ही करणी परिवर्त्तन द्वारा पाये जाते हैं।

अतएव ज्ञात होता है कि किसी करणीगत राशि वाले समीकरण के करणी परिवर्त्तन द्वारा जो समीकरण पाया जाता है बहुधा अन्यान्य समीकरणों का करणी परिवर्त्तन द्वारा भी वही एक ही समीकरण पाया जाता है। इसीलिए शेषोक्त करणी रहित समीकरण के प्रत्येक मूल से दिया गया करणीगत राशि वाला समीकरण सिद्ध नहीं होता।

प्राप्त हुए मूल समूह में से जिनके द्वारा दिया गया समीकरण सिद्ध नहीं होता है उन्हें विजातीय मूल कहा जा सकता है।

प्रश्नावली 124.

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो—

1. $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2}$.
2. $\sqrt{2x}+\sqrt{2x-7}=7$.
3. $\sqrt{5x-1}=1+\sqrt{5x-2}$.
4. $\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$.
5. $\sqrt{3x-3}=\sqrt{3x-11}$.
6. $\sqrt{x+12}=\sqrt{x+7}+1$.

7. $3-\sqrt{2x+26}=\sqrt{2x+29}$. 8. $\sqrt{x+10}+\sqrt{x+17}=7$.

9. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}=5$ 10. $\sqrt{x}+\sqrt{4+x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

11. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x+5}$.

12. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$. 13. $\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}=d$.

14. $\sqrt{x+2}=\sqrt{x+9}-1$.

15. $\sqrt{4a+x}-\sqrt{a+x}=2\sqrt{x-2a}$.

16. $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=3+\dfrac{3-\sqrt{x}}{2}$. 17. $\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=3+\dfrac{\sqrt{ax}+1}{2}$.

18. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=2$. 19. $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=3$.

20. $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$.

21. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}=1$

22. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=1+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

23. $\sqrt{x^2+11x+20}-\sqrt{x^2+5x-1}=3$

24. $\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2-x-2}=1$.

25. $\sqrt{\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)}+\dfrac{b}{x}=\sqrt{\left(\dfrac{x-b}{x-a}\right)}+\dfrac{a}{x}$.

26. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\dfrac{b}{\sqrt{x+a}}$.

27. $\sqrt{3+x-\sqrt{x+6}}=\sqrt{x-3}$.

28. $\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2-x+1}=1$.

29. $\dfrac{\sqrt{x}+a}{(\sqrt{x}-b)(\sqrt{x}-c)}+\dfrac{\sqrt{x}+b}{(\sqrt{x}-c)(\sqrt{x}-a)}$

$$+\frac{\sqrt{x}+c}{(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}-b)}=0$$

30. $\frac{\sqrt{x+a^2}}{a+b}+\frac{\sqrt{x+b^2}}{b+c}+\frac{\sqrt{x+c^2}}{c+a}=2(a+b+c).$

31. $a\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+(a+2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt{\{a(a+2)\}}.$

32. $\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{2x+b}-\sqrt{x-b}}=\frac{x+2a}{x+2b}.$

33. $\frac{1}{a^2}\sqrt{a+x}+\frac{2}{ax}\sqrt{a+x}+\frac{1}{x^2}\sqrt{a+x}=\frac{1}{c^2}\sqrt{x}.$

34. $\sqrt{1+a}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}+\sqrt{1-a}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}}=2\sqrt[4]{(1-a^2)}.$

——:o:——

उन्तीसवाँ अध्याय

द्विघात (वर्ग) समीकरण (Quadratic Equation)

346. द्विघात समीकरण।

जिस समीकरण में अव्यक्त राशि का सर्वोच्च घात वर्ग होता है उसे **वर्ग** (Quadratic) अथवा **द्विघात** (of the second degree) **समीकरण** कहते हैं।

यदि किसी वर्ग समीकरण में अव्यक्त राशि का केवल वर्ग वाला पद ही वर्त्तमान हो तो उसे शुद्ध (Pure) वर्ग समीकरण कहते हैं।

यदि अव्यक्त राशि का पहला घात वाला तथा द्विघात वाला दोनों ही पद वर्त्तमान होने पर समीकरण को मिश्रित समीकरण (Adfected Quadratic) कहते हैं।

जैसे, $2x^2-3=0$ एक शुद्ध वर्ग समीकरण और $4x^2-5x+1=0$ एक मिश्रित समीकरण है।

347. शुद्ध वर्ग समीकरण को हल करना ।

शुद्ध वर्ग समीकरण को हल करने के लिए पक्षपरिवर्तन तथा सरलीकरण प्रक्रिया की सहायता से अव्यक्त राशि के वर्ग का मान (Value) निकालना होता है । इस मान के दोनों वर्गमूल ही निर्णेय मूल होते हैं । इससे ज्ञात होता है कि शुद्ध वर्ग समीकरण के दोनों मूलों का परम मान (Absolute Value) परस्पर समान होता है किन्तु वे विपरीत चिह्न से युक्त होते हैं । (अनु० 322 देखो ।)

उदाहरण 1. हल करो :— $3x^2=24$.

दोनों पक्षों को 3 से भाग करने से,

$x^2=8$;

$\therefore$ $x=+\sqrt{8}$, अथवा $-\sqrt{8}$,

अर्थात्, $x=+2\sqrt{2}$, अथवा $-2\sqrt{2}$,

या, $x=\pm 2\sqrt{2}$.

उदाहरण 2 हल करो :— $7(x^2-1)=6(x^2+3)$.

विकोष्ठीकरण द्वारा, $7x^2-7=6x^2+18$,

या, $x^2=25$;

$\therefore$ $x=\pm 5$.

उदाहरण 3. हल करो :— $\dfrac{7x^2+1}{3x^2+1}-\dfrac{x}{7}=3-\dfrac{5+x}{7}$.

पक्षान्तर द्वारा, $\dfrac{7x^2+1}{3x^2+1}=\dfrac{x}{7}+3-\dfrac{5+x}{7}=\dfrac{16}{7}$,

$\therefore$ $16(3x^2+1)=7(7x^2+1)$,

या, $48x^2+16=49x^2+7$,

या, $x^2=9$;

$\therefore$ $x=\pm 3$.

उदाहरण 4. हल करो :— $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\dfrac{a}{b}$.

भक्त-योग की क्रिया के प्रयोग द्वारा,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{a+b}{a-b};$$

वग करने से, $\frac{1+x^2}{x^2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$,

$\therefore$ $\frac{1}{x^2}+1=1+\frac{4ab}{a^2-2ab+b^2}$,

$\therefore$ $x^2=\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}$.

$\therefore$ $x=\pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

उदाहरण 5. हल करो :— $\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+2}=1$.

पक्षान्तर द्वारा, $\sqrt{x^2+8}=1+\sqrt{x^2+2}$,

वर्ग करने से, $x^2+8=1+x^2+2+2\sqrt{x^2+2}$,

या, $2\sqrt{x^2+2}=5$,

या, $\sqrt{x^2+2}=\frac{5}{2}$,

या, $x^2+2=\frac{25}{4}$,

या, $x^2=\frac{25}{4}-2=\frac{17}{4}$;

$\therefore$ $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{17}$

प्रश्नावली 125.

हल करो—

1. $5x^2=45$.
2. $3(x^2-1)=2(x^2+11)$.
3. $7(x^2-3)=5(x^2-1)$.
4. $2(x^2+3)=x^2+22$.
5. $\frac{x^2+3}{5}=\frac{3x^2-7}{2}$.
6. $\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}=3$
7. $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-3}$.
8. $\frac{7}{x^2-7}-\frac{4}{x^2-3}=\frac{3}{x^2-2}$.
9. $\frac{x^2-2}{x^2-3}+\frac{x^2-3}{x^2-4}=\frac{x^2-1}{x^2-2}+\frac{x^2-4}{x^2-5}$.

10. $\frac{x^2-4}{x^2-1}+\frac{x^2-7}{x^2-3}+\frac{x^2-2}{x^2-9}=3.$

11. $\frac{2}{11}(6+x)-\frac{3x^2+5}{2x^2+3}=\frac{1}{11}(2x-5).$

12. $\frac{3(3+x)}{8}-\frac{5x^2+1}{3x^2+5}=\frac{6x-5}{16}.$

13. $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=2x.$

14. $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=5.$

15. $\sqrt{\left(\frac{x+6}{x-6}\right)}+\sqrt{\left(\frac{x-6}{x+6}\right)}=\frac{14}{\sqrt{13}}.$

16. $\sqrt{\left(\frac{x+4}{x-4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)}=3\frac{1}{3}.$

348. मिश्रित वर्ग समीकरण को हल करना।

नीचे वर्णित प्रक्रियाओं की सहायता से मिश्रित वर्ग समीकरण हल किये जाते हैं।

गुणनखण्ड निकाल कर हल करना—इस प्रक्रिया के अनुसार दायें पक्ष के पदों को बायें पक्ष में पक्षान्तरित करके नये बायें पक्ष के द्विघात व्यंजक का गुणनखण्ड निकालना होता है।

उदाहरण 1. हल करो— $x^2=7x-12.$

पक्षान्तर द्वारा $x^3-7x+12=0,$

या, $(x-4)(x-3)=0;$

चूँकि $x-4$ और $x-3$ इन दोनों गुणनखण्डों का गुणनफल शून्य है, इसलिए उनमें से किसी भी राशि का मान अवश्य ही शून्य होगा।

इसलिए, $x-4=0,$ अथवा $x-3=0;$

$\therefore$ $x=4,$ अथवा 3.

उदाहरण 2. हल करो— $15x^2-22x+8=0.$

$$\begin{aligned} &15x^2-22x+8 \\ &=15x^2-10x-12x+8 \\ &=5x(3x-2)-4(3x-2) \\ &=(5x-4)(3x-2). \end{aligned}$$

इसलिए, $(3x-2)(5x-4)=0;$

$\therefore \quad 3x-2=0$, अथवा $5x-4=0$.

$\therefore \quad x=\frac{2}{3}$, या $\frac{4}{5}$.

उदाहरण 3. हल करो—

$$\frac{1}{(x-c)^2}-\frac{2a+b-2c}{(x-c)(a-c)(a+b-c)}+\frac{1}{(a-c)(a+b-c)}=0.$$

बायाँ पक्ष $=\frac{1}{(x-c)^2}-\frac{1}{x-c}\left\{\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a+b-c}\right\}+\frac{1}{(a-c)(a+b-c)}$

$$=\left(\frac{1}{x-c}-\frac{1}{a-c}\right)\left(\frac{1}{x-c}-\frac{1}{a+b-c}\right).$$

इसलिए दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{1}{x-c}-\frac{1}{a-c}=0.$$

अथवा, $$\frac{1}{x-c}-\frac{1}{a+b-c}=0.$$

इन दोनों समीकरणों से,

$$\left.\begin{aligned} &x-c=a-c \\ \text{अथवा,}\quad &x-c=a+b-c, \end{aligned}\right\}$$

$\therefore \quad x=a$, या $a+b$.

प्रश्नावली 126.

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो:—

1. $x^2-5x+6=0.$
2. $x^2-7x+12=0.$
3. $x^2-x-2=0.$
4. $x^2+7x+10=0.$
5. $x^2+x-42=0.$
6. $12x^2-7x+1=0.$

7. $10x^2+9x+2=0.$ 8. $x^2-\cdot8x+\cdot15=0.$

9. $x^2-(a+b)x+ab=0.$ 10. $x^2-(a^2+b^2)x+a^2b^2=0.$

11. $(x-3a)^2-5(x-3a)+6=0.$

12. $x^2-ax-2a^2+3ab-b^2=0.$

13. $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-4}{x+1}+1=0.$ 14. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{25}{12}.$

[$\frac{x+1}{x}=z$ लिखने से $\frac{x}{x+1}=\frac{1}{z}$ होता है और दिया हुआ समीकरण $z+\frac{1}{z}=\frac{25}{12}$ इस समीकरण में बदल जाता है।]

15. $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0.$ 16. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}.$

349. पूर्ण वर्ग में परिवर्तन प्रक्रिया ।

इस प्रक्रिया के अनुसार दिये हुए समीकरण को इस प्रकार लिखना होता है कि बायें पक्ष में वर्त्तमान राशि एक पूर्ण वर्ग हो जाय। नीचे दी गई दोनों प्रक्रियाओं में से किसी एक की सहायता से इसका सम्पादन किया जाता है।

साधारण प्रक्रिया । $ax^2+bx+c=0$ इस वर्ग समीकरण की विवेचना की जाय, तो देखने में आयेगा कि यह वर्ग समीकरण का साधारण आकार है।

इस समीकरण का पक्ष-परिवर्त्तन करने से,

$$ax^2+bx=-c,$$

या, $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$ [दोनों पक्षों को a से भाग करने से];

दोनों पक्षों में x के गुणक के आधे का वर्ग अर्थात् $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ जोड़ने से,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

या, $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

$$\therefore \qquad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$\therefore \qquad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

या, $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

उदाहरण । हल करो :— $2x^2-16x+3=0$.

दिये हुए समीकरण के दोनों पक्षों को 2 से भाग करके पक्षान्तर करने से,

$$x^2-8x=-\tfrac{3}{2};$$

दोनों पक्षों में x के गुणक के आधे का वर्ग अर्थात् 16 जोड़ने से,

$$x^2-8x+16=-\tfrac{3}{2}+16=\tfrac{29}{2};$$

$$\therefore \qquad (x-4)^2=\tfrac{29}{2};$$

$$\therefore \qquad x-4=\pm\sqrt{\frac{29}{2}};$$

$$\therefore \qquad x=4\pm\sqrt{\frac{29}{2}}.$$

350. श्रीधर आचार्य की प्रक्रिया ।

$ax^2+bx+c=0$ इस मिश्रित वर्ग समीकरण की आलोचना करो ।

दोनों पक्षों को $4a$ से गुणा करने से,

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

बाएँ पक्ष में b^2 जोड़ने और घटाने से,

$$4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0,$$

या, $$(2ax+b)^2=b^2-4ac;$$

$$\therefore \qquad 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$\therefore \qquad 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$\therefore \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

साधारण प्रक्रिया से भी यह फल पाया जाता है ।

उदाहरण 1. **हल करो :—** $3x^2-6x+2=0$.

दिये हुए समीकरण के दोनों पक्षों को 4×3 **से गुणा करने से,**

$$36x^2-72x+24=0;$$

बाएँ पक्ष में 6^2 **जोड़ने और घटाने से,**

$$36x^2-72x+36-36+24=0,$$

या, $(6x-6)^2=12$, **या** $6x-6=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$;

$\therefore\quad 6x=6\pm2\sqrt{3},\qquad \therefore\quad x=1\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

उदाहरण 2. $4x^2-7x+2=0$, **समीकरण का मूल निकालो।**

यहाँ $x=\dfrac{7\pm\sqrt{7^2-4\times4\times2}}{2\times4}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-32}}{8}=\frac{7}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{17}$.

प्रश्नावली 127.

पूर्ण वर्ग में परिवर्त्तन प्रक्रिया की सहायता से निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

1. $x^2+px+q=0$.
2. $ax^2+2bx+c=0$.
3. $ax^2-bx+c=0$.
4. $x^2+px-q=0$.
5. $x^2-5x+6=0$.
6. $3x^2+2x-1=0$.
7. $3x^2-8x+4=0$.
8. $5x^2+33x-14=0$.
9. $x^2+2x-1=0$.
10. $2x^2-5x+2=0$.
11. $3x^2-2x-7=0$
12. $3x^2+2x-5=0$.
13. $7x^2-6x+1=0$
14. $141x^2-88x-45=0$.
15. $8x^2-6x-35=0$.
16. $12x^2-85x-175=0$.
17. $13x^2-14x-15=0$.
18. $x^2-141x+3410=0$.
19. $35x^2-916x-27429=0$.
20. $(x-2)^2+3(x-2)+2=0$.
21. $(3x-4)^2-5(3x-4)+6=0$. [$3x-4=z$ **लिखने से।**]
22. $(3x-5)^2-7(3x-5)(5x-7)+12(5x-7)^2=0$.

[**मान लो कि** $3x-5=a,\ 5x-7=b$;]

$\therefore\qquad a^2-7ab+12b^2=0$,

या, $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2-7\frac{a}{b}+12=0$;

इस समीकरण से $\frac{a}{b}$ का मान निकालने से $\frac{a}{b}=4$, या 3, अर्थात्
$\frac{3x-5}{5x-7}=4$, या 3. इससे x का मान निकाला जा सकता है ।

23. $(7x-2)^2-11(7x-2)(5x-3)+30(5x-3)^2=0;$

श्रीधर आचार्य्य की प्रक्रिया से निम्नलिखित समीकरणों को हल करोः—

24. $2x^2-3x-7=0.$ 25. $ax^2-(a+b)x+b=0.$

26. $3x^2-9x+5=0.$ 27. $a^2x^2-4ax-5=0.$

28. $5x^2-7x+2=0.$ 29. $3x^2+mx-n=0.$

30. $6x^2-7x-3=0.$ 31. $2x^2-x-10=0.$

निम्नलिखित समीकरणों का मूल निकालो :—

32. $x^2-3x+2=0.$ 33. $6x^2+7x+1=0.$

34. $3x^2+10x-11=0.$ 35. $7x^2+2x-123=0.$

351. कठिन उदाहरणमाला ।

नीचे दिये हुए समीकरण से वर्ग समीकरण के हल करने की तरह तरह की प्रक्रियाएँ भली भाँति स्पष्ट होंगी ।

उदाहरण 1. हल करो :— $\frac{x+3}{2x+7}=\frac{4x-6}{3x+4}.$

वज्रगुणा द्वारा, $(x+3)(3x+4)=(4x-6)(2x+7),$

या, $3x^2+13x+12=8x^2+16x-42,$

या, $5x^2+3x-54=0,$

या, $(5x+18)(x-3)=0;$

$\therefore$ $5x+18=0$, अथवा $x-3=0;$

$\therefore$ $x=-\frac{18}{5}$, अथवा 3.

उदाहरण 2. हल करो :— $\frac{a-b}{x}-\frac{x}{a}=\frac{b}{a}.$

बायाँ पक्ष सरल करने से, $\frac{a(a-b)-x^2}{ax}=\frac{b}{a},$

या, $a(a-b)-x^2=bx,$

या, $x^2+bx-a(a-b)=0,$

या, $$(x-a+b)(x+a)=0;$$

$\therefore$ $$x-a+b=0, \text{ अथवा } x+a=0;$$

$\therefore$ $$x=a-b, \text{ या } -a.$$

उदाहरण 3. हल करो:— $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{3}{x-2}$.

बायाँ पक्ष सरल करने से, $\dfrac{2x-2}{x^2-2x-15}=\dfrac{3}{x-2}$.

या, $$2(x-1)(x-2)=3(x^2-2x-15),$$

या, $$x^2=49; \quad \therefore \quad x=\pm 7.$$

उदाहरण 4. हल करो:— $\sqrt{(x+5)}+\sqrt{(x+12)}=\frac{7}{2}\sqrt{x}$.

दोनों पक्षों का वर्ग करने से,

$$x+5+x+12+2\sqrt{(x^2+17x+60)}=\tfrac{49}{4}x,$$

या, $$8\sqrt{(x^2+17x+60)}=41x-68.$$

वर्ग करने से, $$64(x^2+17x+60)=1681x^2-5576x+4624,$$

या, $$1617x^2-6664x+784=0,$$

या, $$(x-4)(1617x-196)=0;$$

$$\therefore \quad x=4, \text{ या } \tfrac{196}{1617}.$$

उदाहरण 5. हल करो:— $(x-2)(x-3)=\dfrac{18}{17^2}$.

मान लो कि $a=17$,

तो दिये हुए समीकरण से, $(x-2)(x-3)=\dfrac{a+1}{a^2}$,

या, $$a^2(x-2)(x-3)-a-1=0.$$

अर्थात्, $$(ax-2a)(ax-3a)+(ax-3a)-(ax-2a)-1=0,$$

या, $$(ax-3a)(ax-2a+1)-(ax-2a+1)=0,$$

अर्थात्, $$(ax-2a+1)(ax-3a-1)=0;$$

$\therefore$ $$ax-2a+1=0, \text{ अथवा, } ax-3a-1=0;$$

$\therefore$ $$x=\frac{2a-1}{a}=\frac{34-1}{17}=\frac{33}{17}=1\frac{16}{17},$$

अथवा, $$x=\frac{3a+1}{a}=\frac{52}{17}=3\frac{1}{17}.$$

उदाहरण 6. **हल करो:—**

$$(4-2\sqrt{3})x^2+2(1-\sqrt{3})x-3=0.$$

$$4-2\sqrt{3}=(1-\sqrt{3})^2;$$

$\therefore$ दिये हुए समीकरण में $1-\sqrt{3}$ के बदले a लिखने से,

$$a^2x^2+2ax-3=0, \text{ या } (ax+3)(ax-1)=0;$$

$\therefore$ $x=-\frac{3}{a}$, अथवा $\frac{1}{a}$;

$\therefore$ a के बदले $1-\sqrt{3}$ लिखने से,

$$x=-\frac{3}{1-\sqrt{3}}=\frac{-3(1+\sqrt{3})}{1-3}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}),$$

अथवा, $$x=\frac{1}{1-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-3}=\frac{1+\sqrt{3}}{-2}.$$

प्रश्नावली 128.

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो:—

1. $\frac{x-2}{x-3}=\frac{2x+11}{3x-1}.$

2. $\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-2}.$

3. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{9}{x+17}.$

4. $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+4}{x+5}=1\frac{31}{40}.$

5. $\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x-5}=2\frac{1}{6}.$

6. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=\frac{2}{3}.$

7. $\frac{2x+3}{7x-15}+13\frac{1}{8}=\frac{3x+22}{7-5x}.$

8. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$

9. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{2c}{x-c}.$

10. $\frac{x-a}{bx}+\frac{x-b}{ax}=\frac{2x}{(a+b)^2}.$

11. $(x-1)(x-2)=\frac{15}{14^2}.$

12. $(x-5)(x-6)=\frac{36}{35^2}.$

13. $(x-3)(x-4)=\frac{67\times 34}{33^2}.$

14. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{c+a}{c-a}+\frac{c-a}{c+a}.$

15. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{x-b}{x+b}-\frac{x+b}{x-b}$.

16. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

17. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$.

18. $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2+\left(\frac{x+a}{x-a}\right)-12=0$.

19. $\sqrt{(x+24)}-\sqrt{(x+15)}=\sqrt{x}$.

20. $\sqrt{(2x+5)}+\sqrt{(3x+10)}=\sqrt{(25x-1)}$.

352. वर्ग समीकरण के मूल-समूह का धर्म।

(a) पहले $ax^2=b$, यह शुद्ध वर्ग समीकरण मान लिया जाय, तो

यहाँ $x^2=\frac{b}{a}$, $\therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

I. यदि a और b दोनों ही धनात्मक या दोनों ही ऋणात्मक हों, अर्थात् यदि $\frac{b}{a}$ भिन्न धनात्मक हो, तो दोनों मूल वास्तव (Real) राशि होंगे।

II. यदि a और b दोनों राशियाँ विजातीय या विपरीत चिह्नों से युक्त हों, तो $\frac{b}{a}$ भिन्न ऋणात्मक होगी और $+\sqrt{\frac{b}{a}}$ और $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ दोनों वर्गमूल कल्पित (Imaginary) राशि होंगे। (अनु० 320 देखो।)

मान लो कि $\frac{b}{a}$ एक ऋणात्मक राशि है और $=-k^2$; यहाँ k^2 एक धनात्मक राशि है। उस दशा में

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{-k^2}=\{(-1)k^2\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}\times k. \qquad \text{(अनु० 316.)}$$

$\sqrt{-1}$ को ι द्वारा सूचित करने पर, $\sqrt{-k^2}=\iota k$ होता है।

इसलिए यदि $x^2=-k^2$ होता है, तो $x=\pm\iota k$.

(b) अब $ax^2+bx+c=0$ इस मिश्रित वर्ग समीकरण पर विचार करो।

यहाँ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

I. यदि $b=0$ हो तो समीकरण एक शुद्ध वर्ग समीकरण में परिणत होगा और दोनों मूल एक ही परम मान किन्तु विपरीत चिह्न से युक्त होंगे ।

II. यदि $b^2=4ac$ हो, तो मूलचिह्न के अन्तर्गत राशि शून्य होगी और दोनों मूल वास्तव एवं परस्पर समान होंगे । यहाँ दो घात समीकरण का बायाँ पक्ष एक पूर्ण वर्ग होगा ।

III. यदि $b^2>4ac$ हो, तो मूलचिह्न के अन्तर्गत राशि धनात्मक होगी और दोनों मूल वास्तव और परस्पर असमान होंगे ।

IV. यदि $b^2<4ac$ हो, तो b^2-4ac ऋणात्मक होगी । अतएव $\sqrt{b^2-4ac}$ कल्पित होगा । यहाँ दोनों मूल कल्पित और परस्पर असमान होंगे ।

353. वर्ग समीकरण में मूल और गुणक का सम्बन्ध ।

मिश्रित वर्ग समीकरण के दोनों पक्षों को x^2 के गुणक के द्वारा भाग देने पर समीकरण $x^2+px+q=0$ आकार में परिवर्तित होगा ।

यदि α और β इस समीकरण के मूल हों तो

$$\alpha=\tfrac{1}{2}\{-p+\sqrt{p^2-4q}\},\ \beta=\tfrac{1}{2}\{-p-\sqrt{p^2-4q}\}.$$

इसलिए,
$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=-p\\ \alpha\beta&=\ \ q\end{aligned}\right\}.$$

अर्थात् (1) दोनों मूलों का योग, परिवर्तित चिह्न से युक्त दूसरे पद के गुणक के समान और (2) दोनों मूलों का गुणनफल समीकरण में वर्त्तमान अचल राशि के समान है ।

टीका—α और β, $ax^2+bx+c=0$ समीकरण के मूल होने पर, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ और $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

उदाहरण 1. एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसका मूल 3 और -4 हो ।

मान लो कि निर्णेय समीकरण $x^2+px+q=0$.

उस दशा में, $-p=$ दोनों मूलों का योग

$=3+(-4)=-1$, अर्थात् $p=1$,

और, $q=$ दोनों मूलों का गुणनफल

$=3\times(-4)=-12.$

इसलिए, $x^2+x-12=0$ निर्णेय समीकरण है ।

उदाहरण 2. एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके दोनों मूल $x^2+px+q=0$, समीकरण के दोनों मूलों के दूने हों।

मान लो कि α और β दिये हुए समीकरण के दोनों मूल हैं । उस दशा में $\alpha+\beta=-p$ और $\alpha\beta=q$

यदि निर्णेय समीकरण का मूल α' और β' हो, तो $\alpha'=2\alpha$ और $\beta'=2\beta$, अतएव $\alpha'+\beta'=2(\alpha+\beta)=-2p$, और $\alpha'\times\beta'=4\alpha\beta=4q$.

इसलिए निर्णेय समीकरण $x^2+2px+4q=0$.

उदाहरण 3. α और β, $ax^2+bx+c=0$ समीकरण का मूल होने पर सिद्ध करो कि $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\},$$

$$\because \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ और } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

उदाहरण 4. α और β, $2x^2+3x-7=0$ समीकरण के मूल होने पर $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ का मान बताओ ।

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}.$$

यहाँ $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$ और $\alpha\beta=-\frac{7}{2}$,

$$\therefore \quad \text{दी हुई राशि}=\frac{(-\frac{3}{2})^2-2(-\frac{7}{2})}{-\frac{7}{2}}$$

$$=-2\tfrac{1}{14}.$$

उदाहरण 5. यदि α और β, $ax^2+bx+c=0$ (यहाँ a धनात्मक है), ये समीकरण के वास्तविक मूल हों, तो x का मान α और β तथा उनके अन्तर्वर्त्ती मान के अतिरिक्त चाहे कुछ ही क्यों न हो, ax^2+bx+c व्यंजक का मान धनात्मक होगा और $x=\alpha$, अथवा β होने पर व्यंजक का मान शून्य होगा।

इससे पहले दिखलाया जा चुका है कि,

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta), \qquad \text{उदा० 3.}$$

अतएव $x=\alpha$, अथवा β होने पर व्यंजक का मान शून्य होगा।

मान लो कि α और β में α राशि β से बड़ी है।

यदि $x>\alpha$ हो तो यह β से भी बड़ी होगी, इसलिए $x-\alpha$ और $x-\beta$ दोनों ही धनात्मक होंगी। इसलिए व्यंजक धनात्मक होगा।

यदि $x<\beta$ हो, तो $x-\alpha$ और $x-\beta$ दोनों ही ऋणात्मक होंगी। इसलिए व्यंजक धनात्मक होगा।

यदि x, α और β के अन्तर्वर्त्ती कोई राशि हो, तो $x-\alpha$ ऋणात्मक और $x-\beta$ धनात्मक होगी। इसलिए व्यंजक ऋणात्मक होगा।

इससे $x=\alpha$, अथवा β होने पर व्यंजक का मान शून्य होगा; x का मान α और β के अन्तर्वर्त्ती होने पर व्यंजक ऋणात्मक होगा और x के उक्त मान के अतिरिक्त अन्य किसी मान से युक्त होने पर व्यंजक धनात्मक होगा।

उदाहरण 6. सिद्ध करो कि m के किसी भी वास्तव मान से युक्त होने पर $x^2+2x\left(m+\frac{1}{m}\right)+3=0$ समीकरण के मूल सर्वदा ही 'वास्तव' होंगे।

दोनों मूलों के वास्तव होने पर,

$$4\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-12 \text{ का धनात्मक होना आवश्यक है।}$$

अर्थात्, $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-3$ का धनात्मक होना आवश्यक है।

अर्थात्, $m^2+\frac{1}{m^2}-1$ का धनात्मक होना आवश्यक है।

अर्थात्, m^4-m^2+1 का धनात्मक होना आवश्यक है ।

अर्थात्, $(m^2-1)^2+m^2$ का धनात्मक होना आवश्यक है ।

अन्त में कहा गया व्यंजक दो वर्गों का योग है; अतएव m का चाहे कुछ ही मान क्यों न हो, यह एक धनात्मक राशि है । अतएव m किसी भी वास्तव मान से युक्त क्यों न हो, दोनों मूल वास्तव होंगे ।

उदाहरण 7. यदि $ax^2+bx+c=0$ और $a'x^2+b'x+c'=0$ दोनों समीकरणों में एक साधारण (Common) मूल हो, तो सिद्ध करो कि,

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2.$$

मान लो कि a दिये हुए दोनों समीकरणों का साधारण मूल है । ऐसी दशा में a के द्वारा दोनों समीकरण सिद्ध होंगे;

इसलिए,
$$\left.\begin{aligned} a\boldsymbol{a}^2+b\boldsymbol{a}+c=0 \\ \text{और}\quad a'\boldsymbol{a}^2+b'\boldsymbol{a}+c'=0 \end{aligned}\right\}$$

वज्रगुणन-प्रणाली के अनुसार,

$$\frac{\boldsymbol{a}^2}{bc'-b'c}=\frac{\boldsymbol{a}}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b};$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a}^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \text{ और } \boldsymbol{a}=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

$$\therefore \quad \frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2, \text{ या } (bc'-b'c)(ab'-a'b)$$
$$=(ca'-c'a)^2.$$

354. सिद्धान्त । वर्ग समीकरण में दो से अधिक मूल नहीं हो सकते ।

यदि सम्भव हो, तो कल्पना करो कि $ax^2+bx+c=0$ इस समीकरण के तीन मूल हैं जो a, β और γ हैं ।

a, β और γ द्वारा यह समीकरण सिद्ध होता है इसलिए

$$a\boldsymbol{a}^2+b\boldsymbol{a}+c=0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$a\beta^2+b\beta+c=0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$a\gamma^2+b\gamma+c=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1) और (2) से, $a(\boldsymbol{a}^2-\beta^2)+b(\boldsymbol{a}-\beta)=0.$

चूँकि a और β एक दूसरे से भिन्न हैं, इसलिए $a-\beta$ शून्य नहीं हो सकता। इसलिए अन्त में कहे गये समीकरण के दोनों पदों को $a-\beta$ से भाग करने पर,

$$a(a+\beta)+b=0; \qquad \text{..............(4)}$$

इसी प्रकार (2) और (3) से,

$$a(\beta+\gamma)+b=0. \qquad \text{..............(5)}$$

(4) में से (5) घटाने से,

$$a(a-\gamma)=0.$$

इसलिए $a=0$, अथवा $a-\gamma=0$. किन्तु a शून्य नहीं हो सकता। बात यह है कि यहाँ वर्ग समीकरण पर विचार किया जा रहा है। a, β और γ को एक दूसरे से भिन्न माना गया है। अतएव $a-\gamma$ भी शून्य नहीं हो सकता। इससे हम एक असम्भव सिद्धान्त पर पहुँचते हैं। अतएव a, β और γ को जो एक दूसरे से भिन्न माने गये हैं वह ग़लत है; अर्थात् किसी वर्ग समीकरण के दो से अधिक मूल नहीं होते।

टीका—यहाँ यह दिखाया गया है कि किसी वर्ग समीकरण के दो से अधिक विभिन्न मूल नहीं हो सकते। एक वर्ग समीकरण में दो और केवल दो ही मूल रहेंगे। यह प्रतिज्ञा नीचे प्रमाणित की गई है।

दो एकघात वाले व्यंजकों का गुणनफल एक द्विघात व्यंजक होगा और विपरीत भाव से किसी भी द्विघात व्यंजक को दो और केवल दो समान अथवा असमान वास्तव अथवा कल्पित एकघात समीकरण में विश्लेषण किया जा सकता है।

$ax^2+bx+c=0$ इस समीकरण पर विचार करो।

साधारण भाग द्वारा अथवा अनुच्छेद 230 की सहायता से ज्ञात होता है कि ax^2+bx+c को $x-a$ से भाग करने पर aa^2+ba+c शेष रहता है।

यह मानकर कि प्रत्येक समीकरण का कम से कम एक मूल होता है। कल्पना करो कि a इस दिये हुए समीकरण का एक मूल है। ऐसी दशा में, $aa^2+ba+c=0$, अर्थात् उक्त अवशिष्ट शून्य होगा। इसलिए ax^2+bx+c व्यंजक $x-a$ द्वारा पूरा पूरा बाँटा जा सकता है; अर्थात् $x-a$, ax^2+bx+c का एक गुणनखण्ड है। अतएव इस समीकरण का कोई मूल a के लिए 'ax^2+bx+c' इस द्विघात व्यंजक का एकघात

गुणनखण्ड $x-a$ पाया जायगा । किन्तु ax^2+bx+c इस द्विघात व्यंजक के दो और केवल दो एकघात (समान अथवा असमान, वास्तव अथवा कल्पित) गुणनखण्ड हो सकते हैं । इसलिए $ax^2+bx+c=0$ इस वर्ग समीकरण के दो और केवल दो (समान अथवा असमान, वास्तव अथवा कल्पित) मूल होंगे ।

चूँकि n-वाँ घात (Degree) व्यंजक का n और केवल n संख्यक एकघात गुणनखण्ड रहता है इसलिए उपर्युक्त उपाय से सिद्ध किया जा सकता है कि n घात समीकरण का n और केवल n संख्यक मूल होंगे ।

किसी वर्ग समीकरण के a, β और γ तीन विभिन्न मूल नहीं हो सकते । अनुच्छेद 354 में यही सिद्ध किया गया है, किन्तु यह नहीं सिद्ध किया गया है कि समीकरण के 'a, a, β' या 'a, β, β' इस प्रकार के तीन मूल (दो समान और एक असमान) नहीं रह सकते ।

प्रश्नावली 129.

सिद्ध करो कि निम्नलिखित समीकरणों के मूल 'वास्तव' हैं :—

1. $x^2 = 5$. 2. $2x^2 = 7$. 3. $6x^2=9$.

4. $x^2-4x+1=0$. 5. $3x^2-9x+5=0$.

सिद्ध करो कि निम्नलिखित समीकरणों के मूल 'कल्पित' हैं :—

6. $x^2+3=0$. 7. $4x^2+15=0$. 8. $3x^2=-27$.

9. $x^2+x+2=0$. 10 $3x^2-x+2=0$.

सिद्ध करो कि निम्नलिखित समीकरणों के मूल परस्पर समान हैं :—

11. $x^2+2x+1=0$. 12. $9x^2-132x+484=0$.

13. $5x^2-30x+45=0$. 14. $9x^2+126x+441=0$.

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्नों के मूलों को लेकर एक एक समीकरण बनाओ :—

15. 3, 5. 16. $-21, \frac{3}{2}$.

17. $a+b, a-b$. 18. $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$.

19. एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके दोनों मूल $x^2+4x+18=0$ समीकरण के दोनों मूलों के तिगुने हों ।

20. $x^2+px+q=0$ समीकरण के मूल α और β हैं । एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ हों ।

21. एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसका मूल $ax^2+bx+c=0$ समीकरण के दोनों मूलों का वर्ग हो ।

22. α और β, $x^2+px+q=0$ समीकरण के मूल हैं । एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta}$ और $\frac{\beta}{\alpha}$ हों ।

23. α और β, $ax^2+bx+c=0$ समीकरण के मूल होने पर, $\alpha^3+\beta^3$ का मान बताओ ।

24. $ax^2+bx+c=0$ के दोनों मूलों के एक दूसरे के वर्ग होने पर सिद्ध करो कि $b^3+a^2c+ac^2-3abc=0$.

25. यदि $ax^2+bx+c=0$ और $bcx^2+cax+ab=0$, इन दोनों समीकरणों को एकमूल 'साधारण' हो और $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $b^4(c-a)^2=a^2c^2(a-b)(b-c)$.

355. वर्ग समीकरण की सहायता से अन्य समीकरणों को हल करना ।

बहुत से ऐसे समीकरण हैं जिनको हल करने के लिए वर्ग समीकरण की सहायता लेनी पड़ती है । नीचे ऐसे समीकरणों के कुछ उदाहरण दिये गये हैं ।

उदाहरण 1. हल करो :— $x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}+6=0$.

मानलो कि $x^{\frac{1}{3}}=z$. उस दशा में समीकरण $z^2-5z+6=0$ यह रूप धारण करता है ।

इस समीकरण का मूल $z=2$ या 3;

$\therefore \quad x^{\frac{1}{3}}=2$, अथवा 3;

$\therefore \quad x=8$, अथवा 27.

उदाहरण 2. हल करो :— $x^6-9x^3+8=0$.

मानलो कि $x^3=z$, उस दशा में समीकरण

$$z^2-9z+8=0,$$

या, $(z-1)(z-8)=0$ यह रूप धारण करता है।

इस समीकरण का मूल $z=1$ अथवा 8;

$\therefore$ $x^3=1$ अथवा 8;

$\therefore$ $x=1^{\frac{1}{3}}$, अथवा $8^{\frac{1}{3}}$

$=1$, अथवा 2.

उदाहरण 3. हल करो :— $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$.

बायाँ पक्ष $=(x-2)(x^3-2x^2-5x+6)$

$=(x-2)(x+2)(x^2-4x+3)$

$=(x-2)(x+2)(x-1)(x-3)$;

$\therefore$ $(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)=0$;

$\therefore$ $x=1, 2, -2$, अथवा 3.

उदाहरण 4. हल करो :— $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=360$.

पुंज में रखने से $\{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}=360$,

या, $(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-360=0$,

या, $z(z+2)-360=0$. यहाँ $z=x^2+7x+10$.

या. $z^2+2z-360=0$,

या, $(z+20)(z-18)=0$,

$\therefore$ $z=18$, अथवा -20.

इससे $x^2+7x+10=18$, अथवा -20.

$\therefore$ $x^2+7x-8=0$ ....(1)

अथवा, $x^2+7x+30=0$ ....(2)

(1) से $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{81}}{2}=1$, अथवा -8.

(2) से $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{-71}}{2}=\frac{1}{2}(-7\pm i\sqrt{71})$.

उदाहरण 5. **हल करो :—** $3(9^x-4.3^{x-1})+1=0.$

$$3(9^x-4.3^{x-1})+1=0,$$

या, $$3.9^x-4.3^x+1=0,$$

या, $$3.3^{2x}-4.3^x+1=0;$$

3^x के बदले y लिखने से,

$$3y^2-4y+1=0;$$

हल करने से $y=\frac{1}{3}$, या 1;

$$\left.\begin{array}{lll}\therefore & 3^x=\frac{1}{3}=3^{-1}; & \therefore\ x=-1 \\ \text{या,} & 3^x=1=3^0; & \therefore\ x=0\end{array}\right\}.$$

उदाहरण 6. **हल करो :—** $x^4+1=0.$

$$x^4+1=0,$$

दोनों पक्षों को x^2 से भाग करने से,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=0, \text{ या } \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=2;$$

$$\therefore \quad x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{2};$$

$\therefore \quad x^2-\sqrt{2}x+1=0$, अतएव, $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};$

अथवा $x^2+\sqrt{2}x+1=0;$

अतएव $x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$

प्रश्नावली 130.

हल करो :—

1. $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}+12=0$
2. $x^{\frac{4}{5}}-3x^{\frac{2}{5}}+2=0.$
3. $x^{2n}-5x^n+6=0.$
4. $x^{\frac{1}{3}}-30x^{-\frac{1}{3}}+1=0.$
5. $x^4-17x^2+16=0.$
6. $x^6-28x^3+27=0.$
7. $x^{12}-65x^6+64=0.$
8. $x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0.$
9. $x^4-5x^3-19x^2+125x-150=0.$

10. $(x-1)(x+3)(x-2)(x-6)+36=0.$

11. $(x-2)(x+3)(x+6)(x+1)+56=0.$

12. $4x^4-16x^3+23x^2-16x+4=0.$

13. $2(4^x-3.2^{-1})+1=0.$

14. $5.2^{2x}=2(2^{3x}+2^x).$

15. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=a^4.$

356. द्विघात युगपत् समीकरण।

निम्नलिखित उदाहरणों से द्विघात युगपत् समीकरण के हल करने की प्रक्रिया ज्ञात होगी।

उदाहरण 1. हल करो:— $\left.\begin{array}{r} x+3y=4 \\ 2y^2+5x=7 \end{array}\right\}.$

दोनों समीकरणों में से पहले से, $y=\frac{4-x}{3};$

y के बदले ऊपर दिया हुआ मान दूसरे समीकरण में लिखने से,

$$2\left(\frac{4-x}{3}\right)^2+5x=7,$$

या, $2(16-8x+x^2)+45x-63=0,$

या, $2x^2+29x-31=0,$

या, $(x-1)(2x+31)=0;$

$\therefore$ $x=1$, या $-\frac{31}{2}$.

इसलिए पहले समीकरण से,

$y=1$, या $\frac{13}{2}$.

उदाहरण 2. हल करो:— $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{array}\right\}.$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=13+12=25;$$

$\therefore$ $x+y=\pm 5.$

फिर $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=13-12=1;$

$\therefore$ $x-y=\pm 1.$

अतएव निम्नलिखित चार समीकरण पाये जाते हैं:—

$$\left.\begin{array}{l}x+y=5\\x-y=1\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x+y=5\\x-y=-1\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x+y=-5\\x-y=1\end{array}\right\}\text{ और }\left.\begin{array}{l}x+y=-5\\x-y=-1\end{array}\right\};$$

$$\therefore\quad x=3,\ y=2,\qquad x=-2,\ y=-3,$$
$$x=2,\ y=3;\qquad x=-3,\ y=-2.$$

उदाहरण 3. हल करो :—

$$xy+3(x+y)=11 \quad\text{..............(1)}$$
$$yz+3(y+z)=21 \quad\text{..............(2)}$$
$$zx+3(z+x)=15 \quad\text{..............(3)}$$

समीकरणों के प्रत्येक पक्ष में 9 जोड़ने और प्राप्त बायें पक्षों के गुणन-खण्डीकरण द्वारा,

$$(x+3)(y+3)=20 \quad\text{..............(4)}$$
$$(y+3)(z+3)=30 \quad\text{..............(5)}$$
$$(z+3)(x+3)=24 \quad\text{..............(6)}$$

परस्पर गुणा करने से,

$$(x+3)^2(y+3)^2(z+3)^2=14400;$$
$$(x+3)(y+3)(z+3)=\pm 120 \quad\text{..............(7)}$$

(7) को क्रम से (4). (5) और (6) से भाग करने से,

$$z+3=\pm 6,\ x+3=\pm 4,\ y+3=\pm 5;$$

$\therefore$ $x=1$, अथवा -7; $y=2$, अथवा -8; $z=3$, अथवा -9.

प्रश्नावली 131.

हल करो :—

1. $\left.\begin{array}{l}3x+y=4\\x^2+y^2=2\end{array}\right\}.$

2. $\left.\begin{array}{l}x+4y=13\\y^2-xy=6\end{array}\right\}.$

3. $\left.\begin{array}{l}2x-3y=5\\x^2-2xy=8\end{array}\right\}.$

4. $\left.\begin{array}{l}5x+2y=12\\2x^2+3xy+y^2=15\end{array}\right\}.$

5. $\left.\begin{array}{l}x+y=8\\x^2+y^2=34\end{array}\right\}.$

6. $\left.\begin{array}{l}x-y=1\\x^2+y^2=41\end{array}\right\}.$

7. $\left.\begin{array}{l}x+y=10\\xy=21\end{array}\right\}.$

8. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=17\\xy=4\end{array}\right\}.$

9. $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ xy=40 \end{array}\right\}.$

10. $\left.\begin{array}{r} 3x+y=15 \\ xy=12 \end{array}\right\}.$

11. $\left.\begin{array}{r} xy=12 \\ yz=20 \\ zx=15 \end{array}\right\}.$

12. $\left.\begin{array}{r} x(y+z)=8 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=20 \end{array}\right\}.$

13. $\left.\begin{array}{r} (x+y)(x+z)=15 \\ (y+z)(y+x)=18 \\ (z+x)(z+y)=30 \end{array}\right\}.$

14. $\left.\begin{array}{r} x^2yz=18 \\ xy^2z=12 \\ xyz^2=6 \end{array}\right\}.$

15. $\left.\begin{array}{r} xy+5(x+y)=45 \\ yz+5(y+z)=35 \\ zx+5(z+x)=17 \end{array}\right\}.$

16. $\left.\begin{array}{r} xyz=2(x+y) \\ =\frac{6}{5}(y+z) \\ =\frac{3}{2}(z+x) \end{array}\right\}.$

357. वर्ग समीकरण सम्बन्धी प्रश्न ।

नीचे वर्ग समीकरण सम्बन्धी कुछ सरल प्रश्न हल किये गये हैं :

उदाहरण 1. दो ऐसी संख्याएँ बताओ जिनका योग 15 और जिनके वर्गों का योग 117 हो ।

मान लो कि दोनों संख्याओं में से एक संख्या x है ।

ऐसी अवस्था में दूसरी संख्या $15-x$ होगी ।

अतएव, $x^2+(15-x)^2=117.$

अथवा, $2x^2-30x+108=0$, अथवा $x^2-15x+54=0$,

अथवा, $(x-9)(x-6)=0$; $\therefore \quad x=9$, अथवा 6;

इसलिए दोनों संख्याएँ 9 और $15-9=6$.

उदाहरण 2. ऐसी दो संख्याएँ बताओ जिनका गुणनफल 15 और वर्गों का अन्तर 16 है ।

मान लो कि वे दोनों संख्याएँ x और y हैं ।

उस दशा में, $xy=15$ ....(1)

और $x^2-y^2=16$ ....(2)

(1) से $y=\frac{15}{x}$;

(2) में $y=\frac{15}{x}$ लिखने से,

$$x^2-\left(\frac{15}{x}\right)^2=16,$$

अथवा, $x^4-16x^2-225=0,$

अथवा, $(x^2+9)(x^2-25)=0.$

अब $x^2+9=0$ नहीं हो सकता, क्योंकि उसके सभी पद धनात्मक हैं।

इसलिए, $x^2-25=0;$ $\therefore$ $x=\pm 5.$

$\therefore$ (1) से $y=\pm 3.$

$\therefore$ निर्णेय संख्याएँ 5, 3, अथवा -5, -3 हैं।

उदाहरण 3. एक आदमी ने 6000 रुपयों में कुछ घोड़े ख़रीदे। यदि वह उतने ही रुपयों में 4 घोड़े कम ख़रीदता, तो उसे प्रति घोड़ा 50 रु० अधिक देने पड़ते। बताओ उसने कितने घोड़े ख़रीदे थे।

मान लो कि घोड़ों की संख्या x है।

ऐसी दशा में प्रत्येक घोड़े का मूल्य $\frac{6000}{x}$ रु० है। यदि वह 4 घोड़े कम ख़रीदता, तो उसे प्रत्येक घोड़े का मूल्य $\frac{6000}{x-4}$ रु० देना पड़ता।

अतएव प्रश्न की शर्त के अनुसार,

$$\frac{6000}{x-4}-\frac{6000}{x}=50,$$

या, $\frac{120}{x-4}-\frac{120}{x}=1,$ या $x^2-4x-480=0,$

या, $(x-24)(x+20)=0;$ $\therefore$ $x=24,$ अथवा $-20.$

इसलिए घोड़ों की संख्या $=24.$

टीका— '$x=-20$' उत्तर यहाँ असम्भव है।

उदाहरण 4. किसी प्रश्न के हल में एक पंक्ति के तीन अङ्क अस्पष्ट होगये हैं। उन तीनों अस्पष्ट अङ्कों का स्थान '*' चिह्न-द्वारा सूचित करने पर वह पंक्ति $(*4)^2=**96$ इस रूप में लिखी जाती है। उन तीनों अस्पष्ट अङ्कों को मालूम करो।

मान लो कि तीनों अस्पष्ट अङ्क क्रमशः x, y और z हैं। ऐसी दशा में,

$$(10x+4)^2=1000y+100z+96,$$

या, $$100x^2+80x+16=1000y+100z+96,$$

या, $$100x^2+80x-80=1000y+100z=100(10y+z).$$

अन्तिम समीकरण का दायाँ पक्ष 100 से विभाज्य है। इसलिए बायाँ पक्ष भी 100 से पूरा पूरा बाँटा जासकता है।

यहाँ बायें पक्ष का $100x^2$ पद 100 से विभाज्य है; अतएव $80x-80$, अथवा $20(4x-4)$ पद भी 100 से विभाज्य होगा; अर्थात् $4x-4$ को, इसलिए $x-1$ को 5 का एक गुणय होना पड़ेगा। यहाँ x का मान 1 से लेकर 9 तक की पूर्ण संख्याओं में से कोई भी एक है। अतएव $x-1=5$;

$\therefore$ $x=6$.

किन्तु $(64)^2=4096$; $\therefore$ $y=4$ और $z=0$.

उदाहरण 5. एक ट्रेन x^2 बजकर x मिनट पर किसी स्टेशन पर पहुँचने वाली थी। भूल से एक आदमी उस स्टेशन पर x बजकर x^2 मिनट पर आगया और वहाँ उसे ट्रेन के लिए x घण्टे में x मिनट कम समय तक प्रतीक्षा करनी पड़ी। बताओ वह ट्रेन स्टेशन पर किस समय पहुँची।

12 बजे के $\left(x^2+\frac{x}{60}\right)$ घण्टा बाद ट्रेन स्टेशन पर पहुँचने वाली थी।

12 बजे के $\left(x+\frac{x^2}{60}\right)$ घण्टा बाद आदमी स्टेशन पर पहुँचा था।

$\therefore$ उस आदमी को $\left(x^2+\frac{x}{60}\right)-\left(x+\frac{x^2}{60}\right)$ घं० प्रतीक्षा करनी पड़ी थी।

प्रश्न के अनुसार, $$x^2+\frac{x}{60}-\left(x+\frac{x^2}{60}\right)=x-\frac{x}{60},$$

या, $$\frac{59}{60}x^2-\frac{59}{60}x=\frac{59}{60}x,$$

या, $x^2-2x=0$; $\therefore$ $x=2$, या, 0.

अतएव स्टेशन पर ट्रेन के पहुँचने का समय 4 बजकर 2 मिनट है। x का मान 0 मानने पर ट्रेन के पहुँचने का समय 12 बजे होता है और आदमी ठीक समय पर स्टेशन पहुँचता है। उसे ट्रेन के लिए प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ती।

प्रश्नावली 132.

1. दो ऐसी संख्याएँ बताओ जिनका योग 12 है और जिनके वर्ग का योग 74 है।

2. दो ऐसी संख्याएँ बताओ जिनका योग 17 है और जिनके वर्ग का अन्तर 17 है।

3. 22 के ऐसे दो भाग करो कि उनका गुणनफल 105 हो।

4. एक ऐसी संख्या बताओ जिसमें से उसकी विकल्प संख्या के 30 गुने को घटाने से 1 आवे।

5. दो संख्याओं का गुणनफल 28 और उनके वर्ग का अन्तर 33 है, तो उन दोनों संख्याओं को बताओ।

6. ऐसी तीन संख्याएँ बताओ जिनमें से दो दो को लेकर गुणा करने पर गुणनफल 42, 56 और 48 हों।

7. एक आयत का क्षेत्रफल 2700 वर्ग गज़ और उसकी परमिति 210 गज़ है। उस आयत की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

8. किसी सम्मेलन के उत्सव का व्यय 50 रु० उसके सभासदों में बराबर बराबर बाँट दिया गया। परन्तु 4 सभासदों ने अपने हिस्से के रुपये देने में अनिच्छा प्रकट की। इससे शेष सभासदों को 10 आ० के हिसाब से अधिक देना पड़ा। बताओ उस सम्मेलन में कितने सभासद थे।

9. एक आदमी ने 240 रु० में कुछ भेड़ें ख़रीदीं। यदि उतने ही रुपयों में वह 20 भेड़ें और ख़रीद पाता तो प्रत्येक भेड़ का मूल्य 2 रु० कम हो जाता। बताओ उसने कितनी भेड़ें ख़रीदी थीं।

10. सिपाहियों के एक दल से एक अन्तःपूर्ण वर्ग बनाया गया। यदि सामने की पंक्ति में समान संख्या के सिपाहियों का समावेश करके 3 गम्भीरता वाला एक अन्तःशून्य वर्ग बनाया जाता, तो 121 सिपाही होते। कुल सिपाहियों की संख्या बताओ।

11. एक आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 2000 वर्गगज़ है। उसके भीतर चारों ओर 2 गज़ चौड़ा रास्ता बनाया गया जिसका क्षेत्रफल 344 वर्ग गज़ है, तो उस क्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

12. 36 पुरुष और स्त्री कर्मचारियों का वेतन 640 रु० है। प्रत्येक पुरुष को उतने ही रुपये वेतन मिलता है जितनी कि स्त्रियाँ वहाँ काम करती हैं और प्रत्येक स्त्री को उतने ही रुपये वेतन मिलते हैं जितने कि पुरुष वहाँ काम करते हैं। बताओ वहाँ कितने पुरुष और कितनी स्त्रियाँ काम करती हैं।

13. 250 पृष्ठों की एक पुस्तक के पूर्वार्ध के पढ़ने की गति की अपेक्षा उतरार्द्ध के पढ़ने की गति प्रति घण्टा 15 पृष्ठ बढ़ गई। इस प्रकार एक मनुष्य ने सारी पुस्तक $8\frac{1}{4}$ घण्टा में समाप्त करदी। बताओ उसने प्रति घण्टा कितने पृष्ठ पढ़े।

14. एक आदमी 1809 ई० में पैदा हुआ। यदि x^2 ई० में उसकी अवस्था $x-3$ वर्ष की थी तो बताओ x का मान क्या है।

15. किसी काम को ख़तम करने में B की अपेक्षा A को 8 मिनट का समय अधिक लगता है। वे दोनों एक साथ काम करके $7\frac{1}{2}$ मिनट में उस काम को पूरा कर सकते हैं। बताओ वे अलग अलग कितने समय में उस काम को पूरा कर लेंगे।

——:०:——

तीसवाँ अध्याय

दो घात के फल का लेखाचित्र

358. आठवें अध्याय में समतल के ऊपर विन्दु-अङ्कन की प्रणाली पर विचार किया गया है। तत्पश्चात् चौबीसवें अध्याय में एक घात फल का लेखाचित्र खींचने की प्रणाली और लेखाचित्र द्वारा प्रश्नों को हल करने की रीति प्रदर्शित की गई है। अब इस अध्याय में यह बतलाया जायगा कि वर्ग समीकरण और दो घात के फल का लेखाचित्र किस प्रकार अङ्कित किया जाता है।

दो अव्यक्त वर्ग राशियों के (of the second degree) समीकरण का साधारण आकार:

$$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0.$$

इस स्थल में a, b, c, f, g, h राशियाँ अचल (Constant) हैं।

उपरोक्त अचल राशियों का संख्यात्मक मान जानकर, जिन सब विन्दुओं के भुज-कोटि के द्वारा ऊपर कहा गया समीकरण सिद्ध होता है उन्हें वर्गाङ्कित काग़ज़ पर अङ्कित करने पर अङ्कित विन्दुएँ एक रेखा पर होंगे। इस रेखा को शांकव या कानिक (Conic) कहा जाता है।

शांकव (कानिक) पाँच प्रकार के हो सकते हैं; जैसे, (1) दो सरल रेखायें (Pair of straight lines), (2) वृत्त (Circle), (3) दीर्घ वृत्त (Ellipse), (4) परवलय (Parabola), (5) अति-पर-वलय (Hyperbola). यह अचल राशियों के घात पर निर्भर करता है कि दो घात के साधारण समीकरण के द्वारा किस प्रकार का शांकव सूचित होगा।

359. सरल रेखाद्वय।

यदि दो अव्यक्त राशियों के वर्ग समीकरण के बाएँ पक्ष को दो एक घात गुणनखंडों में विश्लेषण किया जा सके, तो समीकरण का लेखाचित्र दो सरल रेखायें होंगी।

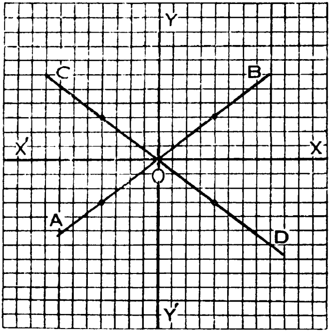
उदाहरण 1. $9x^2 - 16y^2 = 0$ समीकरण का लेखाचित्र खींचो ।

दिये हुए समीकरण से,

$$(3x+4y)(3x-4y)=0.$$

अतएव, $$\left.\begin{aligned}3x+4y&=0\\3x-4y&=0\end{aligned}\right\}.$$

$3x+4y=0$ एक घात समीकरण है । अतएव इसका लेखाचित्र एक सरल रेखा होगी (अनु० 277). इसी प्रकार $3x-4y=0$ का लेखाचित्र भी एक सरल रेखा होगी ।



दोनों रेखाओं में से किसी भी एक के ऊपर वर्तमान किसी विन्दु के भुज-कोटि द्वारा दिया हुआ समीकरण सिद्ध होता है, किसी दूसरे भुज-कोटि से नहीं होता । इसलिए ये दो सरल रेखायें दिये हुए समीकरण का लेखाचित्र हैं और इन दोनों के सिवा कोई अन्य रेखा नहीं है । AB रेखा $3x-4y=0$ का और CD रेखा $3x+4y=0$ का लेखाचित्र है । दोनों रेखायें ही $9x^2-16y^2=0$ का लेखाचित्र हैं ।

उदाहरण 2. $52x^2+187y^2+265xy-1456x-3179y+9724=0$ समीकरण का लेखाचित्र अङ्कित करो ।

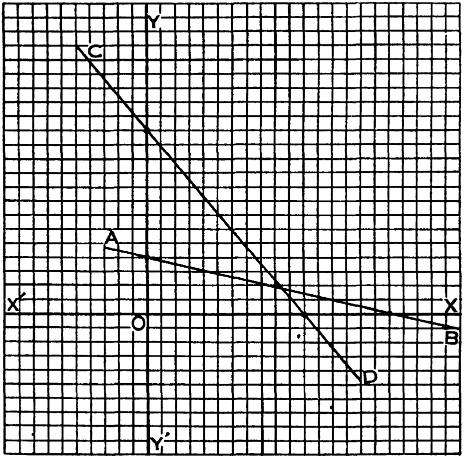
दिये हुए समीकरण के बाएँ पक्ष का गुणनखण्ड करने से,

$$(4x+17y-68)(13x+11y-143)=0.$$

इसलिए लेखाचित्र निम्नलिखित दोनों समीकरणों द्वारा सूचित दो सरल रेखायें होंगी :

$$\left.\begin{array}{r} 4x+17y-68=0 \\ 13x+11y-143=0 \end{array}\right\},$$
और,

अर्थात् $\frac{x}{17}+\frac{y}{4}=1$ और $\frac{x}{11}+\frac{y}{13}=1$.



ऊपर के चित्र में दोनों रेखाएँ क्रमशः AB और CD के द्वारा सूचित होती हैं।

टीका—दो घात के साधारण समीकरण अर्थात् $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ समीकरण के बाएँ पक्ष को दो एक घात गुणनखंड में विश्लेषण करना सम्भव होने पर ही समीकरण के द्वारा दो सरल रेखाएँ सूचित होंगी, अन्यथा नहीं। इस प्रकार गुणनखंड में विश्लेषण

करना सम्भव होने पर a, b, c आदि अचल राशियों द्वारा निम्नलिखित शर्त सिद्ध होती है :

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

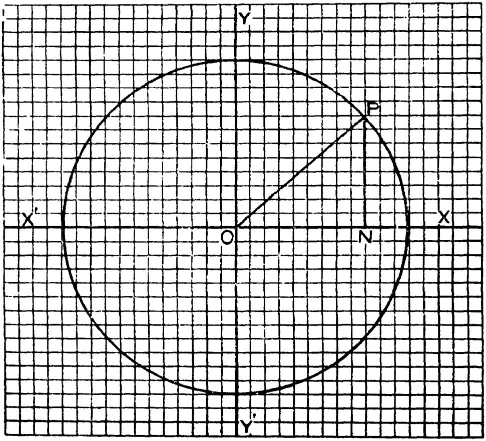
अतएव किसी वर्ग (दो घात) समीकरण की अचल राशियों के द्वारा यह शर्त सिद्ध होने पर समीकरण का लेखाचित्र दो सरल रेखाएँ होंगी, अन्यथा न होंगी ।

360. वृत्त (Circle).

x और y इन दो अव्यक्त राशियों से युक्त वर्ग समीकरण में x^2 और y^2 का गुणक एक ही होने पर और उसमें xy वाला कोई पद न होने पर समीकरण के द्वारा एक वृत्त सूचित होता है ।

उदाहरण 1. $x^2+y^2=36$ का लेखाचित्र अङ्कित करो ।

मूलविन्दु O को केन्द्र मानकर के और $\sqrt{36}=6$ इकाई का अर्द्ध-



व्यास लेकर एक वृत्त खींचो । इस वृत्त के ऊपर अवस्थित किसी विन्दु P के भुज-कोटि के द्वारा समीकरण सिद्ध होगा । कारण, P विन्दु का भुज-कोटि (ON, NP) और $ON^2+NP^2=OP^2=36$. किन्तु परिधि के बाहर स्थित किसी भी विन्दु के भुज-कोटि से समीकरण सिद्ध नहीं होगा ।

अतएव ऊपर के चित्र का वृत्त ही दिये हुए समीकरण का लेखाचित्र है और यही उसका एकमात्र लेखाचित्र है ।

चित्र में छोटे वर्ग की दो बाहुओं के समान लम्बाई को इकाई माना गया है; अर्थात् इकाई = ·2 इंच ।

उदाहरण 2. $x^2+y^2-14x-10y+58=0$ का लेखाचित्र खींचो ।

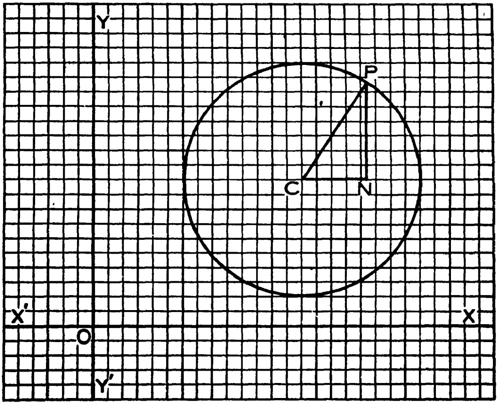
समीकरण में x^2 और y^2 का गुणक एक ही है और xy का कोई पद नहीं है । अतएव इस समीकरण के द्वारा एक वृत्त सूचित होगा ।

दिया हुआ समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है :

$$(x^2-14x+49)+(y^2-10y+25)=16,$$

अर्थात् $(x+7)^2+(y-5)^2=16$.

C(7, 5) विन्दु अङ्कित करो । C को केन्द्र मान कर और 4 इकाई के



बराबर अर्द्ध-व्यास लेकर एक वृत्त खींचो। इस वृत्त की परिधि के ऊपर $P(x, y)$ कोई भी एक विन्दु होने पर,

$$CP^2 = CN^2 + NP^2 = (x-7)^2 + (y-5)^2;$$

अर्थात् $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 16.$

अतएव वृत्त के ऊपर स्थित किसी भी विन्दु के भुज-कोटि के द्वारा दिया हुआ समीकरण सिद्ध होता है; किन्तु वृत्त के बाहर के किसी भी विन्दु के भुज-कोटि के द्वारा समीकरण सिद्ध नहीं होगा। इसलिए अङ्कित वृत्त ही दिये हुए समीकरण का लेखाचित्र है और यही समीकरण का एकमात्र लेखाचित्र है। इस स्थल में भी छोटे वर्ग की दो बाहुओं को अर्थात् ·2 इंच को इकाई माना गया है।

टीका 1— $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ आकार के समीकरण के द्वारा (a, b) वृत्त में केन्द्र-युक्त और अर्द्ध-व्यासयुक्त एक वृत्त सूचित होता है।

टीका 2—दिये हुए समीकरण का लेखाचित्र एक वृत्त इस प्रकार प्राप्त होने पर भी जिसके द्वारा समीकरण सिद्ध होता है उस प्रकार के x और y के कुछ मान निकाल कर उनके अनुसार विन्दुओं को अङ्कित करके और एक अनवच्छिन्न (Continued) रेखा द्वारा उन्हें मिलाकर उक्त वृत्त अङ्कित करना वास्तविक लेखिक प्रणाली है। एक घात या बहुघात किसी भी फल या समीकरण का लेखाचित्र इसी प्रणाली से खींचना आवश्यक है।

प्रश्नावली 133.

निम्नलिखित समीकरणों का लेखाचित्र खींचो :—

1. $x^2 = 9.$ 2. $y^2 = 14.$ 3. $x^2 - y^2 = 0.$

4. $x^2 - 25 = 0.$ 5. $9x^2 - y^2 = 0.$ 6. $16x^2 - 25y^2 = 0.$

7. $49x^2 - 81y^2 = 0.$

8. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ [समीकरण के द्वारा दो सन्निपतित (Coincident) सरल रेखायें सूचित होती हैं।]

9. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0.$ 10. $3x^2 + 7xy - 20y^2 = 0.$

11. $x^2 - y^2 + x - y = 0.$ 12. $3x^2 - 4xy - 4y^2 + x - 2y = 0.$

13. $2x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 3y + 1 = 0.$

14. $7x^2 + 16xy + 9y^2 - 75x - 95y + 50 = 0.$

15. $x^3-3x^2-x+3=0$ [समीकरण के द्वारा तीन सरल रेखायें सूचित होती हैं।]

16. $x^2+y^2=9.$ 17. $x^2+y^2=16.$

18. $4x^2+4y^2=49.$ 19. $3x^2+3y^2=16.$

20. $x^2+y^2=\cdot 36.$ 21. $x^2+y^2=\frac{9}{121}.$

22. $(x-1)^2+(y-2)^2=9.$ 23. $(x-2)^2+(y-3)^2=49.$

24. $(x+3)^2+(y-5)^2=16.$ 25. $(x+\cdot 2)^2+(y-\cdot 3)^2=\cdot 25.$

26. $x^2+y^2-8x+6y-11=0.$

27. $x^2+y^2-2x-2y-\frac{7}{9}=0.$

28. $4x^2+4y^2-4x-4y+1=0.$

29. $x^2+y^2-\cdot 6x-\cdot 2y-\cdot 06=0.$

30. $x^3-y^3-xy(x-y)-9(x-y)=0$ [निर्णय लेखाचित्र एक वृत्त और एक सरल रेखा होगी।]

361. दीर्घ वृत्त (Ellipse).

a, b, c इन तीन राशियों के धनात्मक होने पर, $ax^2+by^2=c$ आकार के समीकरण के द्वारा एक 'दीर्घ वृत्त' सूचित होता है। नीचे के उदाहरण से इस रेखा के वक्र (Curve) आकार के सम्बन्ध में धारणा होगी।

उदाहरण। $16x^2+25y^2=400$ का लेखाचित्र खींचो।

x और y के जिन सारे मानों से दिया हुआ समीकरण सिद्ध होता है उनकी एक सूची बनाने के लिए यह समीकरण निम्नलिखित आकार में लिखा हुआ होने पर;

$$y=\pm\tfrac{1}{5}\sqrt{400-16x^2}=\pm\tfrac{4}{5}\sqrt{25-x^2}.$$

स्पष्ट ही ज्ञात होता है कि x के प्रत्येक मान के लिए y के दो मान होंगे; ये दोनों परस्पर समान किन्तु विपरीत चिह्न से युक्त होंगे। इस प्रकार x को y के द्वारा प्रकट करके दिखाया जा सकता है कि y के प्रत्येक मान के लिए x के भी परस्पर समान किन्तु विपरीत चिह्न से युक्त दो मान होंगे। अतएव यह रेखा x-अक्ष और y-अक्ष दोनों ही में सममित (Symmetrical) है।

$x > 5$, अथवा < -5 होने पर y का मान कल्पित (imaginary) होता है । अतएव रेखा $x = \pm 5$ इन दो सरल रेखाओं के बीच में अवस्थित है । इसी प्रकार यह दिखलाया जा सकता है कि रेखा $y = \pm 4$ दो सरल रेखाओं के मध्य में अवस्थिति है । अतएव निर्णेय रेखा एक पिहित वक्र (closed) रेखा है; यह $x = \pm 5$, $y = \pm 4$ इन चार सरल रेखाओं से बने हुए आयत के मध्य में सीमाबद्ध है ।

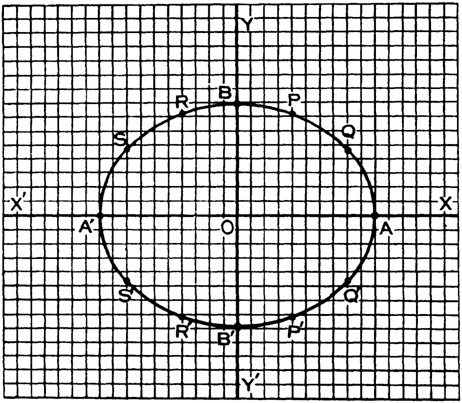
निम्नलिखित विन्दुओं के भुज-कोटि से समीकरण सिद्ध होता है:—

$$A\begin{cases} x=5, \\ y=0; \end{cases} \quad A'\begin{cases} x=-5, \\ y=0; \end{cases} \quad B\begin{cases} x=0, \\ y=4; \end{cases} \quad B'\begin{cases} x=0, \\ y=-4; \end{cases}$$

$$P\begin{cases} x=2, \\ y=3\cdot66; \end{cases} \quad P'\begin{cases} x=2, \\ y=-3\cdot66; \end{cases} \quad R\begin{cases} x=-2, \\ y=3\cdot66; \end{cases} \quad R'\begin{cases} x=-2, \\ y=-3\cdot66; \end{cases}$$

$$Q\begin{cases} x=4, \\ y=2\cdot4; \end{cases} \quad Q'\begin{cases} x=4, \\ y=-2\cdot4, \end{cases} \quad S\begin{cases} x=-4, \\ y=2\cdot4; \end{cases} \quad S'\begin{cases} x=-4, \\ y=-2\cdot4. \end{cases}$$

इन विन्दुओं को अङ्कित करके एक अविच्छिन्न (Continuous) रेखा द्वारा मिलाने से निर्णेय लेखाचित्र प्राप्त होगा । चित्र में $\cdot 2$ इंच को इकाई माना गया है ।



टीका 1—रेखा का समीकरण $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, अथवा $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. इस तरह लिखा जाता है । दोनों अक्षों के ऊपर अन्तःखण्ड (Intercept) AA' और BB' क्रम से दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष (Major axis) और लघुअक्ष (Minor axis) कहे जाते हैं। यहाँ दो अक्षार्ध (Semi-axis) की लम्बाई 5 और 4 हैं । दीर्घाक्ष और लघुअक्षों को एक दूसरे के काटने से बनने वाले बिन्दु को दीर्घवृत्त का केन्द्र कहते हैं। इस प्रकार, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ समीकरण के द्वारा मूलबिन्दु में केन्द्र-विशिष्ट और (a, b) अक्षार्ध-युक्त एक दीर्घवृत्त सूचित होता है ।

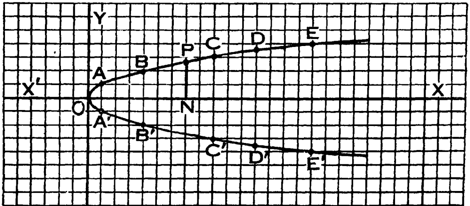
टीका 2—यदि दो घात का साधारण समीकरण $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ के a, b, और h ये तीन गुणक इस प्रकार के हों कि $h^2<ab$, तो समीकरण के द्वारा एक दीर्घवृत्त सूचित होता है; कारण, $2x^2+3y^2+2xy+3x-5y-8=0$ समीकरण द्वारा एक दीर्घवृत्त सूचित होता है क्योंकि यहाँ $a=2$, $b=3$ और $h=1$; अतएव $h^2<ab$.

362. परवलय (Parabola) :

वर्ग समीकरण में दो घात की (of the Second degree) राशियों के पूर्ण वर्ग होने पर समीकरण के द्वारा एक परवलय सूचित होता है ।

उदाहरण । $y^2=x$ का लेखाचित्र खींचो ।

x के प्रत्येक मान के लिये y के दो मान रहेंगे जो परस्पर समान रहेंगे



किन्तु विपरीत चिह्नों से युक्त होंगे। अतएव रेखा x-अक्ष में सममित (Symmetrical) है।

रेखा के ऊपर वर्तमान निम्नलिखित विन्दु अङ्कित करके एक अविच्छिन्न (Continuous) रेखा से मिलाने पर निर्णय लेखाचित्र प्राप्त होता है।

O (0, 0), A (1, 1), A′ (1, −1), B (4, 2), B′ (4, −2), C (9, 3), C′ (9, −3), D (12, 3·5), D′ (12, −3·5), E (16, 4), E′ (16, −4).

चित्र में छोटे वर्ग की एक बाहु को इकाई माना गया है। x-अक्ष अर्थात् प्रति साम्य अक्ष परवलय का अक्ष है।

स्पष्ट ही दिखाई पड़ रहा है कि x का मान ऋणात्मक होने पर y का मान कल्पित होता है। अतएव वक्र रेखा (Curve) का कोई अंश y-अक्ष के बाईं ओर नहीं रहता किन्तु पाज़िटिव दिशा में x का मान जितना भी बड़ा क्यों न हो y का तदनुरूप वास्तव मान पाया जाता है; अतएव y-अक्ष को दक्षिण दिशा में रेखा अनन्त अर्थात् असीम पर्य्यन्त विस्तृत होगी। (सरल रेखा भी एक अनन्त रेखा है)।

लेखाचित्र की सहायता से वर्गमूल निकालना।

ऊपर दिये हुए लेखाचित्र से किसी भी राशि का वर्गमूल निकाला जा सकता है।

मानलो कि 7 का वर्गमूल निकालना है। मूल विन्दु O से x-अक्ष पर ON = 7 इकाई नापलो और N विन्दु से ऊपर की ओर एक कोटि अङ्कित करो। मानलो कि यह कोटि $y^2 = x$ के लेखाचित्र को P विन्दु पर काटती है। P विन्दु का $y^2 = x$ के लेखाचित्र के ऊपर अवस्थित होने के कारण $NP^2 = ON = 7$.

$\therefore$ $NP = \sqrt{7}$. NP की लम्बाई नापने पर ज्ञात होता है कि $\sqrt{7}$ = प्रायः 2·6.

टीका—दो घात का साधारण समीकरण $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ के द्वितीय घात के पदों के द्वारा एक पूर्ण वर्ग बनाने पर अर्थात् $ax^2 + by^2 + 2hxy$ के एक पूर्ण वर्ग होने पर समीकरण के द्वारा एक परवलय सूचित होता है। $h^2 = ab$ शर्त सिद्ध होने पर अन्त में कही गई राशि एक पूर्ण वर्ग है। अतएव a, b, h इन तीन गुणकों के द्वारा $h^2 = ab$ शर्त सिद्ध होने पर साधारण समीकरण के द्वारा एक परवलय सूचित होता है। जैसे, $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x + 5y + 7 = 0$ का लेखाचित्र एक परवलय है क्योंकि यहाँ $a = 1$, $b = 4$, $h = 2$; अतएव $h^2 = ab$.

363. अतिपरवलय (Hyperbola).

a, b दो धनात्मक राशियाँ होने पर, $ax^2-by^2=1$ के आकार के समीकरण द्वारा अतिपरवलय सूचित होता है ।

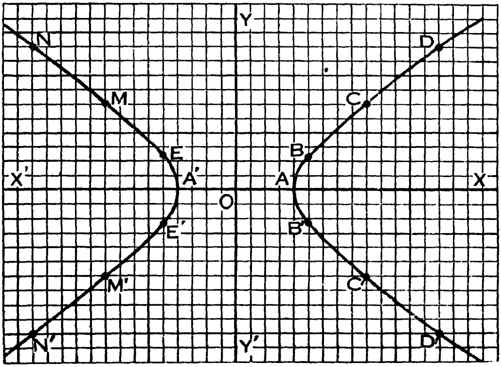
उदाहरण । $9x^2-16y^2=144$ का लेखाचित्र खींचो ।

अनु० 361 की तरह यहाँ भी दिखाया जा सकता है कि दोनों रेखाएँ अक्ष में ही प्रतिसम हैं और यह भी दिखाया जा सकता है कि रेखा का कोई अंश $x=\pm 4$ दो सरल रेखाओं के मध्य में न होगा; अर्थात् यह रेखा $x=+4$ रेखा के दाहिनी ओर और $x=-4$ रेखा के बाईं ओर रहेगी । अतएव ये दोनों लेखाचित्र दो रेखाओं के योग हैं । इन दोनों रेखाओं में से हर एक को अतिपरवलय की शाखा (Branch) कहा जाता है ।

$$\text{यहाँ } y=\pm\tfrac{3}{4}\sqrt{x^2-16}.$$

रेखा के ऊपर स्थित निम्नलिखित विन्दुओं को अङ्कित करके अविच्छिन्न रेखा के द्वारा मिला देने पर निर्णेय लेखाचित्र प्राप्त हो जायगा ।

A(4, 0), A′(−4, 0), B(5, 2·25), B′(5, −2·25), C(9, 6·05),



C′(9, −6·04), D(14, 10·06), D′(14, −10·06), E(−5, 2·25), E′(−5, −2·25), M(−9, 6·04), M′(−9, −6·04), N(−14, 10·06), N′ (−14, −10·06).

A, A′ विन्दुओं को अतिपरवलय का शीर्ष और AA′ सरल रेखा को दीर्घाक्ष (Major axis) कहते हैं । यहाँ लघु अक्ष (Minor axis) कल्पित (Imaginary) है । O विन्दु को अतिपरवलय का केन्द्र और $9x^2-16y^2=0$ द्वारा सूचित दो रेखाओं को उसका स्पर्शोन्मुख रेखा (Asymptote) कहते हैं ।

टीका 1—समीकरण को $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ आकार में भी लिखा जाता है। दीर्घाक्ष की लम्बाई $=2\sqrt{16}=8$. साधारणतः $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ द्वारा एक अतिपरवलय सूचित होता है । मूलविन्दु इसका केन्द्र है और इसके वास्तव दीर्घाक्ष को लम्बाई $2a$ है । इसका असीमपथ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ है। $a=b$ होने पर इस अतिपरवलय को सम अतिपरवलय (Rectangular hyperbola) कहा जायगा ।

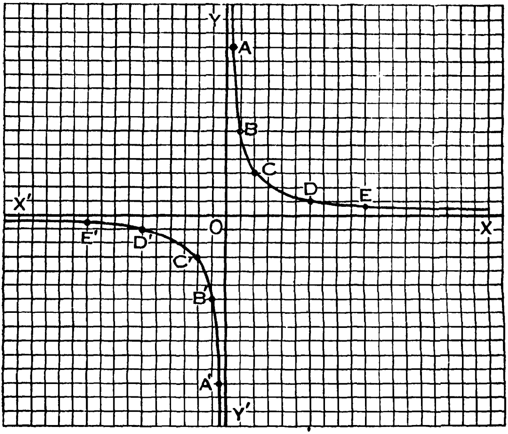
टीका 2—$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$. इस दो घात के समीकरण के a, b, h इन तीनों गुणकों के द्वारा $h^2>ab$ शर्त सिद्ध होने पर समीकरण के द्वारा एक अतिपरवलय सूचित होता है। जैसे, $3x^2-8xy+4y^2-7x+5y+2=0$ का लेखाचित्र एक अतिपरवलय है; क्योंकि यहाँ $a=3$, $b=4$ और $h=-4$; अतएव $h^2>ab$.

364. $xy=6$ समीकरण का लेखाचित्र :

इस समीकरण के द्वारा एक सम अतिपरवलय (Rectangular hyperbola) सूचित होता है; किन्तु यह किसी भी अक्ष में प्रतिसम नहीं है।

निम्नलिखित विन्दुओं को अङ्कित करके एक अविच्छिन्न रेखा द्वारा मिलाने से निर्णेय लेखाचित्र पाया जायगा ।

A ('5, 12), B(1, 6), C (2, 3), D (6, 1), E(10, '6), A' (−'5, −12), B' (−1, −6), C' (−2, −3), D' (−6, −1), E'(−10, −'6).



टीका— x का मान 0 होने पर y का मान अनन्त होता है और विपरीत मान से y का मान 0 होने से x का मान अनन्त होता है। अतएव यह रेखा यदि दो अक्षों की ओर अग्रसर भी होती रहे तो उन्हें कभी न तो स्पर्श करेगी और न काटेगी। OX और OY ये दोनों रेखायें अतिपरवलय की स्पर्शोन्मुख रेखायें हैं।

365. द्विघात व्यंजक का लेखाचित्र।

ax^2+bx+c इस द्विघात व्यंजक का लेखाचित्र और $y=ax^2+bx+c$ इस समीकरण का लेखाचित्र एक ही हैं। इस समीकरण में केवल ax^2 एक द्वितीय घात का पद है और यह एक पूर्ण वर्ग है; इसलिए लेखाचित्र एक परवलय (Parabola) होगा। किसी निर्दिष्ट क्षेत्र में रेखा के ऊपर स्थित

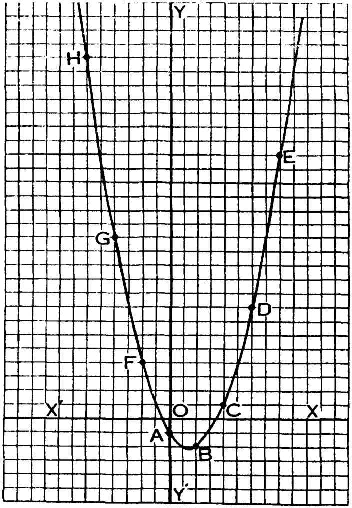
कुछ विन्दुओं को अङ्कित करके उन्हें एक अविच्छिन्न रेखा के द्वारा मिलाने पर ही निर्णय लेखाचित्र पाया जायगा ।

उदाहरण । $2x^2 - 3x - 1$ का लेखाचित्र खींचो ।

मान लो कि $y = 2x^2 - 3x - 1$.

निम्नलिखित विन्दुओं को अङ्कित करके एक अविच्छिन्न रेखा द्वारा मिलाने पर निर्णय लेखाचित्र पाया जायगा ।

A(0, −1), B(1, −2), C(2, 1), D(3, 8), E(4, 19), F(−1, 4) G(−2, 13), H(−3, 26).



चित्र में OX के ऊपर ·2 इंच को और OY के ऊपर ·1 इंच को इकाई माना गया है ।

366. द्विघात व्यंजक का अधिकतम (Maximum) और अल्पतम (Minimum) मान ।

ax^2+bx+c व्यंजक का लेखाचित्र अर्थात् $y=ax^2+bx+c$ समीकरण का लेखाचित्र अङ्कित करने पर ज्ञात होगा कि अनेक स्थलों में y का मान किसी एक निर्दिष्ट राशि की अपेक्षा छोटा नहीं हो सकता । अन्त में कही गई राशि को y का अर्थात् द्विघात व्यंजक का अल्पतम (Minimum) मान कहते हैं ।

फिर अनेक क्षेत्रों में देखने में आता है कि y का मान किसी एक निर्दिष्ट राशि की अपेक्षा बड़ा नहीं हो सकता । इस राशि को y का अधिकतम या चरम (Maximum) मान कहते हैं ।

उदाहरण । लेखाचित्र की सहायता से $2x^2-3x-1$ का अल्पतम (Minimum) मान निकालो ।

$y=2x^2-3x-1$ के लेखाचित्र से ज्ञात होता है कि y का अवम मान प्रायः $-2\frac{1}{4}$ है (वास्तविक अवम मान $-2\frac{1}{8}$ है ।)

टीका—बीजगणित की सहायता से निम्नलिखित उपाय से अल्पतम मान निकाला जाता है :—

मान लो कि $y=2x^2-3x-1$; $\therefore\ 2x^2-3x-(1+y)=0$.

दूसरे समीकरण को हल करने से,

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+8(1+y)}}{4}=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{8y+17}.$$

यहाँ x वास्तव (Real) होने पर, मूल चिह्न के भीतर वर्तमान राशि का धनात्मक होना आवश्यक होगा; अर्थात् $8y$ को -17 की अपेक्षा, इसलिए y को $-\frac{17}{8}$ की अपेक्षा बृहत्तर होना पड़ेगा । अतएव y का मान $-\frac{17}{8}$, अर्थात् $-2\frac{1}{8}$ की अपेक्षा क्षुद्रतर नहीं है । अतः y अर्थात् व्यंजक का अल्पतम मान $-2\frac{1}{8}$ है ।

प्रश्नावली 134.

निम्नलिखित समीकरणों का लेखाचित्र खींचोः—

1. $x^2+2y^2=1$.
2. $2x^2+3y^2=1$.
3. $9x^2+4y^2=36$.
4. $25x^2+9y^2=225$.

5. $4x^2+9y^2=36.$ 6. $3x^2+5y^2=1.$

7. $x^2-y^2=1.$ 8. $2x^2-3y^2=1.$

9. $9x^2-4y^2=36.$ 10. $3x^2-7y^2=1.$

11. $25x^2-16y^2=400.$ 12. $x^2-49y^2=59.$

13. $y^2=4x.$ 14. $y^2=3x.$ 15. $3y^2=5x.$

16. $4x^2=y.$ 17. $x^2=8y.$ 18. $3x^2=7y.$

निम्नलिखित व्यंजकों के लेखाचित्र खींचो :—

19. $x^2-2x-1.$ 20. $2x^2-x+1.$ 21. $3x^2+x-5.$

22. $3x^2+4x-1.$ 23. $x^2-4x+5.$

24. $x^2+x+2.$ 25. $x^2+3x+1.$

लेखाचित्र की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल निकालो :—

26. 8. 27. 11. 28. 13. 29. 17.

30. सिद्ध करो कि, $1+2x-3x^2$ व्यंजक का चरम मान $\frac{4}{3}$ है।

31. सिद्ध करो कि, $5x^2-7x+1$ व्यंजक का अवम मान $-\frac{9}{2}$ है।

32. सिद्ध करो कि, $7x^2-9x+20$ व्यंजक का अवम मान 17 है।

33. सिद्ध करो कि, $3+x-5x^2$ का चरम मान 3 है।

34. सिद्ध करो कि, $10-6x-3x^2$ का मान 13 से अधिक नहीं हो सकता।

35. सिद्ध करो कि, $x^2-2x+23$ व्यंजक का मान 22 से कम नहीं हो सकता।

367. लेखाचित्र की सहायता से वर्ग समीकरण को हल करना।

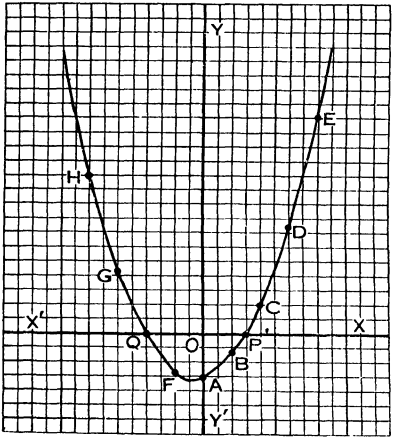
लेखाचित्र की सहायता से वर्ग समीकरण के हल करने की कई प्रक्रियाएँ हैं। नीचे दो साधारण प्रक्रियाएँ दी गई हैं।

(A) प्रथम प्रक्रिया। $ax^2+bx+c=0$ समीकरण को हल करना है। मान लो कि $y=ax^2+bx+c$ और इस समीकरण का लेखाचित्र खींचो। यह लेखाचित्र x-अक्ष को जिन सारे विन्दुओं पर काटता है उन सब में $y=0$ है अर्थात् $ax^2+bx+c=0$ है। इसलिये जिन जिन विन्दुओं पर यह लेखाचित्र x-अक्ष को काटता है उनके भुज-कोटि दिये हुए समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण। लेखाचित्र द्वारा $2x^2+x-6=0$ समीकरण को हल करो।

निम्नलिखित विन्दुओं को अङ्कित करके $y=2x^2+x-6$ समीकरण का लेखाचित्र अङ्कित करो:—

A$(0, -6)$, B$(1, -3)$, C$(2, 4)$, D$(3, 15)$, E$(4, 30)$, F$(-1, -5)$, G$(-3, 9)$, H$(-4, 22)$.



चित्र में x-अक्ष पर ·2 इंच को और y-अक्ष पर ·05 इंच को इकाई माना गया है।

लेखाचित्र ने जिन P और Q दो विन्दुओं पर x-अक्ष को काटा है उन्हीं स्थलों में $y=0$ है, अर्थात् $2x^2+x-6=0$. किन्तु P और Q इन दोनों विन्दुओं के भुज क्रमशः $1\cdot5$ और -2 हैं; अतएव ये ही दिये हुए समीकरण के दो निर्णेय मूल हैं।

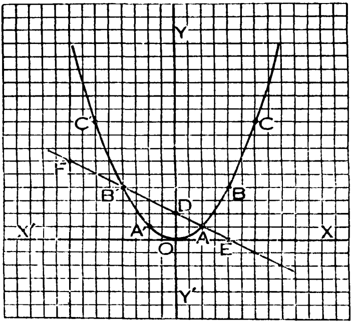
(B) द्वितीय प्रक्रिया ।

$ax^2+bx+c=0$ समीकरण को हल करने के लिये मान लो कि $y=x^2$; उस अवस्था में $ay+bx+c=0$. अतएव x के जिन सब मानों के द्वारा $ax^2+bx+c=0$ समीकरण सिद्ध होता है उनके द्वारा $y=x^2$ और $ay+bx+c=0$ ये दोनों समीकरण भी सिद्ध होते हैं। अतएव $y=x^2$ और $ay+bx+c=0$ इन दोनों समीकरणों के छेदनविन्दु का भुज $ax^2+bx+c=0$ समीकरण का मूल है। $y=x^2$ का लेखाचित्र एक परवलय है और $ay+bx+c=0$ का लेखाचित्र एक सरल रेखा है।

अतएव ज्ञात होता है कि किसी भी वर्ग समीकरण का मूल $y=x^2$ परवलय और एक सरल रेखा अङ्कित करके निर्णय किया जाता है। इनके छेदनविन्दुओं का भुज ही निर्णय मूल है।

उदाहरण। लेखाचित्र द्वारा $x^2+x-2=0$ समीकरण को हल करो। मान लो कि $y=x^2$, तो उस अवस्था में $y+x-2=0$.

O(0, 0), A(1,1), A′(−1, 1), B(2, 4), B′(−2, 4), C(3, 9), C′(−3, 9) विन्दुओं को अङ्कित करके $y=x^2$ का लेखाचित्र और



D(0, 2), E(2, 0), F(−4, 6) विन्दुएँ अङ्कित करके $y+x-2=0$ का लेखाचित्र खींचो।

चित्र में x-अक्ष पर ·2 इंच को और y-अक्ष पर ·1 इंच को इकाई माना गया है।

इन दोनों के छेदनविन्दु A और B′ के भुज-कोटि के द्वारा दोनों ही समीकरण सिद्ध होते हैं; अतएव $x^2+x-2=0$ समीकरण भी सिद्ध होता है। अतः A और B′ दोनों ही के भुज $x^2+x-2=0$ समीकरण के मूल हैं जो 1 और −2 हैं।

टीका 1—तृतीय प्रक्रिया। निम्नलिखित लैखिक उपाय से भी $ax^2+bx+c=0$ समीकरण को हल किया जाता है:—

$a(x^2+y^2)+bx+c=0$ समीकरण का लेखाचित्र खींचो। यह $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ विन्दु पर केन्द्र और $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ अर्द्ध-व्यास से बना हुआ एक वृत्त होगा। यह वृत्त जिन दो विन्दुओं पर x-अक्ष को काटेगा, उन्हीं दो विन्दुओं पर $y=0$ होगा। इसलिए $ax^2+bx+c=0$. अतएव काटने वाले दोनों विन्दुओं का भुज ही निर्णेय मूल है।

टीका 2—चतुर्थ प्रक्रिया। निम्नलिखित उपाय से भी $ax^2+bx+c=0$ समीकरण को हल किया जाता है:—

(1) $ax+y+b=0$ और (2) $xy=c$ इन दोनों समीकरणों का लेखाचित्र अङ्कित करो। पहला एक सरल रेखा और दूसरा एक अतिपरवलय होगा। इनके छेदन विन्दु पर $ax^2+bx+c=0$. अतएव इनके दोनों छेदन विन्दुओं के भुज ही निर्णेय मूल हैं।

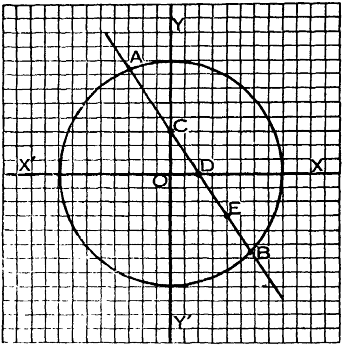
368. लेखाचित्र द्वारा वर्ग समीकरण को हल करना।

इस रीति से समीकरण को हल करने के लिये दोनों समीकरणों का लेखाचित्र अङ्कित करके दोनों चित्रों के छेदनविन्दु का भुज-कोटि निकालना होता है।

उदाहरण। लेखाचित्र-द्वारा हल करो—

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=64 \\ 3x+2y&=6 \end{aligned}\right\}.$$

पहले समीकरण का लेखाचित्र एक वृत्त होगा जिसका केन्द्र मूलविन्दु और अर्द्ध-व्यास 8 इकाई है । C(0, 3), D(2, 0), E(4, −3) विन्दुओं



को अङ्कित करके दूसरे समीकरण का लेखाचित्र खींचो । यह एक सरल रेखा होगी । दोनों लेखाचित्र एक दूसरे को A और B विन्दुओं पर काटते हैं । A विन्दु का भुज-कोटि प्रायः $(-2\cdot9, 7\cdot5)$ और B विन्दु का भुज-कोटि प्रायः $(5\cdot7, -5\cdot5)$ है । अतएव निर्णेय मूल :

अथवा, $\left.\begin{array}{l} x=-2\cdot9,\ y=7\cdot5 \\ x=5\cdot7,\ \ y=-5\cdot5 \end{array}\right\}$ (मोटे तौर से)

प्रश्नावली 135.

अनु० 367 की प्रथम प्रक्रिया के अनुसार निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

1. $x^2+x-1=0.$ 2. $x^2-4x-1=0.$

3. $x^2-4x-5=0.$ 4. $x^2-3x-7=0.$

5. $x^2-2x-3=0.$ 6. $x^2-7x+4=0.$

अनु० 367 की द्वितीय प्रक्रिया के अनुसार निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

7. $x^2+2x-1=0.$ 8. $3x^2-2x-1=0.$

9. $4x^2-2x-3=0.$ 10. $5x^2+x-1=0.$

11. $6x^2+2x-1=0.$ 12. $x^2+7x-1=0.$

लेखाचित्र द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :—

13. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=25\\ x+y=7\end{array}\right\}.$ 14. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=36\\ 3x-2y=1\end{array}\right\}.$

15. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=169\\ 2x-y=19\end{array}\right\}.$ 16. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=16\\ x-y=1\end{array}\right\}.$

17. $\left.\begin{array}{r}3x^2+4y^2=16\\ x+y=3\end{array}\right\}.$ 18. $\left.\begin{array}{r}xy=6\\ x-y=1\end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{r}x^2+9y^2=10\\ 3x+2y=5\end{array}\right\}.$ 20. $\left.\begin{array}{r}x^2+4y^2=5\\ xb=1\end{array}\right\}.$

——:o:——

इकत्तीसवाँ अध्याय

श्रेणी (Progression)

369. श्रेणी (Series).

यदि कुछ राशियाँ इस प्रकार सजाई जायँ कि उनमें से किसी एक को पूर्ववर्ती एक या एक से अधिक राशि से किसी निर्दिष्ट नियम के अनुसार पाया जाय, तो राशियों के इस प्रकार के समावेश को श्रेणी कहते हैं। प्रत्येक राशि को श्रेणी का पद और जिस नियम के अनुसार पदों का क्रम निर्धारित होता है उसे **गठन नियम** (Law of Formation) या **आवृत्ति नियम** (Law of Recurrence) कहते हैं। जब किसी व्यंजक के पद-समूह श्रेणी-गठन करते हैं, तो इस व्यंजक को भी एक श्रेणी कहा जाता है।

उदाहरण 1. 2, 4, 6, 8, 10,.........राशियाँ एक श्रेणी बनाती हैं। कारण इसका कोई भी पद उसके पूर्ववर्ती पद में 2 जोड़ने से पाया

जाता है। यदि n वाँ पद t_n और $(n-1)$ वाँ पद t_{n-1} हो, तो $t_n = t_{n-1} + 2$ समीकरण के द्वारा इस श्रेणी का गठन नियम प्रकाशित होगा।

उदाहरण 2. 3, 6, 12, 24,.........राशियाँ एक श्रेणी बनाती हैं। कारण इसका कोई भी पद संलग्न पूर्ववर्ती पद को 2 से गुणा करने से पाया जाता है। यहाँ $t_n = 2t_{n-1}$ समीकरण द्वारा गठन नियम सूचित होता है।

उदाहरण 3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$,.........राशियाँ एक श्रेणी बनाती हैं। कारण इसका कोई भी पद संलग्न पूर्ववर्ती पद के हर में 4 जोड़ने पर पाया जाता है। यहाँ $t_n = t_{n-1} + 4$ हरों का गठन नियम है।

टीका—किसी श्रेणी का गठन नियम ज्ञात रहने पर उस श्रेणी की किसी भी संख्या का पद निकाल लिया जा सकता है। जैसे, श्रेणी में वर्तमान प्रथम दो पद यदि 1 और 3 हों और $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$, समीकरण द्वारा 'गठन नियम' सूचित हो, अर्थात् यदि इस श्रेणी का कोई भी पद संलग्न पूर्ववर्ती दो पदों के योग के समान हो, तो श्रेणी 1, 3, 4, 7, 11, 18,.........होगी; कारण $4 = 3 + 1$, $7 = 4 + 3$, $11 = 7 + 4$ इत्यादि।

समान्तर श्रेणी (Arithmetical Progressions).

370. समान्तर श्रेणी।

यदि किसी श्रेणी का कोई भी पद क्रमागत पूर्ववर्ती पद में कोई अचल राशि (Constant) जोड़ने से प्राप्त हो, तो उसे **समान्तर श्रेणी** कहते हैं। $t_n = t_{n-1} + k$, इस समीकरण द्वारा इस जाति की श्रेणी का गठन नियम सूचित होता है। यहाँ k एक अचल राशि है। अचल राशि को **सार्व अन्तर** (Common difference) कहते हैं, क्योंकि यह किसी भी दो क्रमागत पदों का अन्तर है। किसी भी पद को उसके क्रमागत परवर्ती पद में से घटाने से सार्व अन्तर पाया जाता है।

निम्नलिखित (1) और (2) पंक्तियों की संख्याएँ समान्तर श्रेणी के अन्तर्गत हैं।

(1) 3, 8, 13, 18, 23,.........[सार्व अन्तर $8 - 3 = 5$.]

(2) 14, 8, 2, -4, -10, ...[सार्व अन्तर $8 - 14 = -6$.]

371. पद साधारण (General Term.)

किसी श्रेणी के n वें पद को उसका साधारण पद कहा जाता है; यहाँ n एक पूर्ण संख्या है। यह साधारण पद t_n द्वारा सूचित होता है।

$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots\ldots\ldots$ श्रेणी को समान्तर श्रेणी का साधारण आकार माना जा सकता है। इस स्थल में a प्रथम पद और b सार्व अन्तर है।

उक्त श्रेणी का

द्वितीय पद $= a+b = a+(2-1)b,$

तृतीय पद $= a+2b = a+(3-1)b,$

चतुर्थ पद $= a+3b = a+(4-1)b$ इत्यादि।

इसलिए nवाँ पद $= a+(n-1)b,$

अर्थात् $\mathbf{t_n = (a+n-1)b.}$

अन्तिम पद (The last term) यदि श्रेणी में n संख्यक पद हों, तो nवाँ पद उस श्रेणी में अन्तिम पद होगा। इसलिये l द्वारा अन्तिम पद सूचित होता है,

$$\mathbf{l = a+(n-1)b.}$$

उदाहरण 1. 7, 12, 17, 22, 27,...... श्रेणी का 50वाँ पद बताओ।

यहाँ प्रथम पद $=7$; सार्व अन्तर $=12-7=5$. अतएव $a=7, b=5$ और $n=50$.

इसलिए 50वाँ पद $=7+(50-1)5,$
$=7+245=252.$

उदाहरण 2. $6, 2, -2, -6, \ldots\ldots\ldots$ श्रेणी में 30वाँ पद है। उसका अन्तिम पद बओ।

यहाँ $a=6, b=-4, n=30;$

$\therefore \quad l=6+(30-1)\times(-4)=6-116=-110.$

उदाहरण 3. एक समान्तर श्रेणी का दसवाँ और 20वाँ पद क्रम से 31 और 61 हैं, तो उस श्रेणी का प्रथम पद और सार्व अन्तर बताओ।

कल्पना करो कि a प्रथम पद और b सार्व अन्तर है। उस दशा में

$31=a+9b,$

और $61=a+19b;$

उपरोक्त दोनों समीकरणों को हल करने से, $a=4$ और $b=3$ इसलिए प्रथम पद 4 और सार्व अन्तर 3 है।

प्रश्नावली 136.

निम्नलिखित श्रेणियों का सातवाँ और बारहवाँ पद निकालो :—

1. $3, 6, 9, \ldots\ldots$
2. $8, 15, 22, \ldots\ldots$
3. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots\ldots$
4. $2x, 8x, 14x, \ldots\ldots$
5. $-a, -6a, -11a, \ldots\ldots$
6. $a, a+1, a+2, \ldots$
7. $2a+b, 2a-b, 2a-3b \ldots\ldots$
8. $a+x, a-x, a-3x, \ldots$

निम्नलिखित श्रेणियों का nवाँ पद निकालो :—

9. $6, 12, 18, \ldots\ldots$
10. $8, 4, 0, \ldots\ldots$
11. $6a, -a, -8a, \ldots\ldots$
12. $a+b, 2a-3b, 3a-7b, \ldots$

निम्नलिखित पदों से बनी हुई समान्तर श्रेणी के प्रथम पद और सार्व अन्तर बताओ।

13. द्वितीय पद $=7$ और दशम पद $=31$.
14. तृतीय पद $=a+2b$ और सप्तम पद $=a+6b$.
15. पञ्चम पद $=6a-4b$ और अष्टम पद $=9a-7b$.
16. चतुर्थ पद $=0$ और नवम पद $=-\frac{5}{2}$.
17. द्वितीय पद $=2a$ और षष्टपद $=6a-4b$.

निम्नलिखित पद-समूह से बनी हुई समान्तर श्रेणी के nवाँ पद बताओ।

18. द्वितीय पद $=11$ और अष्टम पद $=53$.
19. तृतीय पद $=16$ और दशम पद $=-33$.
20. यदि $a, 3a-b, 5a-2b, \ldots\ldots$ श्रेणी का nवाँ पद $21a-10b$ हो, तो बताओ n कितना होगा?
21. किसी समान्तर श्रेणी का 23वाँ और 41वाँ पद क्रमशः 186 और 330 हैं। श्रेणी का 76वाँ पद निकालो।
22. a, b, c और d चार राशियाँ समान्तर श्रेणी में अवस्थित हों, तो सिद्ध करो कि $a+d=b+c$.
23. यदि किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद और अन्तिम पद क्रमशः a और b हों, तो सिद्ध करो कि प्रथम से r वाँ पद अन्त से r वाँ पद का योगफल $a+b$ होगा।

372. समान्तरीय मध्यमान (Arithmetic Mean).

तीन राशियों के द्वारा एक समान्तर श्रेणी गठित होने पर मध्य पद को अन्य दोनों का 'समान्तरीय मध्यमान' कहते हैं ।

जैसे, 8 और 18 का समान्तरीय मध्यमान 13 है ।

यदि कुछ राशियाँ समान्तर श्रेणी में हों, तो प्रथम और अन्तिम पदों के बीच में अवस्थित राशियों को भी इन पदों का समान्तरीय मध्यमान कहा जाता है ।

जैसे, 8, 13, 18, 23, 28, 33 श्रेणी में 13, 18, 23, 28 पद 8 और 33 के मध्यस्थ समान्तरीय मध्यमान हैं; और 8, $16\frac{1}{3}$, $24\frac{2}{3}$, 33 श्रेणी में $16\frac{1}{3}$, $24\frac{2}{3}$ ये दोनों पद 8 और 33 के समान्तरीय मध्यमान हैं ।

373. दो राशियों के समान्तरीय मध्यमान ।

मान लो कि a और b दो राशियाँ हैं और x उनका समान्तरीय मध्यमान है, तो उस दशा में a, x, b एक समान्तर श्रेणी है ।

$$\therefore \quad x-a=b-x, \text{ या } 2x=a+b, \text{ या } x=\frac{a+b}{2}.$$

अतएव दो राशियों का समान्तरीय मध्यमान उनके योग का आधा होता है ।

374. दो राशियों का कोई भी एक-संख्यक समान्तरीय मध्यमान निकालना ।

मान लो कि a और l दो राशियाँ और उनके मध्य में k-संख्यक समान्तरीय मध्यमान संस्थापित करना होगा ।

यदि सार्व अन्तर b हो, तो श्रेणी $a, a+b, a+2b, \ldots\ldots\ldots l$ होगी और उसमें $k+2$-संख्यक पद होंगे, इसलिए $(k+2)$-वाँ पद ही अन्तिम पद l है ।

$$\therefore \quad l=a+(k+2-1)b=a+(k+1)b;$$

$$\therefore \quad b=\frac{l-a}{k+1}.$$

अतएव मध्यमान क्रमशः,

$$a+\frac{l-1}{k+1}, a+\frac{2(l-a)}{k+1} \ldots\ldots, l-\frac{l-a}{k+1}.$$

उदाहरण । 5 और 53 के मध्यस्थ 7 समान्तरीय मध्यमान का संस्थापन करो ।

मानलो कि b सार्व अन्तर है । चूँकि $5+b,\ 5+2b, \ldots\ldots 53$ श्रेणी का $(7+2)$-वाँ पद अर्थात् नवाँ पद 53 है ।

$\therefore \quad 53=5+8b; \qquad \therefore \quad b=6.$

इसलिए मध्यमान क्रमशः 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47 हैं ।

प्रश्नावली 137.

1. 30 और -80 और 7 और 10 का मध्यस्थ समान्तरीय मध्यमान निकालो ।
2. $a+x$ और $a-x$ और $(a+b)^2$ और $(a-b)^2$ का मध्यस्थ समान्तरीय मध्यमान निकालो ।
3. a और $a+3x$ के बीच 2 समान्तरीय मध्यमान संस्थापन करो ।
4. 7 और -32 के बीच 2 समान्तरीय मध्यमान संस्थापन करो ।
5. 3 और $10\frac{1}{2}$ के बीच 4 समान्तरीय मध्यमान संस्थापन करो ।
6. यदि 10 और 74 के बीच 15 समान्तरीय मध्यमान हों, तो बताओ कि सार्व अन्तर कितना है ।
7. 13 और 61 के बीच n समान्तरीय मध्यमान हैं । प्रथम मध्यमान और $(n-1)$वें मध्यमान का अनुपात $7:5$ होने पर n का मान बताओ ।
8. x और y के बीच 4 समान्तरीय मध्यमान संस्थापन करो ।
9. x और $3x$ के बीच x समान्तरीय मध्यमान संस्थापन करो ।

375. समान्तर श्रेणी का योग ।

मान लो कि $a,\ a+b,\ a+2b \ldots\ldots n$ पद तक इस श्रेणी का योग निकालना है । श्रेणी का अन्तिम पद $l=a+(n-1)b$. इसलिए यदि S द्वारा श्रेणी या उसका योग सूचित हो, तो

$$S=a+(a+b)+(a+2b)+\ldots\ldots+l;$$

और श्रेणी को उलट कर लिखने से,

$$S = l + (l - b) + (l - 2b) + \ldots \ldots a;$$

जोड़ने से,

$$2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots\ldots\ldots + (a + l),$$

(यहाँ n-संख्यक पद हैं ।)

$$= n(a + l);$$

$$\therefore \quad S = \tfrac{1}{2}n(a + l) \quad \ldots \quad \ldots \quad (\text{सूत्र } 1)$$

चूँकि $l = a + (n - 1)b$;

$$\therefore \quad S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (\text{सूत्र } 2)$$

(1) और (2) में से किसी एक सूत्र के द्वारा समान्तर श्रेणी का योग निकाला जाता है ।

उदाहरण 1. 3, 5, 7.......श्रेणी के n पद तक का योग निकालो ।

यहाँ $a = 3$, $b = 2$.

$$\therefore \quad S = \tfrac{1}{2}n\{6 + (n - 1)2\} = \tfrac{1}{2}n(2n + 4) = n(n + 2).$$

उदाहरण 2. 3, 7, 11, 15.......श्रेणी का 30 पद पर्य्यन्त योग निकालो ।

यहाँ सार्व अन्तर 4 है ।

इसलिए $a = 3$, $b = 4$, $n = 30$;

$$\therefore \quad S = \tfrac{1}{2}.30\{2.3 + (30 - 1)4\}$$

$$= 15 \times (6 + 116) = 1830.$$

उदाहरण 3. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम और अन्तिम पद क्रमशः 15 और 37 हैं, और योग 780 है । बताओ श्रेणी में कितने पद हैं ।

सूत्र (1) से,

$$n = \frac{2S}{a + l} = \frac{2.780}{15 + 37} = \frac{2.780}{52} = 30.$$

उदाहरण 4. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 6, अन्तिम पद 63 और योग 690 है । बताओ उस श्रेणी का सार्व अन्तर क्या है ।

सूत्र (1) से,

$$n = \frac{2S}{a + l} = \frac{2.690}{6 + 63} = 20.$$

$\because \quad l = a + (n-1)b;$

$\therefore \quad 63 = 6 + (20-1)b = 6 + 19b;$

$\therefore \quad b = 3;$

$\therefore$ साधारण अन्तर $= 3$.

उदाहरण 5. 17, 5, -7, ...श्रेणी का योग -78 है; तो इसके पदों की संख्या बताओ।

यहाँ $a = 17$, $b = -12$ और $S = -78$.

$\therefore$ सूत्र (2) से,

$$-78 = \tfrac{1}{2}n\{34 + (n-1) \times (-12)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}n\{-12n + 46\} = -6n^2 + 23n;$$

$\therefore \quad 6n^2 - 23n - 78 = 0,$

या, $\quad (n-6)(6n+13) = 0,$

$\therefore \quad n = 6$, अथवा $-\frac{13}{6}$.

दूसरा उत्तर असम्भव है, क्योंकि पदों की संख्या अवश्य ही कोई धनात्मक पूर्ण संख्या होगी। इसलिए निर्णय संख्या 6 है।

उदाहरण 6. 7, 5, 3,.........श्रेणी के प्रथम n-संख्यक पदों का योग 12 होने पर n का मान बताओ।

यहाँ $a = 7$, $b = -2$, $S = 12$.

$\therefore \quad 12 = \tfrac{1}{2}n\{14 + (n-1)(-2)\}$

$$= \tfrac{1}{2}n(-2n + 16) = -n^2 + 8n.$$

$\therefore \quad n^2 - 8n + 12 = 0;$

या $\quad (n-2)(n-6) = 0;$

$\therefore \quad n = 2$, अथवा 6.

टीका—यहाँ दो उत्तर होने का कारण यह है कि इस श्रेणी के 6 पद 7, 5, 3, 1, -1, -3; 2 पद तक का योग $7 + 5 = 12$ और 6 पद पर्य्यन्त योग भी यही है क्योंकि अन्त के चार पदों का योग 0 है।

प्रश्नावली 138.

निम्नलिखित श्रेणियों का योग निकालो :—

1. 2, 3, 4,.........10 पद पर्य्यन्त।
2. 3, 7, 11,.........12 पद पर्य्यन्त।
3. 5, 1, −3, −7,.........15 पद पर्य्यन्त।
4. $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$, $\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})$,.........6 पद पर्य्यन्त।
5. a, $a-b$, $a-2b$,.........11 पद पर्य्यन्त।
6. $a+x$, $2a-x$, $3a-3x$,.........6 पद पर्य्यन्त।
7. 3, 6, 5, 9, 7, 12, 9,.........12 पद पर्य्यन्त।
8. n, $n+1$, $n+2$,.........n-संख्यक पद तक।
9. $1-\frac{1}{a}$, $1-\frac{3}{a}$, $1-\frac{5}{a}$.........n-संख्यक पद तक।
10. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 4, अन्तिम पद 31 और योग 350 है, तो बताओ पदों की संख्या क्या होगी।
11. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम और अन्तिम पद क्रमशः 14 और 82 हैं और श्रेणी का योग 720 है। श्रेणी के पदों की संख्या बताओ।
12. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 8, पदों की संख्या 25 और योग 2000 है, तो बताओ कि उस श्रेणी का सार्व अन्तर क्या है।
13. 23 से 78 तक क्रमागत पूर्ण संख्याओं का योग बताओ।
14. 37 से 137 तक क्रमागत विषम पूर्ण संख्याओं का योग बताओ।
15. 52 से 112 तक क्रमागत सम पूर्ण संख्याओं का योग बताओ।
16. 7, 4, 1,.........श्रेणी के कितने पद लेने पर योग 5 होगा?
17. 21, 26, 31,.........श्रेणी के कितने पद जोड़ने पर योग 435 होगा?
18. किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम दो पद क्रमशः 3 और 1 हैं, तो उस श्रेणी के दसवें पद और प्रथम दस पदों का योग बताओ।

19. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 13 और अन्तिम पद 89 है। यदि उस श्रेणी का योग 1020 हो, तो सार्व अन्तर बताओ।

20. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 57, और अन्तिम पद -13 और योग 330 है, तो श्रेणी का सार्व अन्तर क्या है ?

21. किसी श्रेणी का दशम पद पर्य्यन्त योग 320 और बीसवाँ पद पर्य्यन्त योग 1240 है। बताओ उस श्रेणी का 15वाँ पद पर्य्यन्त योग कितना होगा ?

22. किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद, अन्तिम पद और योग क्रमशः a, l और S हैं, तो उस श्रेणी का सार्व अन्तर बताओ।

23. किसी समान्तर श्रेणी का n-वाँ पद पर्य्यन्त योग $4n^2+3n$ है। यदि सार्व अन्तर 8 हो तो उस श्रेणी का प्रथम पद बताओ।

24. किसी समान्तर श्रेणी का n-वाँ पद पर्य्यन्त योग $5n^2$ और उसका सार्व अन्तर 10 है, तो उस श्रेणी का प्रथम पद बताओ।

25. यदि किसी श्रेणी का r-वाँ पद $\frac{1}{5}(3r+1)$ हो, तो वह श्रेणी बताओ। बताओ 30-वाँ पद पर्य्यन्त श्रेणी का योग क्या होगा।

376. स्वाभाविक संख्याओं से बनी हुई श्रेणी।

1, 2, 3,. ....संख्याओं को स्वाभाविक संख्या (Natural Numbers) कहते हैं। नीचे स्वाभाविक संख्या-विषयक कुछ प्रश्न हल किये गये हैं:—

I. प्रथम n संख्याओं का योग।

मान लो कि $S=1+2+3+4+\dots\dots\dots+n$;

यह एक समान्तर श्रेणी है, इसका प्रथम पद 1 और साधारण अन्तर भी 1 है।

इसलिए, $S=\frac{n}{2}\{2+n-1\}=\frac{1}{2}n(n+1).$

II. प्रथम n विषम स्वाभाविक संख्याओं का योग।

मान लो कि $S=1+3+5+7+\dots\dots\dots+n$-संख्यक पद पर्य्यन्त। यहाँ प्रथम पद $=1$ और साधारण अन्तर $=2$.

$$\therefore \qquad S=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}=n^2.$$

इसी प्रकार n सम स्वाभाविक संख्याओं का योग $=n(n+1)$.

III. प्रथम n स्वाभाविक संख्या के वर्ग का योग।

मान लो कि $S=1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2$.

यहाँ n का चाहे कुछ ही मान क्यों न हो,

$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$,

उक्त तादात्म्य में, $n=1, 2, 3, \dots\dots$एक के बाद एक लिखने से,

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1,$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1,$$
$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1,$$
$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$
$$n^3-(n-1)^3=3.n^2-3.n+1.$$

अङ्कों को क्रम से जोड़ने से,

$$n^3=3(1^2+2^2+\dots+n^2)-3(1+2+\dots n)+n$$
$$=3S-3.\tfrac{1}{2}n(n+1)+n, \qquad \text{[I के अनुसार]}$$
$$\therefore \qquad 3S=n^3+\tfrac{3}{2}n(n+1)-n$$
$$\therefore \qquad \mathbf{S=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).}$$

IV. प्रथम n स्वाभाविक संख्या के घन का योग।

मानलो कि, $S=1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots+n^3$.

n किसी भी मान से युक्त क्यों न हो,

$$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1;$$

उक्त तादात्म्य में, $n=1, 2, 3,\dots\dots\dots$लिखने से,

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1,$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1,$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1,$$
$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$
$$(n-1)^4-(n-2)^4=4.(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1.$$
$$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1.$$

अंकों को क्रम से जोड़ने से,

$$n^4=4(1^3+2^3+\dots\dots+n^3)-6(1^2+2^2+\dots\dots+n^2)$$
$$+4(1+2+\dots\dots+n)-n$$
$$=4S-6.\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4.\tfrac{1}{2}n(n+1)-n;$$

$$\therefore \quad 4S = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$
$$= n(n^3+1) + n(n+1)(2n-1)$$
$$= n(n+1)\{n^2 - n + 1 + 2n - 1\}$$
$$= n(n+1)(n^2+n) = n^2(n+1)^2.$$

$$S = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \{\tfrac{1}{2}n(n+1)\}^2.$$

उपसिद्धान्त। चूँकि $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+3+\ldots\ldots+n$;

इसलिए $1^3+2^3+\ldots\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots\ldots+n)^2$.

377. नीचे योगफल नियम सम्बन्धी और भी कई उदाहरण दिये गये हैं:—

उदाहरण 1. $1.3+3.5+5.7+\ldots\ldots$ श्रेणी का n-वाँ पद पर्य्यन्त योग बताओ।

$1, 3, 5, \ldots\ldots$ श्रेणी का n-वाँ पद $= 2n-1$.

इसलिए दी हुई श्रेणी का n-वाँ पद $= (2n-1)(2n+1) = 4n^2-1$;

$$\therefore \quad S = 1.3+3.5+5.7+\ \ldots\ldots$$
$$= (4.1^2-1)+(4.2^2-1)+(4.3^2-1)+\ldots+(4.n^2-1)$$
$$= 4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-n$$
$$= 4.\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$$
$$= \tfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-n.$$

उदाहरण 2. योगफल बताओ:— $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\ldots\ldots$, n-संख्यक पद पर्य्यन्त।

$$n\text{-वाँ पद} = n(n+2)^2$$
$$= n^3+4n^2+4n.$$

इसलिए,
$$S = (1^3+4.1^2+4.1)+(2^3+4.2^2+4.2)+\ldots\ldots + (n^3+4.n^2+4n)$$
$$= (1^3+2^3+\ldots+n^3)+4(1^2+2^2+\ldots+n^2) + 4(1+2+\ldots+n)$$
$$= \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2+\tfrac{4}{6}n(n+1)(2n+1)+\tfrac{4}{2}n(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{12}n(n+1)(3n^2+19n+32).$$

उदाहरण 3. योगफल बताओ: $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots$ n-संख्यक पद पर्य्यन्त ।

$$n\text{-वाँ पद} = 1+2+3+\ldots+n$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n.$$
$$\therefore \quad S = \tfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) + \tfrac{1}{2}(1+2+3\ldots+n)$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{12}n(n+1)(2n+4) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

उदाहरण 4. योगफल बताओ: $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots\ldots\ldots$ n-संख्यक पद पर्य्यन्त ।

$$n\text{-वाँ पद} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right\}.$$

इसलिये प्रथम पद $= \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4})$,

द्वितीय पद $= \frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})$,

तृतीय पद $= \frac{1}{3}(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})$,

... ...

$$n\text{-वाँ पद} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right);$$

अंकों को क्रम से जोड़ने से,

$$S = \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3n+1}\right\} = \frac{n}{3n+1}.$$

उदाहरण 5. $3+5+9+15+23+\ldots\ldots$ श्रेणी का n-वाँ पद पर्य्यन्त योग निकालो ।

इस श्रेणी के क्रमागत दो पदों के अन्तर से, जैसे 2, 4, 6, 8,......एक समान्तर श्रेणी बनाओ ।

मान लो कि S द्वारा दी हुई श्रेणी का योग और t_n द्वारा n-वाँ पद सूचित होता है ।

$$\therefore \quad S = 3+5+9+15+23+\ldots+t_n.$$

$$\text{फिर} \quad S = \quad 3+5+9+15+\ldots+t_{n-1}+t_n.$$

घटाने से, $0=3+2+4+6+\ldots\ldots+(t_n-t_{n-1})-t_n$
$=3+(2+4+6+\ldots\ldots n-1$ पद पर्य्यन्त$)-t_n$
$=3+(n^2-n)-t_n.$

$\therefore \quad t_n=n^2-n+3;$

$\therefore \quad S=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-(1+2+3+\ldots+n)+3n$
$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{n}{2}(n+1)+3n\ldots\ldots$
$=\frac{1}{3}n(n^2-1)+3n=\frac{1}{3}n(n^2+8).$

प्रश्नावली 139.

निम्नलिखित श्रेणियों के प्रथम n-संख्यक पदों का योगफल बताओः—

1. $1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots$ 2. $1^3+5^3+9^3+\ldots\ldots$

3. $3^2+5^2+7^2+\ldots\ldots$ 4. $2^2+5^2+8^2+\ldots\ldots$

5. $3^2+7^2+11^2+\ldots\ldots$ 6. $1^2+6^2+11^2+\ldots\ldots$

7. $2^3+6^3+10^3+\ldots\ldots$ 8. $1.4^2+2.5^2+3.6^2+\ldots\ldots$

9. $1.1^2+3.2^2+5.3^2+\ldots$ 10. $1.5+2.6+3.7+\ldots\ldots$

11. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots\ldots$

12. $1.7+3.9+5.11+\ldots\ldots$ 13. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots$

14. $\frac{1}{3.8}+\frac{1}{8.13}+\frac{1}{13.18}+\ldots$ 15. $1+3+8+16+27+\ldots\ldots$

16. $1+5+16+34+59\ldots\ldots$

17. $1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots$

18. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots\ldots$

19. $2.1^2+3.2^2+4.3^2+\ldots\ldots$

20. $1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots\ldots$

21. $n.1+(n-1).2+(n-2).3+\ldots+1.n.$

22. सिद्ध करो कि,

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1).$$

378. नीचे समान्तर श्रेणी सम्बन्धी कुछ उदाहरण दिये गए हैं:—

उदाहरण 1. यदि a, b, c एक समान्तर श्रेणी बनाती हों, तो सिद्ध करो कि $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$ और $c^2(a+b)$ भी एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं।

$a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$ और $c^2(a+b)$ के एक समान्तर श्रेणी बनाते समय, $b^2(c+a)-a^2(b+c)=c^2(a+b)-b^2(c+a)$ होगा।

अर्थात् $ab(b-a)+c(b^2-a^2)=bc(c-b)+a(c^2-b^2)$,

अथवा $(ab+bc+ca)(b-a)=(ab+bc+ca)(c-b)$,

अर्थात् $b-a=c-b$;

अतएव a, b, c एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं।

उदाहरण 2. किसी श्रेणी का n-संख्यक पद पर्य्यन्त योग $2n^2+n$ होने पर उसके प्रथम तीन पद कितने होंगे ?

n-संख्यक पद पर्य्यन्त योग $=2n^2+n$, इसलिए $(n-1)$ संख्यक पद पर्य्यन्त योग $=2(n-1)^2+n-1=2n^2-3n+1$.

n-वाँ पद $=n$-संख्यक पद पर्य्यन्त योग $-(n-1)$-संख्यक पद पर्य्यन्त योग $=(2n^2+n)-(2n^2-3n+1)$

$=4n-1$.

इसलिए श्रेणी के प्रथम तीन पद क्रमशः $(4.1-1)$, $(4.2-1)$, $(4\cdot3-1)$, अर्थात् 3, 7, 11 हैं।

उदाहरण 3. यदि किसी समान्तर श्रेणी के पदों की संख्या विषम हो, तो सिद्ध करो कि प्रथम और अन्तिम पद के योग का आधा, मध्य पद के समान होगा।

मानलो कि a, $a+b$, $a+2b$, ...एक समान्तर श्रेणी है और उसमें $(2n-1)$ संख्यक पद हैं।

उस दशा में, मध्यपद $=n$-वाँ पद

$=a+(n-1)b$.

अन्तिम पद $=a+(2n-2)b$.

$\therefore$ प्रथम और अन्तिम पद के योगफल का आधा

$=\frac{1}{2}\{a+a+2(n-1)b\}$

$=a+(n-1)b=$ मध्यपद ।

उदाहरण 4. किसी समान्तर श्रेणी का p-वाँ और q-वाँ पद क्रमशः a और b हैं। सिद्ध करो कि प्रथम $p+q$-संख्यक पदों का योग

$$=\tfrac{1}{2}(p+q)\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right).$$

मान लो कि x प्रथम पद और y सार्व अन्तर है।

उस दशा में $a=x+(p-1)y$,

और $\qquad b=x+(q-1)y$;

$$\therefore\quad a-b=(p-q)y,\ \text{या}\ y=\frac{a-b}{p-q}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\text{और}\quad a+b=2x+(p+q-2)y\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$(p+q)$-संख्यक पदों का योग

$$=\tfrac{1}{2}(p+q)\{2x+(p+q-1)y\}$$
$$\tfrac{1}{2}(p+q)\{2x+(p+q-2)y+y\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(p+q)\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}.$$

उदाहरण 5. किसी समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पदों का योग 15, और प्रथम और अन्तिम पदों के वर्गों का योग 58 है। उन तीनों पदों को बताओ।

मान लो कि तीनों पद $a-b$, a और $a+b$ हैं।

उस दशा में $(a-b)+a+(a+b)=15$;

$\therefore\quad 3a=15;\qquad \therefore\quad a=5;$

और $(a-b)^2+(a+b)^2=58$;

$\therefore\quad a^2+b^2=29;\qquad \therefore\quad b=\pm 2.$

इसलिए तीनों निर्णेय पद 3, 5, 7 अथवा 7, 5, 3 हैं।

उदाहरण 6. एक कर्मचारी का वेतन 75 रु० से आरम्भ होकर प्रति वर्ष 5 रु० बढ़ता है। बताओ 20 वर्ष में उसे कुल कितना वेतन मिला।

पहले वर्ष उसने $75\times 12=900$ रु० पाया।

प्रति वर्ष वह पहले वर्ष की अपेक्षा $5\times 12=60$ रु० अधिक पाता है। इसलिए उसके भिन्न भिन्न वर्षों की आय एक समान्तर श्रेणी बनाती है। इस श्रेणी का प्रथम पद 900 रु० और सार्व अन्तर 60 रु० है।

इसलिए 20 वर्ष में उसका कुल वेतन

$=\frac{1}{2}\times 20\{2\times 900+19\times 60\}$ रु०

$=29,400$ रु० ।

प्रश्नावली 140.

1. यदि a, b, c एक समान्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि $\frac{a+x}{y}$, $\frac{b+x}{y}$, $\frac{c+x}{y}$ भी एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं।

2. यदि a, b, c एक समान्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि $\frac{1+bc}{bc}$, $\frac{1+ca}{ca}$, $\frac{1+ab}{ab}$ भी एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं।

3. यदि a^2, b^2, c^2 एक समान्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ भी एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं।

4. यदि $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ और $(a-b)^2$ राशियाँ एक समान्तर श्रेणी बनाती हों तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ भी एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं।

5. (*i*) यदि $b+c-a, c+a-b, a+b-c$ एक समान्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि a, b, c भी एक समान्तर श्रेणी बनाती हैं।

   (*ii*) यदि ab, bc, ca एक समान्तर श्रेणी बनावें तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}, \frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}, \frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ भी एक समान्तर श्रेणी बनाते हैं

6. किसी श्रेणी का n-संख्यक पद पर्यन्त योग $3n^2+5n$ है; तो उस श्रेणी के प्रथम तीन पद बताओ।

7. एक श्रेणी का n-संख्यक पद पर्यन्त योग $7n^2-2n$ है, तो उस श्रेणी के प्रथम चार पद बताओ।

8. एक श्रेणी का n-संख्यक पद पर्यन्त योग n^2+4n है, बताओ श्रेणी के प्रथम तीन पद कौन से हैं।

9. सिद्ध करो कि किसी समान्तर श्रेणी के $2n$-संख्यक पद के उत्तरार्द्ध पदों का योगफल श्रेणी के प्रथम $3n$-संख्यक पद के योगफल के तिहाई के बराबर है।

10. एक श्रेणी के n-संख्यक पद का योग $3n^2-2n$ है, तो बताओ कि उस श्रेणी का प्रथम पद और सार्व अन्तर क्या है।

11. एक समान्तर श्रेणी के p-संख्यक पदों का योग q और q-संख्यक पदों का योग p है। सिद्ध करो कि $(p+q)$-संख्यक पदों का योग $-(p+q)$ है।

12. एक ही प्रथम पद से युक्त तीन समान्तर श्रेणियों के प्रथम n-संख्यक पद का योग S_1, S_2, S_3 है। सिद्ध करो कि यदि तीनों श्रेणियों के तीनों सार्व अन्तर समान्तर श्रेणी बनावें, तो S_1, S_2, S_3 भी एक समान्तर श्रेणी बनावेंगे।

13. इस प्रकार की तीन संख्याओं का योग, जोकि समान्तर श्रेणी बनाती हैं, 27 और गुणनफल 504 है। तो बताओ कि वे तीनों संख्याएँ कौन कौन सी हैं।

14. समान्तर श्रेणी बनाने वाली तीन संख्याओं का योग 24 और उनके वर्ग का योग 242 है। तो बताओ कि वे संख्याएँ कौन कौन सी हैं।

15. 77 को ऐसे सात अंशों में विभक्त करो कि समस्त अंश एक समान्तर श्रेणी बनावें और श्रेणी के प्रथम और अन्तिम पद का गुणनफल 40 हो।

16. यदि किसी समान्तर श्रेणी को प्रथम p, q और r-संख्यक पदों का योग क्रमशः a, b और c हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$$

17. एक त्रिभुज के कोण 15° सार्व अन्तर से युक्त एक समान्तर श्रेणी बनाते हैं; तो बताओ कि वे कोण कौन कौन से हैं।

18. एक चतुर्भुज के कोण 20° सार्व अन्तर से युक्त एक समान्तर श्रेणी बनाते हैं; तो वे कोण बताओ।

19. एक कर्मचारी के प्रथम वर्ष का मासिक वेतन 100 रु० है। उसका वेतन यदि 5 रु० प्रति वर्ष के हिसाब से बढ़ता जाय तो बताओ कि 15 वर्ष में उसकी कुल आय क्या होगी।

20. किसी पाठशाला के विद्यार्थियों की अवस्था एक समान्तर श्रेणी बनाती है। इसका सार्व अन्तर 4 मास है। यदि कनिष्ठ बालक की अवस्था 8 वर्ष और बालकों की अवस्था का योग 168 वर्ष है, तो बताओ कि विद्यार्थियों की संख्या कितनी है।

21. प्रथम सप्ताह में 1 शिलिंग, द्वितीय सप्ताह में 3 शिलिंग, तृतीय सप्ताह में 5 शिलिंग, इस हिसाब से देकर एक ऋण एक वर्ष में चुकता किया जाता है; तो बताओ कि वर्ष के अन्तिम सप्ताह में कितना देना पड़ा और कुल ऋण कितना था। [एक वर्ष = 52 सप्ताह।]

22. पहले महीने में 2 रु० देने के बाद हर महीने में क्रमागत पूर्ववर्त्ती महीने से 1 रु० अधिक देते रहने पर 65 रु० का एक ऋण कितने दिनों में चुकता किया जा सकता है ?

गुणोत्तर श्रेणी (Geometrical Progression)

379. गुणोत्तर श्रेणी।

यदि किसी श्रेणी का कोई भी पद उसके क्रमागत पूर्ववर्त्ती पद को किसी अचल राशि से गुणा करने पर प्राप्त हो, तो उस श्रेणी को गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं।

उस अचल राशि को गुणोत्तर निष्पत्ति (Common ratio) कहते हैं। श्रेणी के किसी पद से उसके क्रमागत परवर्त्ती पद को भाग देने पर ही गुणोत्तर निष्पत्ति पाया जाता है।

निम्नलिखित दोनों पंक्तियाँ गुणोत्तर श्रेणी के अन्तर्गत हैं:—

(1) 1, 5, 25, 125.................. [गुणोत्तर निष्पत्ति 5.]

(2) $a, -6a, 36a, -216a,$......... [गुणोत्तर निष्पत्ति -6.]

यदि t_n और t_{n-1} किसी गुणोत्तर श्रेणी के n-वाँ और $(n-1)$-वाँ पद और r उस श्रेणी का गुणोत्तर निष्पत्ति हो, तो $t_n = t_{n-1}.r$; अतएव यही श्रेणी का 'गठन-नियम' है ।

चूँकि $t_1 : t_2 = t_2 : t_3 = \ldots\ldots\ldots \frac{1}{r}$; इसलिए गुणोत्तर श्रेणी के पद उत्तरोत्तर समानुपाती हैं ।

380. गुणोत्तर श्रेणी का 'पद साधारण' ।

कल्पना करो कि a किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद और r गुणोत्तर निष्पत्ति है । उस दशा में यह श्रेणी $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$ होगी ।

यहाँ प्रथम पद $= ar^0 = ar^{1-1}$,

द्वितीय पद $= ar = ar^{2-1}$,

तृतीय पद $= ar^2 = ar^{3-1}$;

यदि श्रेणी में n-संख्यक पद हों और अन्तिम पद l हो, तो

$$l = ar^{n-1}.$$

उदाहरण 1. $3, 6, 12, \ldots\ldots$ श्रेणी का दसवाँ पद बताओ ।

यहाँ प्रथम पद $= 3$ और गुणोत्तर निष्पत्ति $= 2$.

इसलिए दसवाँ पद $t_{10} = 3.2^9 = 1536$.

उदाहरण 2. एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम और तृतीय पद क्रमशः 6 और 96 है । उस श्रेणी का चतुर्थ पद बताओ ।

कल्पना करो कि श्रेणी की गुणोत्तर निष्पत्ति r है ।

उस दशा में $a = 6$, $ar^2 = 96$.

$\therefore \qquad r^2 = 16$, अथवा $r = \pm 4$.

(1) यदि $r = 4$ हो, तो चतुर्थ पद $= 6 \times 4^3 = 6 \times 64 = 384$;

(2) यदि $r = -4$ हो, तो चतुर्थ पद $= 6 \times (-4)^3 = -384$.

प्रश्नावली 141.

1. $1, 2, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ श्रेणी का सातवाँ पद बताओ ।
2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ श्रेणी का दसवाँ पद बताओ ।
3. $a, ax^2, ax^4, \ldots\ldots\ldots\ldots$ श्रेणी का आठवाँ पद बताओ ।
4. $-3, -9, -27, \ldots\ldots$ श्रेणी का पाँचवाँ पद बताओ ।

5. किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम दो पद 3 और 12 हैं; तो उस श्रेणी का पाँचवाँ पद बताओ।

6. एक गुणोत्तर श्रेणी के दूसरे और पाँचवें पद क्रमशः -12 और 324 हैं। उस श्रेणी का सातवाँ पद बताओ।

7. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$............श्रेणी का कौनसा पद $-\frac{1}{243}$ है?

8. 64, 16, 4, ...श्रेणी का कौनसा पद $\frac{1}{64}$ है?

9. $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}$,......श्रेणी का n-वाँ पद बताओ।

10. किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम दो पद 3 और 1 हैं। बताओ उस श्रेणी का दसवाँ पद कौनसा है।

381. गुणोत्तर मध्यमान (Geometric Mean).

यदि तीन राशियाँ कोई गुणोत्तर श्रेणी बनावें, तो मध्य पद को अन्य दो पदों का गुणोत्तर मध्यमान कहा जाता है।

जैसे, 5 और 20 का गुणोत्तर मध्यमान 10 है। कारण 5, 10, 20 एक गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं।

चाहे जिस किसी भी संख्या की राशि से गुणोत्तर श्रेणी बनती हो, मध्य पदों को प्रथम और अन्तिम पदों का गुणोत्तर मध्यमान कहा जायगा।

जैसे, 4, 8, 16, 32, संख्याएँ 2 और 64 इन दो संख्याओं के मध्य में वर्त्तमान होने से गुणोत्तर मध्यमान हैं। इसी प्रकार 8 और 16 संख्याएँ 4 और 32 के मध्य में वर्त्तमान गुणोत्तर मध्यमान हैं।

382. दो राशियों का गुणोत्तर मध्यमान निकालना।

कल्पना करो कि a और b दो राशियाँ हैं और x उनका गुणोत्तर मध्यमान है। उस दशा में a, x, b एक गुणोत्तर श्रेणी है।

अतएव $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$; क्योंकि इनमें से हरएक गुणोत्तर निष्पत्ति के समान है।

$\therefore\ x^2=ab$;　　　　$\therefore\ x=\pm\sqrt{ab}$.

अर्थात् $\sqrt{ab}$,　　　　अथवा $-\sqrt{ab}$ निर्णेय मध्यमान है।

383. दो संख्याओं के मध्यस्थ किसी भी संख्या के गुणोत्तर मध्यमान निकालना।

मान लो कि a और b दो राशियों के मध्यस्थ n-संख्यक गुणोत्तर मध्यमान निकालना है। उस दशा में एक ऐसी श्रेणी बनेगी जिसका प्रथम पद a और अन्तिम पद b है। मानलो कि r इस श्रेणी की गुणोत्तर निष्पत्ति है।

ऐसी दशा में प्रथम पद a, और $(n+2)$-वाँ पद b है।

$\therefore \qquad b = ar^{n+1}.$

$\therefore \qquad r^{n+1} = \frac{b}{a}, \qquad$ अथवा $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$

$\therefore$ निर्णेय मध्यमान $ar, ar^2, \ldots \ldots ar^n$, यहाँ $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$;

अर्थात् निर्णेय मध्यमान

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \ldots \ldots a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

उदाहरण 1. 7 और 63 का गुणोत्तर मध्यमान निकालो।

निर्णेय मध्यमान $= \pm\sqrt{7 \times 63} = \pm 21.$

यहाँ मध्यमान 21 अथवा -21 होगा। दोनों ही उत्तर शुद्ध हैं क्योंकि 7, 21, 63 और 7, -21, 63 दोनों ही एक गुणोत्तर श्रेणी हैं।

उदाहरण 2. $\frac{1}{9}$ और 9 के बीच में तीन गुणोत्तर मध्यमान स्थापित करो।

कल्पना करो कि गुणोत्तर निष्पत्ति r है। चूँकि $\frac{1}{9}$ और 9 के बीच में तीन मध्यमान हैं, इसलिए $\frac{1}{9}$ प्रथम पद और 9 गुणोत्तर श्रेणी का पाँचवाँ पद होगा।

अतएव $9 = \frac{1}{9} \cdot r^4$, अथवा $r^4 = 81$; $\quad \therefore \quad r = \pm 3.$

(1) यदि $r = 3$ हो, तो तीनों मध्यमान $\frac{1}{3}$, 1, 3 हैं।

(2) यदि $r = -3$ हो, तो तीनों मध्यमान $-\frac{1}{3}$, 1, -3 हैं।

प्रश्नावली 142.

1. 27 और 243 का गुणोत्तर मध्यमान निकालो।
2. 21 और $42\frac{6}{7}$ का गुणोत्तर मध्यमान निकालो।
3. $(a+b)^2$ और $(a-b)^2$ का गुणोत्तर मध्यमान निकालो।
4. $\frac{1}{4}$ और 4 के मध्यस्थ 3 गुणोत्तर मध्यमान बताओ!
5. $-\frac{1}{27}$ और -27 के मध्यस्थ 5 गुणोत्तर मध्यमान बताओ।
6. 5 और 1215 के मध्यस्थ 4 गुणोत्तर मध्यमान बताओ।
7. एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 25 और पाँचवाँ पद 164025 है। उस श्रेणी को मालूम करो।
8. 5 और 135 की मध्यस्थ ऐसी दो संख्याएँ बताओ जिनसे कि चारों संख्याएँ एक गुणोत्तर श्रेणी बनावें।
9. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a, n-वाँ पद l और प्रथम n-संख्यक पदों का गुणनफल P हो, तो सिद्ध करो कि $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.
10. यदि a और b का गुणोत्तर मध्यमान M हो, तो सिद्ध करो कि a और b के मध्यस्थ n-संख्यक गुणोत्तर मध्यमान का गुणनफल M^n होगा।
11. दो धनात्मक राशियों का समान्तर मध्यमान 15 और उनका गुणोत्तर मध्यमान 9 है। बताओ वे दोनों संख्याएँ कौन कौनसी हैं।

384. गुणोत्तर श्रेणी।

निम्नलिखित रीति से गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निकाला जाता है:—

मान लो कि प्रथम पद a और गुणोत्तर निष्पत्ति r है, तो श्रेणी $a, ar, ar^2, \ldots\ldots\ldots ar^{n-1}$ होगी। मानलो कि श्रेणी के n-संख्यक पदों का योगफल S है।

उस दशा में $S=a+ar+ar^2+\ldots\ldots\ldots+ar^{n-1}$;

$\therefore \quad rS=ar+ar^2+\ldots\ldots\ldots+ar^{n-1}+ar^n$.

घटाने से,

$$(1-r)\,S=a-ar^n;$$

$$\therefore \quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

टीका 1— 1 की अपेक्षा r छोटा होने पर योगफल का उपर-लिखित प्रथम आकार और बड़ा होने पर द्वितीय का प्रयोग सुविधाजनक है ।

टीका 2— अन्तिम पद $l=ar^{n-1}$: अतएव योगफल S को $a, l,$ और r द्वारा भी प्रकट किया जाता है; जैसे, $S=\dfrac{a-lr}{1-r}$.

उदाहरण 1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$.........श्रेणी के प्रथम n-संख्यक पदों का योगफल निकालो ।

यहाँ $a=1, r=\frac{1}{3}$,

इसलिए $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$.

उदाहरण 2. $4, -\frac{8}{3}, \frac{16}{9}$........श्रेणी के प्रथम पाँच पदों का योगफल बताओ ।

यहाँ $a=4, r=-\frac{2}{3}, n=5$;

$\therefore \quad S=\dfrac{4[1-(-\frac{2}{3})^5]}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{12}{5}(1+\frac{32}{243})=2\frac{58}{81}$.

प्रश्नावली 143.

योगफल बताओ :—

1. $1+2+4+$.........8 पद पर्य्यन्त ।
2. $1+3+9+$.........6 पद पर्य्यन्त ।
3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+$.........5 पद पर्य्यन्त ।
4. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-$ ....6 पद पर्य्यन्त ।
5. $3+6+12+$.........6 पद पर्य्यन्त ।
6. $1+3+9+$.........n-संख्यक पद पर्य्यन्त ।
7. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1+\dfrac{3}{\sqrt{3}}+$.........$n$-संख्यक पद पर्य्यन्त ।
8. $a+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{b^2}+$.........$n$-संख्यक पद पर्य्यन्त ।
9. $7+9\frac{1}{3}+12\frac{4}{9}+$.........$n$-संख्यक पद पर्य्यन्त ।
10. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम दो पद 3 और 1 हैं । बताओ उस श्रेणी के प्रथम दस पदों का योगफल क्या है ।

11. सेब के एक वृक्ष में प्रति वर्ष पिछले वर्ष से डेढ़ गुने फल लगते हैं। यदि पहले वर्ष उसमें 80 फल लगे थे, तो 5 वर्ष में कुल कितने फल लगे होंगे?

12. एक आदमी ने किसी परोपकारी संस्था में कुछ मासिक चन्दा देना स्वीकार किया। यदि प्रति मास का चन्दा पूर्व मास का दुगना हो और यदि वह पहले मास में एक पैसा दे, तो बताओ 2 वर्ष में उसने कुल कितना दान दिया।

385. अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योगफल (Sum of an Infinite G. P.)

कल्पना करो कि गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, ar^2, \ldots\ldots$ है।

उक्त श्रेणी का n-संख्यक पद पर्य्यन्त योगफल

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

यहाँ r के एक वास्तविक भिन्न होने पर $r^2 < r$, $r^3 < r^2$, $r^4 < r^3$ इत्यादि। [जैसे, यदि $r = \frac{2}{5}$ हो, तो $(\frac{2}{5})^2 < \frac{2}{5}$, $(\frac{2}{5})^3 < (\frac{2}{5})^2$ इत्यादि।] अतएव n जितना ही बढ़ता जाता है r^n उतना ही कम होता जाता है। इसी प्रकार n का जब बहुत ही ह्रास हो जाता है, तब r^n अत्यन्त क्षुद्र हो जाता है। इसलिए n को बढ़ाकर r^n को प्रयोजन के अनुसार जितना चाहें उतना ही छोटा किया जा सकता है। इसलिए $(1-r)$ का किसी प्रकार का ह्रास वृद्धि न करके) $\frac{ar^n}{1-r}$ को भी इच्छानुसार क्षुद्र किया जा सकता है।

इसलिए, n को यथेष्ट परिमाण में बढ़ाकर योगफल S और $\frac{a}{1-r}$ के अन्तर को इच्छानुसार छोटा किया जा सकता है।

इस सत्य को निम्नलिखित रूप से प्रकट किया जाता है :—

r यदि 1 की अपेक्षा छोटा हो, तो दी हुई गुणोत्तर श्रेणी का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल $\frac{a}{1-r}$ होगा। इसलिए अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल निकालने का निम्नलिखित सूत्र पाया जाता है :—

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

टीका—स्मरण रहे कि यदि गुणोत्तर निष्पत्ति कोई धनात्मक या ऋणात्मक वास्तविक भिन्न हो, तभी गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल एक परिमित (finite) राशि होगी, अन्यथा ऐसा न होगा ।

उदाहरण 1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\ldots$ श्रेणी का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल निकालो ।

यहाँ प्रथम पद $=1$ और गुणोत्तर निष्पत्ति $=\frac{1}{3}$.

$\therefore$ अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल $=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

उदाहरण 2. $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{4}{27}-\ldots\ldots$ श्रेणी का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल निकालो ।

यहाँ $a=\frac{3}{4}$ और $r=-\frac{4}{9}$.

$\therefore$ निर्णेय योगफल $=\dfrac{\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{3}{4}\times\frac{9}{13}=\frac{27}{52}$.

उदाहरण 3. $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots\ldots$ श्रेणी का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल बताओ ।

यहाँ $a=\sqrt{3},\ r=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ निर्णेय योगफल $=\dfrac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

386. आवर्त्त दशमलव सम्बन्धी अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का उदाहरण ।

$\cdot 3\dot{8}$ की आलोचना करो ।

यहाँ $\cdot 3\dot{8}=\cdot 388888\ldots\ldots$

$=\cdot 3+\cdot 08+\cdot 008+\cdot 0008+\ldots\ldots$ अनन्त पद पर्य्यन्त

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{8}{100}+\dfrac{8}{1000}+\dfrac{8}{10000}+\ldots\ldots$,, ,,

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{8}{100}+\dfrac{8}{100}\cdot\dfrac{1}{10}+\dfrac{8}{100}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^2+\ldots$,, ,,

इस श्रेणी के दूसरे पद से लेकर समस्त पद तक एक गुणोत्तर श्रेणी के अन्तर्गत हैं । इस श्रेणी का प्रथम पद $\dfrac{8}{100}$ और गुणोत्तर निष्पत्ति $\dfrac{1}{10}$ है ।

इसलिए, $\cdot 3\dot{8} = \frac{3}{10} + \frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + \frac{8}{100} \times \frac{10}{9}$

$= \frac{3}{10} + \frac{8}{90} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}.$

व्यवहार के लिए निम्नलिखित प्रणाली प्रयोग की जा सकती है :—

मान लो कि $\quad S = \cdot 3\dot{8} = \cdot 38888......$

$\therefore \quad 10S = 3\cdot 88888......$

और $\quad 100S = 38\cdot 8888......$

$\therefore \quad 100S - 10S = 38 - 3 = 35;$

$\therefore \quad 90S = 35,$

$\therefore \quad S = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}.$

प्रश्नावली 144.

निम्नलिखित श्रेणियों का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल निकालो :—

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$
3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + ...$
4. $56 + 28 + 14 + ...$
5. $\frac{1}{3} + \frac{7}{24} + \frac{49}{192} + ...$
6. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{6}{25} - ....$
7. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$
8. $1 + a + a^2 + a^3 + ...(a < 1).$
9. $\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + ...$
10. $(2 + \sqrt{3}) + 1 + (2 - \sqrt{3}) + ...$
11. एक अनन्त पदवाली श्रेणी का प्रथम पद धनात्मक और गुणोत्तर निष्पत्ति $\frac{1}{x}$ है। (यहाँ x धनात्मक और 2 से बड़ा है)। सिद्ध करो कि प्रथम पद अन्य पदों से बड़ा है।
12. सिद्ध करो कि भिन्न गुणोत्तर निष्पत्ति से युक्त एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का कोई पद और उसके परवर्ती पदों के योगफल का अनुपात $1 - r : r$ होता है।

13. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 1, और उसका कोई भी पद उसके परवर्त्ती पदों के योगफल के समान है। उस श्रेणी को ज्ञात करो।

14. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 2, और उसका कोई भी पद तथा उसके परवर्त्ती पदों के योगफल का अनुपात भी 2 है। अनन्त पद पर्य्यन्त उस श्रेणी का योगफल बताओ।

15. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का n-संख्यक पद, $2n$-संख्यक पद और अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 हो, तो सिद्ध करो कि

$$S_1(S_1-S_3)=S_3(S_1-S_2).$$

16. अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के योगफल के रूप में प्रकट करके निम्नलिखित आवर्त्त दशमलवों का मान बताओ :

(1) $\cdot\dot{4}$. (2) $\cdot 3\dot{5}$. (3) $\cdot 28\dot{1}$.
(4) $3\cdot\dot{2}\dot{7}$. (5) $6\cdot 2\dot{5}$, (6) $1\cdot\dot{2}\dot{3}$

387. नीचे अनन्त गुणोत्तर श्रेणी सम्बन्धीय कुछ उदाहरण दिये गये हैं।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि गुणोत्तर श्रेणी के आदि और अन्त से समदूरस्थ किसी भी दो पदों का गुणनफल एक अचल राशि होगी।

मान लो कि $a, ar, ar^2, \ldots\ldots ar^{n-1}$ एक गुणोत्तर श्रेणी है।

आदि से m-वाँ पद $=ar^{m-1}$; और अन्त से m-वाँ पद $=$ आदि से $(n-m+1)$-वाँ पद $=ar^{n-m}$.

इसलिए दोनों पदों का गुणनफल

$=ar^{m-1}\times ar^{n-m}=a^2r^{n-1}=a\times ar^{n-1}=a\times l=$ एक अचल राशि; (चूँकि प्रथम और अन्तिम पद का गुणनफल = एक अचल राशि।)

उदाहरण 2. 62 को ऐसे 3 अंशों में बाँटो कि वे एक गुणोत्तर श्रेणी बनावें और उनका गुणनफल 1000 हो।

मान लो कि $\frac{a}{r}$, a, ar निर्णेय अंश हैं।

$$\therefore \qquad \frac{a}{r}+a+ar=62 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

और $\frac{a}{r} \times a \times ar = 1000$ ....(2)

(2) से, $a^3 = 1000$, $\therefore$ $a = 10$.

(1) से, $ar^2 + (a - 62)r + a = 0$,

या, $10r^2 - 52r + 10 = 0$,

या, $(r - 5)(5r - 1) = 0$,

$\therefore$ $r = 5$ या $\frac{1}{5}$.

इसलिए 2, 10 और 50 निर्णेय अंश हैं।

उदाहरण 3. यदि a, b, c एक गुणोत्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि $(b^2 + c^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(b^2 - c^2)$.

चूँकि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद हैं, इसलिए

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}, \quad \text{या} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

$\therefore$ प्रत्येक भिन्न $= \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2}$

और $= \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$.

$$\therefore \quad \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}.$$

$$\therefore \quad (b^2 + c^2)(a^2 - b^2) = (b^2 - c^2)(a^2 + b^2).$$

उदाहरण 4. यदि a, b, c, d एक गुणोत्तर श्रेणी बनावें तो सिद्ध करो कि $\frac{a - b}{b - d}, \frac{b}{c}, \frac{a - c}{b - c}$ भी एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हैं।

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \text{ (मान लो)}।$$

उस दशा में, $k = \frac{a - b}{b - c} = \frac{a - c}{b - d}$; और $k^2 = \frac{b^2}{c^2}$;

$$\therefore \quad \frac{(a - b)(a - c)}{(b - c)(b - d)} = k^2 = \frac{b^2}{c^2};$$

$$\therefore \quad \frac{a - b}{b - d} \times \frac{a - c}{b - c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2;$$

$\therefore$ $\frac{a - b}{b - d}, \frac{b}{c}, \frac{a - c}{b - c}$ एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हैं।

उदाहरण 5. $1+6+31+156+\ldots\ldots$ श्रेणी का n-संख्यक पद पर्य्यन्त योगफल बताओ।

इस श्रेणी में समाविष्ट सम पदों के अन्तर 5, 25, 125,...आदि एक गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं।

मानलो कि, $S=1+6+31+156+\ldots\ldots t_n.$

और $S=\quad 1+6+31+\ldots\ldots t_{n-1}+t_n.$

घटाने से,

$$0=1+[5+25+125+\ldots(n-1) \text{ पद पर्य्यन्त}]-t_n.$$

$$\therefore \quad t_n=1+5+25+125+\ldots\ldots n\text{-संख्यक पद पर्य्यन्त}$$

$$=\frac{1\times(5^n-1)}{5-1}=\frac{5^n-1}{4}.$$

इसलिए प्रथम पद $=\frac{1}{4}(5^1-1);$

द्वितीय पद $=\frac{1}{4}(5^2-1);$

n-वाँ पद $=\frac{1}{4}(5^n-1).$

जोड़ने से, $S=\frac{1}{4}(5+5^2+\ldots\ldots n\text{-संख्यक पद पर्य्यन्त})-\frac{1}{4}n$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{5(5^n-1)}{5-1}-\frac{1}{4}n=\frac{5}{16}(5^n-1)-\frac{1}{4}n.$$

उदाहरण 6. $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots\ldots(x<1)$ श्रेणी का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल बताओ।

मानलो कि, $S=1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$

$\therefore \quad x.S=\quad x+3x^2+5x^3+\ldots$

घटाने से, $(1-x)S=1+2x+2x^2+2x^3+\ldots$

$$=1+2x(1+x+x^2+\ldots)$$

$$=1+2x.\frac{1}{1-x}, \qquad \because \quad x<1.$$

$$=1+\frac{2x}{1-x}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$S=\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

निम्नलिखित दोनों श्रेणियों के संगत पदों को गुणा करने से वह श्रेणी पाई जाती है :—

(1) $1+3+5+7+\ldots\ldots$

(2) $1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots$

दोनों श्रेणियों में से पहली समान्तर है और दूसरी गुणोत्तर; इसलिए इस उदाहरण में दी हुई श्रेणी के समान श्रेणियों को समान्तर गुणोत्तर श्रेणी (Arithmetico-geometric series) कहते हैं।

उदाहरण 7. $4+44+444+\ldots\ldots$ श्रेणी का n-संख्यक पद पर्य्यन्त योगफल निकालो।

$$S=4+44+444\ldots\ldots n\text{-संख्यक पद पर्य्यन्त}$$
$$=4(1+11+111+\ldots\ldots n\text{-संख्यक पद पर्य्यन्त})$$
$$=\tfrac{4}{9}(9+99+999+\ldots\ldots n\text{-संख्यक पद पर्य्यन्त})$$
$$=\tfrac{4}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots n\text{-संख्यक पद पर्य्यन्त}]$$
$$=\tfrac{4}{9}[\{10+10^2+10^3+\ldots\ldots n\text{-संख्यक पद पर्य्यन्त}\}-n]$$
$$=\tfrac{4}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{(10-1)}-n\right]$$
$$=\tfrac{4}{9}\left[\tfrac{10}{9}(10^n-1)-n\right]=\frac{40}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{4n}{9}.$$

उदाहरण 8. एक वस्तु पहले घंटे में 10 मील, दूसरे घंटे में 8 मी० और तीसरे घंटे में $6\frac{2}{5}$ मी० चलती है और उसके इस प्रकार चलने का वेग एक गुणोत्तर श्रेणी बनाता है। सिद्ध करो कि वह वस्तु अनन्त काल तक चलने पर भी एक निर्दिष्ट दूरी से अधिक नहीं जा सकेगी।

मानलो कि वह वस्तु असंख्य घंटा तक चलती रहती है। उस दशा में चली हुई दूरी

$$=10\text{ मी०}+8\text{ मी०}+6\tfrac{2}{5}\text{ मी०}+\ldots\ldots\text{अनन्त पद पर्य्यन्त}$$
$$=(10+8+6\tfrac{2}{5}+\ldots\ldots\text{अनन्त पद पर्य्यन्त})\text{ मील}$$
$$=\frac{10}{1-\frac{4}{5}}\text{ मी०}=10\times\tfrac{5}{1}\text{ मी०}=50\text{ मी०}।$$

इसलिए वह 50 मी० से अधिक नहीं जा सकेगी।

प्रश्नावली 145.

1. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के पदों की संख्या विषम हो, तो सिद्ध करो कि मध्य पद का वर्ग प्रथम और अन्त पदों के गुणनफल के समान होगा।

2. n एक सम संख्या होने पर n-संख्यक पदों वाली गुणोत्तर श्रेणी के दो मध्य पद बताओ।

3 धन पद और 1 की अपेक्षा अधिक छोटे गुणोत्तर निष्पत्ति वाली एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी गुणोत्तर निष्पत्ति $\frac{1}{2}$ के समान या $\frac{1}{2}$ की अपेक्षा छोटा या बड़ा होने पर श्रेणी का कोई भी पद क्रमशः अपने परवर्ती पदों के योगफल के समान या उसकी अपेक्षा बड़ा या छोटा होगा।

4. यदि p, q, r क्रम से किसी गुणोत्तर श्रेणी के pवाँ, qवाँ और rवाँ पद हों, तो सिद्ध करो कि $p^{q-r}\, q^{r-p}\, r^{p-q}=1.$

5. सिद्ध करो कि गुणोत्तर श्रेणी के किसी निर्दिष्ट पद से समान दूरस्थ किसी दो पदों का गुणनफल निर्दिष्ट पद के वर्ग के समान होता है।

6. यदि $a, ar, ar^2, \ldots\ldots n$-संख्यक पद पर्यन्त श्रेणी का योगफल S पदों का गुणनफल P और उनके व्युत्क्रम (reciprocal) का योगफल R हो, तो सिद्ध करो कि $P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n.$

7. यदि x, y, z कोई गुणोत्तर श्रेणी और a, b, c कोई समान्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि $x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b}=1.$

8. एक गुणोत्तर श्रेणी के n, $2n$, और $3n$ संख्यक पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 है। सिद्ध करो कि $S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2.$

9. गुणोत्तर श्रेणी के अन्तर्गत तीन संख्याओं का योगफल 91 और उनका गुणनफल 9261 है, तो वे संख्याएँ बताओ।

10. गुणोत्तर श्रेणी के अन्तर्गत तीन संख्याओं का योगफल 26 और प्रथम तथा अन्तिम पदों का गुणनफल 36 है, तो वे तीनों संख्याएँ बताओ।

11. गुणोत्तर श्रेणी के अन्तर्गत तीन संख्याओं का योगफल 7 और उनके वर्ग का योगफल 21 है। उन तीनों संख्याओं को बताओ।

12. दो संख्याओं का योग उनके गुणोत्तर मध्यमान की अपेक्षा 9 अधिक है और उनके योग का वर्ग उनके गुणनफल की अपेक्षा 189 अधिक है। बताओ वे दोनों संख्याएँ कौन कौन सी हैं।

13. यदि a, b, c एक समान्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि,
$$(a^n+b^n)(b^n-c^n)=(a^n-b^n)(b^n+c^n).$$

14. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि,
$$\frac{a^2+ab+b^2}{bc+ca+ab}=\frac{a+b}{b+c}.$$

15. यदि a, b, c एक समान्तर श्रेणी और a, b, d एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हों, तो सिद्ध करो कि $a, a-b, d-c$ एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हैं।

16. यदि a, b, c, d एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हों, तो सिद्ध करो कि $a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$ तीनों राशियाँ भी एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हैं।

17. यदि a, b, c, d एक गुणोत्तर श्रेणी बनावें, तो सिद्ध करो कि $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2.$

18. a, b, c, d के गुणोत्तर श्रेणी बनाने पर सिद्ध करो कि
$$(b^2-d^2)(a+b+c)^2=(a^2-c^2)(b+c+d)^2.$$

निम्नलिखित श्रेणियों का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल बताओः—

19. $1+3+7+15+\ldots\ldots$ 20. $1+5+21+85+\ldots\ldots$

21. $2+5+11+41+\ldots\ldots$ 22. $5+7+11+19+\ldots\ldots$

23. $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$

निम्नलिखित श्रेणियों का अनन्त पद पर्य्यन्त योगफल बताओः—

24. $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots\ldots(x<1).$

25. $1+4x+7x^2+10x^3+\ldots\ldots(x<1).$

26. $1+\frac{3}{5}+\frac{5}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\ldots\ldots$

27. $1-\frac{5}{7}+\frac{9}{7^2}-\frac{13}{7^3}+\ldots\ldots$

28. $a+(a+b)x+(a+2b)x^2+(a+3b)x^3\ldots\ldots(x<1)$

29. $1+7.2x+13.4x^2+19.8x^3+\ldots\ldots(x<\frac{1}{3})$

30. $1-5.3x+9.9x^2-13.27x^3+\ldots\ldots(x<\frac{1}{3})$

निम्नलिखित श्रेणियों का n-संख्यक पद पर्य्यन्त योगफल निकालोः—

31 $2+22+222+\ldots\ldots$ 32. $5+55+555+\ldots\ldots$

33. $\cdot7+\cdot77+\cdot777+\ldots\ldots$

34. एक वस्तु पहले मिनट में 100 गज़, दूसरे मिनट में 60 गज़, तीसरे मिनट में 36 गज़ चलती है और इसी नियम से चलती रहती है। इस प्रकार उसके प्रति मिनट की चाल का वेग गुणोत्तर श्रेणी बनाता है। सिद्ध करो कि अनन्तकाल तक चलने पर भी वह वस्तु 250 गज़ से अधिक न जा सकेगी।

35. एक व्यक्ति ने किसी परोपकारी संस्था में पहले मास में 1000 रु० और बाद के प्रत्येक मास में उसके पहले मास का आधा चन्दा देना स्वीकार किया। सिद्ध करो कि उसके चन्दे की कुल रक़म 2000 रु० से अधिक नहीं हो सकती।

36. एक आदमी ने एक साधु को पहले दिन 2 कौड़ियाँ दान कीं और तत्पश्चात् प्रति दिन उसके पहले दिन की दूनी कौड़ियाँ देना स्वीकार किया। बताओ 30 दिन में उसने साधु को कुल कितने रुपये दान में दिये। (1 पैसा = 20 कौड़ी)। (लीलावती)

——:o:——

बत्तीसवाँ अध्याय

विविध सिद्धान्त-माला

तादात्म्य सम्बन्धी सिद्धान्त।

388. सिद्धान्त I.

यदि x के कोई पूर्णाङ्क फल (Integral Function, अनु० 228) और 0 से कोई तादात्म्य बना हो, तो x के प्रत्येक घात का गुणक 0 होगा।

मान लो कि, $f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n \equiv 0$ एक तादात्म्य है।

सिद्ध करना है कि $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots a_n = 0$.

चूँकि $f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n \equiv 0$ एक तादात्म्य है, इसलिए x के प्रत्येक मान के साथ उसके फल का मान शून्य होगा।

इस तादात्म्य में $x=0$ लिखने से, $a_0 = 0$.

$\therefore \quad a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n \equiv 0;$

$\therefore \quad a_1 + a_2x + \ldots\ldots + a_nx^{n-1} \equiv 0.$

इस तादात्म्य में $x=0$ लिखने से, $a_1 = 0$.

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि $a_2 = 0 = \ldots\ldots = a_n;$

अतएव, $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 0$.

389. सिद्धान्त II.

x के दो पूर्णाङ्क फलों के सर्वथा समान या बिलकुल बराबर (Identically equal) होने पर दोनों फलों के समघात के दोनों गुणक परस्पर समान होंगे।

मान लो कि, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$

$$\equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_nx^n.$$

पक्ष-परिवर्त्तन करने से,

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots\ldots+(a_n-b_n)x^n\equiv 0.$$

अतएव सिद्धान्त I के अनुसार,

$$a_0-b_0=a_1-b_1=a_2-b_2=\ldots\ldots=a_n-b_n=0;$$

$$\therefore\quad a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ldots\ldots,\ a_n=b_n.$$

उदाहरण 1. m और n का मान कितना हो कि $(x-m)^2+(x-n)^2$ और $2x^2-14x+25$ तादात्म्य परस्पर सर्वथा समान (Identical) हों।

$$(x^2-2mx+m^2)+(x^2-2nx+n^2)\equiv 2x^2-14x+25,$$

एक तादात्म्य है,

या, $\quad 2x^2-2(m+n)x+m^2+n^2\equiv 2x^2-14x+25;$

$\therefore\quad m+n=7,\ \ m^2+n^2=25$ [सिद्धान्त II के अनुसार]

$\therefore\quad m=4,\ n=3,\quad$ या, $m=3,\ n=4.$

उदाहरण 2. a का मान कितना होने पर $x^2+5xy+6y^2+3x+7y+a$ व्यंजक का दो घात गुणनखण्डों में विश्लेषण किया जासकेगा?

चूँकि $x^2+5xy+6y^2=(x+2y)(x+3y)$, इसलिए दोनों एक घात गुणनखण्ड $x+2y+m$ और $x+3y+n$ आकार के होंगे (अनु० 212 देखो।)

अतएव,

$$(x+2y+m)(x+3y+n)\equiv x^2+5xy+6y^2+3x+7y+a,$$

या, $\quad x^2+5xy+6y^2+(m+n)x+(3m+2n)y+mn$

$$\equiv x^2+5xy+6y^2+3x+7y+a,$$

या, $\quad (m+n)x+(3m+2n)y+mn\equiv 3x+7y+a.$

अतः दोनों पक्षों के x के दोनों गुणकों, y के दोनों गुणकों और अचल राशियों को समानता-चिह्न से युक्त करने से,

$$m+n=3,\ 3m+2n=7,\ mn=a$$

पहले दोनों समीकरणों से, $\quad m=1,\ n=2,$

$$\therefore\quad a=mn=2.$$

प्रश्नावली 146.

1. m और n का मान कितना होने पर $(x-m)^2+(x+n)^2$ और $2x^2+2x+13$ मिलकर सर्वथा सम (Identical) तादात्म्य होंगे ?
2. A, B और C का मान कितना होने पर $A(x+1)^2+B(x+2)+C$ और $2x^2+7x+12$ सर्वथा सम तादात्म्य होंगे ?
3. c का मान कितना होने पर $x^2-4y^2+2x+8y-c$ व्यंजक का दो एक घात गुणनखण्डों में विश्लेषण किया जा सकेगा ?
4. a का मान कितना होने पर $6x^2-6y^2-5xy+x+5y-a$ व्यंजक का दो एक घात गुणनखण्डों में विश्लेषण किया जा सकेगा ?
5. a का मान कितना होने पर $4x^2+9y^2-12xy+28x-42y+a$ व्यंजक एक पूर्ण वर्ग होगा ?
6. यदि x^2+mx+n और $x^2+m'x+n'$ का एक साधारण गुणनखण्ड हो, तो सिद्ध करो कि $(n-n')^2=(m'-m)(mn'-m'n)$.
7. यदि x^3+mx+n और $x^3+m_1x+n_1$ का एक साधारण गुणनखण्ड हो, तो सिद्ध करो कि $(n-n_1)^2=(m_1-m)^2(mn_1-m_1n)$.

390. सिद्धान्त ।

किसी भी संख्या की वास्तविक (Real) राशियों के वर्ग का योग 0 होने पर राशियों में से प्रत्येक 0 होगी ।

राशियों के वास्तविक होने के कारण उन सब के वर्ग धनात्मक होंगे (अनु० 320); अतएव कुछ वास्तविक राशियों का योग 0 होता है किन्तु प्रत्येक धनात्मक राशियों के 0 न होने पर उनका योग 0 नहीं हो सकता । अतएव उक्त धनात्मक राशियों में से प्रत्येक अर्थात् उक्त वास्तविक राशियों में से प्रत्येक का वर्ग 0 होगा; अतएव वास्तविक राशियों में से भी हर एक 0 होगी ।

उदाहरण 1. यदि a, b, c तीनों वास्तविक राशियाँ हों, और $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$ हो, तो $a=b=c$ होगा ।

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0;$$

$\therefore\ b-c=0,\ c-a=0,$ और $a-b=0$, अर्थात् $a=b=c$.

उदाहरण 2. यदि $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$ हो तो सिद्ध करो कि, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

यहाँ $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$,

या, $a^2(y^2+z^2)+b^2(z^2+x^2)+c^2(x^2+y^2)=2abxy+2acxz+2bcyz$;

पक्ष-परिवर्त्तन करने और आवश्यकतानुसार पुंज में रखने से,

$$(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2acxz+a^2z^2)=0,$$

या, $(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=0$

अतएव, $ay-bx=0$; $\therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$,

$bz-cy=0$; $\therefore \frac{y}{b}=\frac{z}{c}$,

$cx-az=0$, $\therefore \frac{z}{c}=\frac{x}{a}$,

अतएव, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

प्रश्नावली 147.

नीचे के प्रश्नों में राशियों को वास्तविक धनात्मक मानना होगा ।

1. यदि $(a+b)^2+(c+d)^2=4(ab+cd)$ हो, तो $a=b$, $c=d$.
2. यदि $(a+b)^2+(b+c)^2=4b(a+c)$ हो, तो $a=b=c$.
3. यदि $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=4(ab+bc+cd)$ हो, तो $a=b=c=d$.
4. यदि $x^2+y^2+z^2+u^2+3=2(x+y+z)$ हो, तो $x=y=z=1$, $u=0$.
5. यदि $3x^2+5y^2+2z^2=6xy+4yz$ हो, तो $x=y=z$.
6. हल करो:— $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$.
7. यदि $a^2+b^2+18=(3+a)(3+b)$ हो, तो a और b का मान बताओ ।
8. हल करो:— $(x+2a)^2+y^2=0$.

असाम्यता (Inequality)

391. कोई धनात्मक राशि किसी दूसरी राशि से छोटी है या बड़ी, यह असाम्यता के द्वारा प्रकट किया जाता है।

$5>4$, $a<x$ आदि असाम्यता के उदाहरण हैं।

392. कुछ उपयोगी फल।

नीचे दिये हुए फल स्वयंसिद्ध हैं। इनकी सहायता से कई प्रकार की असाम्यताएँ सिद्ध की जाती हैं। फलों में अक्षरों को वास्तविक धनात्मक राशियाँ माना गया है।

(1) $x>y$ होने पर $y<x$.

(2) $x>y$ होने पर $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.

(3) $x>y$ होने पर $-x<-y$.

(4) $x>y$ होने पर $x^n>y^n$.

(5) $x>y$ होने पर $x+a>y+a$.

(6) $x>y$ होने पर $x-a>y-a$.

(7) $x>y$ होने पर $xa>ya$.

(8) $x>y$ होने पर $\frac{x}{a}>\frac{y}{a}$.

(9) $x_1>y_1$, $x_2>y_2$, $x_3>y_3$......होने पर,

(i) $x_1+x_2+x_3+......>y_1+y_2+y_3+...$

और (ii) $x_1x_2x_3..............>y_1y_2y_3........$

इसी प्रकार $x<y$ होने पर संगत फल अर्थात् $xa<ya$, $-x>-y$, इत्यादि फल पाये जाते हैं।

393. यह सरलतापूर्वक ही ज्ञात हो जाता है कि $x>y$ होने पर $x-y$ धनात्मक होगी और $x<y$ होने पर $x-y$ ऋणात्मक होगी। अतएव $x-y$ को धनात्मक प्रमाणित कर सकने पर $x>y$ असाम्यता और उसे ऋणात्मक प्रमाणित कर सकने पर $x<y$ असाम्यता प्रमाणित होंगी।

उदाहरण 1. यदि a और b दोनों वास्तविक और असमान राशियाँ हों, तो सिद्ध करो कि $a^2+b^2>2ab$.

इस स्थल में, $(a^2+b^2)-(2ab)=a^2-2ab+b^2$,

$=(a-b)^2$ एक धनात्मक राशि है ।

$\therefore\quad a^2+b^2>2ab$.

टीका 1. $a=b$ होने पर, $a^2+b^2=2ab$ होता है । अतएव a^2+b^2 कभी भी $2ab$ से छोटा नहीं हो सकता ।

टीका 2. x और y दोनों के वास्तविक धनात्मक राशि होने पर $\sqrt{x}$ और $\sqrt{y}$ वास्तविक राशियाँ होंगी । अतएव $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ भी वास्तविक होगी; इसलिए $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ धनात्मक राशि होगी ।

यहाँ $(x+y)-(2\sqrt{x}\sqrt{y})=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ एक धनात्मक राशि है ।

$\therefore\quad x+y>2\sqrt{xy}$, या $\dfrac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$;

अर्थात् दो धनात्मक राशियों के समान्तरीय मध्यमान उनके गुणोत्तर मध्यमान से बड़े होते हैं ।

उदाहरण 2. यदि x एक वास्तविक धनात्मक राशि हो, तो सिद्ध करो कि

$$x^n+\frac{1}{x^n}>2.$$

$(x^n-1)^2$ एक धनात्मक राशि है अर्थात् $(x^n-1)^2>0$,

या, $x^{2n}-2x^n+1>0$,

या, $x^{2n}+1>2x^n$, [दोनों पक्षों में $2x^n$ जोड़ने से]

या, $\dfrac{x^{2n}+1}{x^n}>2$, [दोनों पक्षों को x^n से भाग करने से]

या, $x^n+\dfrac{1}{x^n}>2$.

टीका 1. $x=1$ होने पर $x^n+\dfrac{1}{x^n}=2$ होता है ।

उदाहरण 3. यदि a, b, c तीनों वास्तविक राशियाँ हों, तो सिद्ध करो कि,

$$a^2+b^2+c^2>2(bc-ca+ab).$$

यहाँ $(a^2+b^2+c^2)-2(bc-ca+ab)$
$$=a^2+b^2+c^2-2bc+2ca-2ab$$
$=(a-b+c)^2$, एक धनात्मक राशि है;

$$\therefore \quad a^2+b^2+c^2>2(bc-ca+ab).$$

उदाहरण 4. यदि a, b, c तीनों वास्तविक, धनात्मक तथा असमान राशियाँ हों, तो सिद्ध करो कि,

$$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc.$$

$$b+c>2\sqrt{bc},\ c+a>2\sqrt{ca},\ a+b>2\sqrt{ab},$$

[टीका 2, उदा० 1]

$\therefore\ (b+c)(c+a)(a+b)>2\sqrt{bc}.\,2\sqrt{ca}.\,2\sqrt{ab}$ अर्थात् $>8abc$.

अब, $a=b=c$ होने पर, यह असाम्यता $(b+c)(c+a)(a+b)=8abc$ असाम्यता में परिवर्त्तित हो जाती है ।

394. महत्तम या अधिकतम (Maximum) और अल्पतम (Minimum) मान ।

उदाहरण 1. $16+4x-x^2$ व्यंजक का अधिकतम मान बताओ ।

x के भिन्न भिन्न मान लेने से दिये हुए व्यंजक के जितने मान पाये जाते हैं उनमें से जो बड़ा होता है उसी का निर्णय करना होगा ।

$$16+4x-x^2=20-(4-4x+x^2)$$
$$=20-(x-2)^2;$$

x के वास्तविक राशि होने पर $(x-2)^2$ कभी ऋणात्मक नहीं हो सकता । अतएव x का मान चाहे कोई भी वास्तविक राशि क्यों न हो, व्यंजक का मान कभी 20 से बड़ा नहीं हो सकता । स्पष्ट ज्ञात होता है कि $x=2$ होने पर व्यंजक का मान 20 होता है; अतएव ज्ञात हुआ कि व्यंजक का मान 20 हो सकता है किन्तु 20 से बड़ा नहीं हो सकता । इसलिए व्यंजक का अधिकतम मान 20 है ।

उदाहरण 2. x^2+4x+8 व्यंजक का अल्पतम मान बताओ ।

x के भिन्न भिन्न मान स्वीकार करने पर दिये हुए व्यंजक के जितने सारे मान पाये जाते हैं उनमें से जो सबसे छोटा होगा उसका निर्णय करना है ।

दिया हुआ व्यंजक $=(x+2)^2+4$.

$(x+2)^2$ कभी ऋणात्मक नहीं हो सकता; अतएव व्यंजक का मान कभी भी 4 से कम न होगा । किन्तु $x=-2$ होने पर व्यंजक का मान 4 होता है ।

$\therefore$ व्यंजक का अल्पतम मान 4 है ।

उदाहरण 3. यदि दो धनात्मक राशियों का योगफल स्थिर रहे तो परस्पर समान होने पर उनका गुणनफल बृहत्तम होगा; किन्तु गुणनफल स्थिर रहने पर उनका योगफल लघुतम होगा ।

मान लो कि x और y दोनों धनात्मक राशियाँ हैं, S उनका योगफल और P उनका गुणनफल है ।

यहाँ $\quad 4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$,

अर्थात् $\quad 4P=S^2-(x-y)^2 \qquad$ ....(1)

और $\quad S^2=4P+(x-y)^2 \qquad$ ... .(2)

(1) से ज्ञात होता है कि $S=(x+y)$ का मान स्थिर होने के कारण जब $x=y$ है, तो P बृहत्तम है क्योंकि उस समय घटाई गई धनात्मक संख्या का मान 0 होता है । इसी प्रकार (2) से ज्ञात होता है कि P का मान स्थिर रहने पर जब $x=y$ होता है, तो S लघुतम होता है ।

पहले सिद्धान्त के अनुसार ज्ञात हुआ कि,

$x=y=\frac{S}{2}=\frac{x+y}{2}$ होने पर xy का मान बृहत्तम होता है । ......(A)

टीका 1. इसी प्रकार संख्या में अधिक धनात्मक राशियाँ लेकर उनमें से प्रत्येक दो में सिद्धान्त (A) प्रयोग करके सिद्ध किया जाता है कि राशियों का योगफल स्थिर होने पर जब राशियाँ परस्पर समान होंगी तभी उनका गुणनफल बृहत्तम होगा ।

मान लो कि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$, n-संख्यक धनात्मक राशि हैं। उस दशा में गुणनफल $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$ है, गुणनफल $x_1x_2x_3\ldots\ldots x_n$ बृहत्तम है।

$$\therefore \quad x_1x_2x_3\ldots\ldots x_n < \left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)^n,$$

या $$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} > (x_1x_2x_3\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

प्रश्नावली 148.

राशियों को वास्तविक, धनात्मक और असमान मानकर सिद्ध करो कि,

1. $x^2 - xy + y^2 > xy$.

2. $a^3 + b^3 > ab(a+b)$.

3. $a^3 + \frac{1}{a^3} > 2$. 4. $a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}$.

5. $a^n + \frac{1}{a^n} > a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}$ (यदि $n > 1$ हो)।

6. $x^2 + y^2 + z^2 > yz + zx + xy$.

7. $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) > (b+c)(c+a)(a+b)$.

8. $x^2 + y^2 + z^2 > 2(xy - yz + zx)$.

9. $a > b > c$ होने पर $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ एक धनात्मक राशि है।

10. $a > b > c$ होने पर $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(c-b)$ एक धनात्मक राशि है।

11. $a > b > c$ होने पर, $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$ एक धनात्मक राशि है।

12. $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) > 6abc$.

13. $a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$.

14. $a^4+b^4+c^4+d^4>4abcd.$

15. $a_1{}^n+a_2{}^n+a_3{}^n+\ldots+a_n{}^n>na_1a_2\ldots a_n$

16. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)>27a^2b^2c^2.$

17. निम्नलिखित व्यंजकों का अधिकतम मान बताओ :—

(i) $20-2x^2-3x.$ (ii) $-3x^2+4x+7.$

18. निम्नलिखित व्यंजकों का अल्पतम मान निकालो :—

(i) $x^2+6x+10.$ (ii) $3-4x+2x^2.$

लुप्तीकरण (Elimination).

395. लुप्तीकरण प्रणाली।

कुछ समीकरणों से एक या एक से अधिक बीजीय राशियों का लुप्तीकरण करने के लिए उन समस्त समीकरणों से वह राशि-रहित एक समीकरण बनाना होता है। प्राप्त हुए समीकरण को अपनीत (Eliminant) कहते हैं।

जैसे, $x+a=0$ और $3x+2b=0$, इन दोनों समीकरणों से x का लुप्तीकरण करते समय इनकी सहायता से एक ऐसा समीकरण बनाना होगा जिसमें x नहीं रहेगा। यहाँ पहले समीकरण से $x=-a$, और दूसरे समीकरण से $x=-\frac{2}{3}b$. x के इन दोनों मानों से समीकरण $a=\frac{2}{3}b$, अर्थात् $3a-2b=0$ बनता है। यह समीकरण दो समीकरणों से बनाया गया है और इसमें x नहीं है। अतएव यही निर्णेय अपनीत है। इसे उक्त दोनों समीकरणों का x-अपनीत (x-eliminant) कहते हैं।

$x+a=0$ और $3x+2b=0$ समीकरणों में से पहले से x का एक मान पाया जाता है और दूसरे से x का एक मान पाया जाता है। अतएव इन दोनों मानों के परस्पर समान होने पर दोनों समीकरण एक साथ सिद्ध होते हैं, अन्यथा नहीं। यहाँ दोनों मानों को समभित करने पर उक्त दोनों समीकरणों से x-अपनीत पाया जाता है। अतएव x-अपनीत दोनों समीकरणों के एक साथ सिद्ध होने की शर्त है।

यहाँ यह देखने में आता है कि एक राशि के लुप्तीकरण के लिए दो शर्तों की आवश्यकता पड़ती है। साधारणतः अपनीत राशियों की संख्या की अपेक्षा दिये हुए समीकरणों की संख्या का 1 अधिक होना आवश्यक है। जैसे दो राशियों के लुप्तीकरण के लिये तीन समीकरण आवश्यक हैं। कारण यह है कि तीन समीकरणों में से दो से दो अपनीत का मान निकालकर तीसरे में बैठालने से अपनीत समीकरण पाया जायगा। इसी प्रकार तीन राशियों का लुप्तीकरण करने के लिए चार समीकरण आवश्यक होते हैं और चार के लुप्तीकरण के लिए पाँच आवश्यक होते हैं, आदि।

दिये हुए समीकरण अपनीत राशि समूह के समघाती (Homogeneous) समीकरण होने पर समीकरणों की संख्या की अपेक्षा 1 अधिक न होकर समान होने पर भी काम चल सकता है।

जैसे, x और y के केवल दो समघाती समीकरण हैं, जैसे $3x+ay=0$ और $bx+7y=0$ के ही x और y का लुप्तीकरण किया जाता है; तीन समीकरण आवश्यक नहीं होते हैं। दोनों समीकरणों को y से भाग करने पर,

$$3\frac{x}{y}+a=0, \quad b\frac{x}{y}+7=0.$$

यहाँ $\frac{x}{y}$ को केवल एक अपनीत राशि मानकर अन्त में कहे गये दोनों समीकरणों से उसका लुप्तीकरण किया जाता है। इस प्रकार अपनीत $ab=21$.

396. नीचे के उदाहरणों में लुप्तीकरण सम्बन्धी कुछ विशेष प्रणालियाँ दी गई हैं।

उदाहरण 1. $px+q=0$ और $p'x+q'=0$ में से x का लुप्तीकरण करो।

दोनों समीकरणों में से पहले से $x=-\frac{q}{p}$,

और दूसरे से, $x=-\frac{q'}{p'}$;

x के दोनों मानों को समभित करने से, $\frac{q}{p}=\frac{q'}{p'}$; या $pq'-p'q=0$.

उदाहरण 2. नीचे के दोनों समीकरणों से x और y का लुप्तीकरण करो।

$$a_1x+b_1y=0,$$
$$a_2x+b_2y=0.$$

ये x और y के समघाती समीकरण हैं; अतएव इनका लुप्तीकरण करने के लिए ये दो समीकरण ही यथेष्ट हैं।

दोनों समीकरणों को y से भाग करने पर,

$$a_1\frac{x}{y}+b_1=0,$$

और $$a_2\frac{x}{y}+b_2=0.$$

इन दोनों समीकरणों से उदाहरण 1 की प्रक्रिया के अनुसार $\frac{x}{y}$ लुप्त करने से,

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

उदाहरण 3. नीचे दिये तीनों समीकरणों में से x, y और z का लुप्तीकरण करो:—

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0.$$

अन्त के दोनों समीकरणों से वज्र-गुणन द्वारा,

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}=k \text{ मान लो;}$$

[अनु० 263]

$$\therefore\quad x=k(b_2c_3-b_3c_2),\ y=k(c_2a_3-c_3a_2),$$
$$z=k(a_2b_3-a_3b_2);$$

x, y और z के बदले इन मानों को पहले समीकरण में लिखने से,

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$$

उदाहरण 4. नीचे के दोनों समीकरणों में से x का लुप्तीकरण करो:—

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0,$$
$$a_2x^2+b_2x+c_2=0.$$

वज्र-गुणन द्वारा,

$$\frac{x^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{x}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1};$$

$\therefore \quad x^2 = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ और $x = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$;

$\therefore \quad \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \left(\dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2$;

$\therefore \quad (c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1).$

उदाहरण 5. नीचे के समीकरणों से x का लुप्तीकरण करो :--

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) को x से गुणा करने से,

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) को a_1 और (3) को a_2 से गुणा करने और प्राप्त हुए दोनों गुणनफलों में से एक को दूसरे से घटाने से,

$$a_2b_1x^2 + (a_2c_1 - a_1b_2)x - a_1c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(1) और (4) से वज्र-गुणन द्वारा,

$$\frac{x^2}{-a_1b_1c_2 - c_1(a_2c_1 - a_1b_2)} = \frac{x}{a_2b_1c_1 + a_1^2c_2}$$

$$= \frac{1}{a_1(a_2c_1 - a_1b_2) - a_2b_1^2};$$

$\therefore \quad (a_2b_1c_1 + a_1^2c_2)^2$

$$= \{a_1b_1c_2 + c_1(a_2c_1 - a_1b_2)\}\{a_2b_1^2 - a_1(a_2c_1 - a_1b_2)\}.$$

उदाहरण 6. नीचे दिये तीन समीकरणों में से x, y और z का लुप्तीकरण करो :—

$$\frac{x}{y+z} = a, \quad \frac{y}{z+x} = b; \quad \frac{z}{x+y} = c.$$

पहले समीकरण से $x = a(y+z)$;

$\therefore \quad x + y + z = a(y+z) + (y+z) = (y+z)(a+1)$;

$$\therefore \quad \frac{1}{a+1} = \frac{y+z}{x+y+z}.$$

इसी प्रकार $\dfrac{1}{b+1} = \dfrac{z+x}{x+y+z}$, $\quad \dfrac{1}{c+1} = \dfrac{x+y}{x+y+z}$,

$$\therefore \quad \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2, \text{ निर्णय अपनीत ।}$$

उदाहरण 7. $l^3x+m^3y=a$, $l^2+m^2=1$ और $-lx+my=0$, इन तीनों समीकरणों में से l और m का लुप्तीकरण करो ।

पहला और तीसरा समीकरण निम्नलिखित आकार में लिखे जा सकते हैं ।

$$\left.\begin{array}{r} l^3x+m^3y-a=0 \\ -lx+my+0=0 \end{array}\right\}$$

वज्रगुणन द्वारा,

$$\frac{x}{am}=\frac{y}{al}=\frac{1}{l^3m+lm^3};$$

$$\therefore \quad \frac{am}{x}=\frac{al}{y}=lm(l^2+m^2)$$

$$=lm,$$

(क्योंकि दूसरे समीकरण से $l^2+m^2=1$,)

$$\therefore \quad \frac{a}{x}=l, \quad \frac{a}{y}=m,$$

$$\therefore \quad \frac{a^2}{x^2}+\frac{a^2}{y^2}=l^2+m^2=1;$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}.$$

प्रश्नावली 149.

निम्नलिखित समीकरणों में x का लुप्तीकरण करो :

1. $\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1=0 \\ a_2x+b_2=0 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} a_1x^2+b_1x+c_1=0 \\ a_2x+b_2=0 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \\ b_1x+c_1=0 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} x^3+px+q=0 \\ x^2+rx+s=0 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r} x+\frac{1}{x}=p+q \\ x-\frac{1}{x}=p-q \end{array}\right\}$

6 $\left.\begin{array}{r} px+\frac{q}{x}=m \\ qx+\frac{p}{x}=n \end{array}\right\}$

निम्नलिखित समीकरणों में से x और y का लुप्तीकरण करो :

7. $\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{aligned}\right\}$ 8. $\left.\begin{aligned} x+y=l \\ x^2+y^2=m \\ x^3+y^3=n \end{aligned}\right\}$

9. $x-y=a, \quad 2xy=b, \quad x^2+y^2=c.$

10. $\left.\begin{aligned} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=0 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=0 \end{aligned}\right\}$

11. $x+y=a, xy=b, x^3+y^3=c.$

12. $lx+my=n, \quad l'x+m'y=n', \quad x^2+y^2=c^2.$

निम्नलिखित समीकरणों में से x, y और z का लुप्तीकरण करो :

13. $\begin{aligned} x=cy+bz \\ y=az+cx \\ z=bx+ay \end{aligned}$ 14. $\left.\begin{aligned} x+y+z=a \\ yz+zx+xy=b \\ x^3+y^3+z^3=c \\ xyz=d \end{aligned}\right\}$

15. $\left.\begin{aligned} ax+hy+gz=0 \\ hx+by+fz=0 \\ gx+fy+cz=0 \end{aligned}\right\}$ 16. $\left.\begin{aligned} \frac{a}{y-z}=x^2 \\ \frac{b}{z-x}=y^2 \\ \frac{c}{x-y}=z^2, \ xyz=d \end{aligned}\right\}$

17. निम्नलिखित समीकरणों में से x, y, z और u का लुप्तीकरण करो:

$$\left.\begin{aligned} x=by+cz+du \\ y=ax+cz+du \\ z=ax+by+du \\ u=ax+by+cz \end{aligned}\right\}$$

18. निम्नलिखित समीकरणों में से x, y और z का लुप्तीकरण करो:

$$b\frac{y}{z}+c\frac{z}{y}=a, \quad c\frac{z}{x}+a\frac{x}{z}=b, \quad a\frac{x}{y}+b\frac{y}{x}=c.$$

19. निम्नलिखित समीकरणों में से x, y और z का लुप्तीकरण करो:--

$$\frac{y-z}{y+z}=a, \frac{z-x}{z+x}=b, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=c.$$

विविध प्रश्नावली VI.

1. यदि $x=11$ हो, तो
$\sqrt[3]{[(x+2)\sqrt{x-2}-2\{\sqrt[3]{11x^2-x+2\sqrt{x-2}}\}]}$ का मान बताओ।

2. $A\times 0$, $0\times A$, $\frac{A}{0}$, $\frac{0}{A}$ और $\frac{0}{0}$ का मान क्या होगा ?

3. गुणा करो :—
   (i) $x^{12}-x^{10}y^2+x^2y^{10}-y^{12}$ को x^2+xy+y^2 से;
   (ii) $\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{4}mn-\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{5}m-\frac{2}{3}n+\frac{1}{4}$ को $\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n-\frac{1}{4}$ से।

4. (i) यदि $p=x+\frac{1}{x}$ और $q=x-\frac{1}{x}$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$p^4+q^4-2p^2q^2=16.$$
   (ii) यदि $x+y=a$ और $xy=b$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$x^4-7x^2y^2+y^4=(a^2-5b)(a^2+b).$$

5. x के घातों को आरोह-क्रम के अनुसार सजाकर,
$x(p+x)\{p^2+q^2-x(p-x)\}-(p^2+qx)(2x^2-qx+q^2)$ को $x^2+(p-q)x-p^2$ से भाग करो।

6. एक सीधी लकड़ी का एक सिरा (8, 0) विन्दु पर और दूसरा सिरा (0, 6) विन्दु पर है; (8, 0) विन्दु पर वर्त्तमान सिरे को (4, 0) विन्दु पर रखने से (0, 6) विन्दु पर वर्त्तमान सिरा y-अक्ष पर कहाँ रहेगा ? इस सिरे को y-अक्ष पर न रखकर यदि $x=-2$ रेखा पर रखा जाय, तो सिरा किस विन्दु पर रहेगा ? लकड़ी के अन्त वाले स्थान का समीकरण बनाओ।

7. सरल करो :—
$$\frac{a(1+b^2)(1+c^2)+b(1+c^2)(1+a^2)+c(1+a^2)(1+b^2)+4abc}{1+bc+ca+ab}$$

8. गुणनखण्ड निकालो :—
   (i) $8abcd-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4a^2b^2+4c^2d^2$;
   (ii) $(b+c)^2-2(b^2+c^2)a^2+(b-c)^2a^4$.

9. यदि $\frac{a}{b-c}, \frac{b}{c-a}$ और $\frac{c}{a-b}$ किसी समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हों, तो सिद्ध करो कि $\frac{a^3+c^3-2b^3}{a^2+c^2-2b^2}=\frac{a+b+c}{2}$.

10. हल करो :—

(i) $\frac{21}{4}\left(\frac{2x}{3}-\frac{5}{18}\right)+\frac{7x-3\frac{1}{4}}{12}=2\frac{19}{144}-\frac{14-15x}{3}$;

(ii) $\frac{x}{\cdot 5}-\frac{1}{\cdot 05}+\frac{x}{\cdot 005}-\frac{1}{\cdot 0005}=0$.

11. एक सम्राट् 30 वर्ष की अवस्था में सिंहासन पर बैठा और अपने जीवन के $\frac{5}{11}$वें अंश के बराबर समय तक राज्य करने के बाद मर गया। बताओ उसने कितने दिनों तक राज्य किया था।

12. सरल करो :—

$$\frac{(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc}.$$

13. यदि $u=x-\frac{1}{x}$ हो, तो सिद्ध करो कि

(i) $x^4+\frac{1}{x^4}=u^4+4u^2+2$;

(ii) $x^4-\frac{1}{x^4}=\pm u(u^2+2)\sqrt{u^2+4}$.

14. $x^8-3x^7-5x^5+2x^4+5x^3+4x^2+1$ में तृतीय की अपेक्षा निम्नतर घात किस व्यंजक को जोड़ने से योगफल x^3+2x-1 से विभाज्य होगा ?

15. यदि मेरी वर्त्तमान आयु के दुगने में से 6 वर्ष पहले की आयु के तिगुने को घटाया जाय, तो अन्तरफल मेरी वर्त्तमान आयु के समान होगा। मेरी वर्त्तमान अवस्था बताओ।

16. सरल करो:—

$$2(z^3+x^3)-[(x+y)(xy-x^2-y^2)-\{2(x+y+z)\times(yz+zx+xy-x^2-y^2-z^2)-(x-y)(x^2+xy+y^2)\}].$$

17. भाग करोः—

(i) $(x^2-1)^4-3(x^2-1)^2+1$ को x^4-3x^2+1 से;

(ii) $1+x^{\frac{9}{8}}$ को $1-x^{\frac{3}{8}}+x^{\frac{3}{4}}$ से।

18. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड बताओः—

(i) a^9+b^9 और a^9-b^9;

(ii) $(a+b)^5-a^5-b^5$.

19. यदि $\dfrac{2a+3b}{x+2y}=\dfrac{2b+3c}{y+2z}=\dfrac{2c+3a}{z+2x}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{5a+9b+11c}{3x+5y+7z}=\frac{8a+7b+10c}{5x+4y+6z}.$$

20. $(2n+3)$-संख्यक सिपाहियों के $(n-1)$ दिन के भोजन की मात्रा और $(2n+1)$-संख्यक सिपाहियों के $(n+1)$ दिन के भोजन की मात्रा का अनुपात $11:15$ है, तो बताओ कि n का मान क्या है।

21. सरल करोः—

(i) $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)\}$;

(ii) $1{\cdot}79\times1{\cdot}79+2{\cdot}42\times1{\cdot}79+1{\cdot}21\times1{\cdot}21$.

22. (i) x का मान -1 से $+2$ तक स्वीकार करके $y=x^2-x$ का लेखाचित्र अङ्कित करो और लेखाचित्र की सहायता से $1-x^2-x$ का मूल निकालो।

(ii) $y=x^2-7x+12$ का लेखाचित्र अङ्कित करो; इस लेखाचित्र की सहायता से (a) $x^2-9x+8=0$ और (b) $x^2-7x+1=0$ समीकरणों को हल करो।

23. हल करोः—

(i) $4(x-a)^3+4(x-b)^3=(2x-a-b)^3$;

(ii) $\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}+\dfrac{x-ab}{a+b}=a+b+c$.

24. 1875 के जन्म-दिवस में एक व्यक्ति की अवस्था की मास-संख्या उसके जन्म की वर्ष-संख्या की आधी है। बताओ उस व्यक्ति ने किस वर्ष जन्म ग्रहण किया था।

25. सरल करोः—

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+b^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+c^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}{a^2\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}.$$

26. सिद्ध करो कि,

$$a^4+b^4+c^4+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$$
$$=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc).$$

27. यदि a, b, c, d एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हों, तो सिद्ध करो कि, $(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2$.

28. यदि $(a^2-4b)^2=64d$ और $c^2=a^2d$ हो, तो x का मान चाहे कुछ भी क्यों न हो, $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ व्यंजक एक पूर्ण वर्ग होगा।

29. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालोः—

(i) $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$;

(ii) $(y+z)(y^2-z^2)+(z+x)(z^2-x^2)+(x+y)(x^2-y^2)$.

30. सरल करोः—

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}.$$

31. हल करोः—

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x+y+z}+\frac{1}{2x+3y+7z}+\frac{1}{3x+5y+9z}+6=0\\ \frac{3}{2x+3y+7z}+\frac{7}{3x+5y+9z}+\frac{2}{x+y+z}+19=0\\ \frac{9}{3x+5y+9z}+\frac{3}{x+y+z}+\frac{5}{2x+3y+7z}+28=0\end{aligned}\right\}.$$

32. दो अङ्कों से बनी हुई किसी संख्या का एक अङ्क दूसरे अङ्क से 5 अधिक है। अङ्कों को उलट कर लिखने से जो संख्या बनती है वह पहली संख्या की $\frac{3}{8}$ है। बताओ वह संख्या कौनसी है।

33. हल करो :—

(i) $\frac{1}{x+3}+\frac{4}{x+4}+\frac{6}{x+6}=\frac{11}{x+5}$.

(ii) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+6x+8}+\frac{1}{x^2+4x+3}$.

34. एक आदमी ने कुछ अंडों के आधे पैसे में 2 के हिसाब से और बाक़ी आधे पैसे में 3 के हिसाब से ख़रीद कर 2 पैसे में 5 के हिसाब से बेच डाले। इस क्रय-विक्रय में उसको 1 पैसे की हानि हुई; बताओ उसने कुल कितने अंडे ख़रीदे थे।

35. सरल करो:—

$$\frac{b+c}{2bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{2ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{2ab}(a^2+b^2-c^2).$$

36. A और B दो आदमी क्रम से C और D स्थानों से एक ही समय साइकिल से एक दूसरे की ओर चले। A ने 10 मील प्रति घंटा की चाल से 2 घं० चलने के बाद 1 घं० तक विश्राम किया। बाद को 12 मील प्रति घंटा की चाल से 2 घं० तक चलता रहा। तब B से उसकी मुलाक़ात हुई। यदि B समान वेग से चला हो और C से D की दूरी 80 मील हो, तो बताओ B किस वेग से चल रहा था। इसको एक लेखाचित्र द्वारा निकालो।

37. हल करो:—

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

38. सिद्ध करो कि,

$$\frac{(3abc-2b^3-a^2d)^2+4(ac-b^2)^3}{(3bcd-2c^3-ad^2)^2+4(bd-c^2)^3}=\frac{a^2}{d^2}.$$

39. सरल करो:—

$$\frac{1}{a+b}+\frac{2b}{a^2+b^2}+\frac{4b^3}{a^4+b^4}+\frac{8b^7}{a^8-b^8}.$$

40. एक थैली में कुछ चवन्नियाँ थीं । उनमें से आधी निकाल लेने के बाद जितनी चवन्नियाँ शेष रह गईं उनकी संख्या थैली में पहले जितनी चवन्नियाँ थीं उनके बराबर के रुपयों की संख्या से 30 अधिक है । बताओ थैली में पहले कुल कितनी चवन्नियाँ थीं ।

41. हल करो :—

$$(a-1)(1+x+x^2) = (a+1)(1+x^2+x^4).$$

42. x का मान -3 से $+3$ तक ग्रहण करके $y=x^2$ का एक लेखाचित्र खींचो और उसकी सहायता से $\sqrt{5}$ का मान दशमलव के पहले स्थान तक निकालो ।

43. 15 और 42 के बीच कितने समान्तर मध्यमान बैठाने पर तीसरा और छटवाँ मध्यमान का अनुपात $8:11$ होगा ।

44. यदि किसी संख्या को दो पूर्ण वर्गों के योगफल के रूप में प्रकट करना सम्भव हो, तो उस संख्या के वर्ग को भी दो पूर्ण वर्गों के योगफल के रूप में प्रकट करना सम्भव होगा । सिद्ध करो ।

$(34)^2$ को दो पूर्ण वर्गों के योगफल के रूप में प्रकट करो ।

45. हल करो:—

$$\left.\begin{aligned} (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z&=0 \\ x+y+z &= 2(a+b+c) \\ \frac{x}{b+c}+\frac{y}{c+a}+\frac{z}{a+b}&=3. \end{aligned}\right\}$$

46. किसी स्थान को जाने के विचार से यात्रा करके a मील तक A और B साथ साथ चलते रहे । उसके बाद A किसी कारण-विशेष से लौट आने के लिए बाध्य हुआ और पहले जिस वेग से वह चल रहा था उसके दूने वेग से चल कर घर पहुँचा और तुरन्त ही फिर चल खड़ा हुआ । इस बार अपनी सब से पहले की चाल का $\frac{m}{n}$ गुना चलता हुआ निर्दिष्ट स्थान पर पहुँच कर उसने B को पकड़ लिया । A के लौट आने के बाद से B ने बाक़ी रास्ता $\frac{n}{m}$ गुना वेग से चल कर काटा था । बताओ यात्रा-स्थान से गन्तव्य-स्थान की दूरी कितनी थी ।

47. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालो :—

(i) $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$;

(ii) $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

48. सिद्ध करो कि, $(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)+(a+b)^2(a-b)$
$=(a+1)^2(b-c)+(b+1)^2(c-a)+(c+1)^2(a-b)$.

49. हल करो :—

(i) $\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^2=\dfrac{ax+2b}{ax+2c}$;

(ii) $(x-1)(x-5)(x-7)(x-9)$
$=(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)$.

50. यदि

$$a(b-c)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)+b(c-a)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)+c(a-b)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=0$$

हो, तो सिद्ध करो कि

$$x(y-z)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y(z-x)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+z(x-y)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0.$$

51. (i) यदि $x+\dfrac{1}{x}=y$ हो, तो $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ का मान y द्वारा प्रकाशित करो ।

(ii) यदि $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a$ हो, तो

$$\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+20$$

का मान a द्वारा प्रकाशित करो ।

52. निम्नलिखित दोनों व्यंजकों को दो वर्गों के रूप में प्रकट करो:—

(i) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)$;

(ii) $(x^2+y^2+z^2+2xy)^2-2(x+y)^2z^2$.

53. यदि $a-b=0$ हो, तो
$(ma-nb)(mb-nc)(mc-na)+(na-mb)$
$\times(nb-mc)(nc-ma)$ का मान बताओ ।

54. (i) x का मान कितना होने पर $x^5-8x^3+11x^2+7x-1789$ व्यंजक x^2+7x-1 से विभाज्य होगा ?

(ii) x का ऐसा मान ज्ञात करो कि उससे $6x^4-2x^3+9x^2+9x-4$ और $9x^4+80x^2-9$ दोनों व्यजकों में से हर एक का मान 0 हो ।

55. सरल करो :—

$$\left\{(1+x)^2 \div \left(1+\cfrac{x}{1-x+\cfrac{x}{1+x+x^2}}\right)\right\}+(x^3-1).$$

56. -3 से $+5$ तक x के भिन्न भिन्न मान द्वारा x^2-3x+1 का एक लेखाचित्र खींचों । x का मान कितना होने पर व्यंजक का मान 0 होगा, यह उस लेखाचित्र से निर्णय करो ।

57. हल करो :—

(i) $\dfrac{x+a^2+2bc}{b-c}+\dfrac{x+b^2+2ca}{c-a}+\dfrac{x+c^2+2ab}{a-b}=0$;

(ii) $\dfrac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\dfrac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\dfrac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=2(a+b+c).$

58. यदि $\dfrac{x+5y}{3x+y}=\frac{4}{3}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{103}{301}.$

59. यदि $x^2-yz=a,\ \ y^2-zx=b,\ \ z^2-xy=c$ और $yz+zx+xy=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{abc}{(a+b+c)^3}=\dfrac{xyz}{(x+y+z)^3}.$

60. यदि $x=\dfrac{2mp}{a^2+m^2}$ और $y=\dfrac{2mq}{a^2-m^2}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{p^2}{x^2}-\dfrac{q^2}{y^2}=a^2.$

61. हल करो:— $x^4+(x+1)^4=97.$

62. (i) x का मान किस सीमा में होने पर x^2-x-2 व्यंजक का मान ऋणात्मक होगा ?

(ii) 0 से 4 तक x के भिन्न भिन्न मान लेकर $y=x^2-4x+5$ का लेखाचित्र खींचो और इस लेखाचित्र से y का अल्पतम (minimum) मान निकालो।

63. सिद्ध करो कि,

(i) $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+8abc$
$$=(a+b+c)\ (2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2);$$

(ii) $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$$=(x+y+z)^3-24xyz.$$

64. सिद्ध करो कि,
$$\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}-\left(\frac{p}{r}+\frac{q}{p}+\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{p-q}{r}\right)\left(\frac{q-r}{p}\right)\left(\frac{r-p}{q}\right).$$

65. यदि $\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)(b^2-c^2)+\frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)(c^2-a^2)$
$$+\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)(a^2-b^2)=0$$

हो, तो सिद्ध करो कि,
$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(y^2-z^2\right)+\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(z^2-x^2\right)$$
$$+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(x^2-y^2)=0.$$

66. हल करो :—
$$\left.\begin{aligned}\frac{a-b}{x}+\frac{a+b}{y}&=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\\ \frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}&=2\end{aligned}\right\}.$$

67. एक मुनीम ने x आ० y पा० के स्थान पर भूल से x रु० y आ० लिख दिया, जिससे उसके हिसाब में 14 रु० 8 आ० 4 पा० का अन्तर पड़ गया। बताओ x और y का मान क्या है।

[संकेतः— x और y पूर्ण संख्या हैं।]

68 हल करो:—

(i) $\left(\frac{2x+a+c}{2x+b+c}\right)^2=\frac{x+a}{x+b}$; (ii) $16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3=\frac{a+x}{a-x}$,

(iii) $\frac{(x+a)(x+b)}{x-c-d}=\frac{(x+c)(x+d)}{x-a-b}$.

69. पिता की अवस्था अपने ज्येष्ठ पुत्र की अवस्था की 4 गुनी और कनिष्ठ पुत्र की अवस्था की 5 गुनी है। ज्येष्ठ पुत्र की अवस्था जब वर्त्तमान् अवस्था की 3 गुनी होगी तब पिता की अवस्था कनिष्ठ पुत्र की अवस्था के दुगने से 3 वर्ष अधिक होगी। बताओ पिता और उसके दोनों पुत्रों की वर्त्तमान् अवस्था क्या है।

70. सरल करो:— $\left\{\frac{(9^{n+\frac{1}{4}})\times\sqrt{3\,.\,3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$.

71. यदि $xy^{p-1}=a$, $xy^{q-1}=b$ और $xy^{r-1}=c$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q}=1$.

72. निम्नलिखित तीनों व्यञ्जकों का वर्गमूल निकालो:—

(i) $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$;

(ii) $(bc+ca+ab+a^2)(bc+ca+ab+b^2)$
$(bc+ca+ab+c^2)$;

(iii) $x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{5}{2}$.

73. यदि किसी आयत की भुजाओं की लम्बाई इस प्रकार बदल दी जाय कि उसका क्षेत्रफल सदा ही स्थिर रहे, तो आयत के एक वर्ग-क्षेत्र होने पर उसकी अल्पतम (minimum) सीमा बताओ।
[मानलो कि आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: x और y है; उस दशा में आयत का क्षेत्रफल $xy=k^2$, एक अचल राशि और उसकी सीमा $=2(x+y)$.

$$\text{यहाँ}\quad (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$
$$=4k^2+(x-y)^2;$$

अतएव, जब $x-y=0$ अर्थात् $x=y$ अर्थात् जब आयत एक वर्ग-क्षेत्र हो जाता है, तब $x+y$, अतएव $2(x+y)$ अल्पतम होता है।]

74. यदि $l^2+m^2+n^2=1$, $l_1^2+m_1^2+n_1^2=1$ और $ll_1+mm_1+nn_1=1$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$l : m : n = l_1 : m_1 : n_1.$$

[$(l^2+m^2+n^2)(l_1^2+m_1^2+n_1^2)-(ll_1+mm_1+nn_1)^2$

$$=(lm_1-l_1m)^2+(mn_1-m_1n)^2+(nl_1-n_1l)^2$$

एक तादात्म्य है;

प्रश्न की शर्त के अनुसार इस तादात्म्य का बायाँ पक्ष $=1.1-1^2=0.$

$\therefore \quad (lm_1-l_1m)^2+(mn_1-m_1n)^2+(nl_1-n_1l)^2=0;$

$\therefore$ अनु० 390 के अनुसार,

$lm_1-l_1m=0,\ mn_1-m_1n=0,\ nl_1-n_1l=0;$

$\therefore \qquad l : m : n = l_1 : m_1 : n_1.$]

75. निम्नलिखित तादात्म्य की सत्यता प्रमाणित करो:—

$$16(x-2)(x-4)(x-6)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)\left\{\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x-5}+\frac{5}{x-7}\right\}.$$

[$x=2$ लिखने पर दायाँ पक्ष का मान 0 होता है। इसलिये $x-2$ दायें पक्ष का एक गुणनखण्ड है, $x-4$ और $x-6$ भी दायें पक्ष के गुणनखण्ड हैं। दायाँ पक्ष तृतीयघात का व्यजंक है। अतएव इन तीनों के अतरिक्त इसका और कोई x वाला गुणनखण्ड नहीं है। अन्य कोई गुणनखण्ड होने पर वह संख्यात्मक होगा। अतएव यह कल्पना की जा सकती है कि दायाँ पक्ष $=k(x-2)(x-4)(x-6)$; यहाँ k संख्यात्मक है। इसका मान निकालना है। दोनों पक्षों के x^3 के गुणाक को भिन्न रहित करने से $k=16$; अतएव यह फल प्रमाणित होगया।]

76. हल करो:

(i) $\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^3=\frac{ax+2b-c}{ax+2c-b}$;

(ii) $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}=\frac{x+2a}{b+c-a}+\frac{x+2b}{c+a-b}+\frac{x+2c}{a+b-c}.$

77. एक मनुष्य ने y प्रति सैकड़ा व्याज की दर से x रु० दिया। एक दूसरे मनुष्य ने उससे a रु० कम ऊपर की दर से b अधिक पर दिया। यदि दोनों धनों का वार्षिक व्याज समान हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1.$

78. सिद्ध करो कि,

$$a+b(1-a)+c(1-a)(1-b)+d(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d).$$

79. सिद्ध करो कि निम्नलिखित तीनों समीकरणों में से केवल दो ही स्वतंत्र समीकरण हैं:—

$$y^2+yz+z^2=1+x(x+y+z),$$
$$z^2+zx+x^2=1+y(x+y+z),$$
$$x^2+xy+y^2=1+z(x+y+z).$$

[संकेत—तीनों समीकरणों में से कोई भी दो स्वतंत्र पाये जाते हैं।]

80. हल करो:—

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{bc}+\frac{y}{ca}+\frac{z}{ab}=2(a+b+c)\\ &x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+z\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0\\ &\frac{x}{b+c}+\frac{y}{c+a}+\frac{z}{a+b}=bc+ca+ab.\end{aligned}\right\}.$$

81. एक आदमी A स्थान से B स्थान तक जाने में तिहाई रास्ता a मील प्रति घं० की चाल से और शेष $2b$ मील प्रति घं० की चाल से चलने के बाद फिर उसी रास्ता से $3c$ मी० प्रति घं० की चाल से लौट आया। यदि A से B तक जाने और B से लौट कर A तक आने में उसे एक ही समय लगा हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

82. $\frac{x+6}{x^2+3x-10}$ में से $\frac{x+5}{x^2+5x-6}$ को घटाओ और अन्तरफल को $1+\frac{2(x^2+4x-8)}{x^2+11x+30}$ से भाग करो।

83. यदि $b^2+c^2=c(3a+b)$, $c^2+a^2=a(3b+c)$ और $a^2+b^2=b(3c+a)$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\frac{c}{(b+c)^3}+\frac{a}{(c+a)^3}+\frac{b}{(a+b)^3}=\frac{2(a+b+c)}{3(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

84. हल करो :—

(i) $$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=1;$$

(ii) $$\sqrt{a^2+2ax-3x^2}-\sqrt{a^2+ax-6x^2}=\sqrt{2a^2+3ax-9x^2}.$$

85. एक बालक एक स्थान से दूसरे स्थान को साइकिल से 15 घंटा में पहुँचने का निश्चय करके चला । 100 मील चलने के बाद उसने अपनी चाल प्रति घंटे 2 मील बढ़ा दी और निर्दिष्ट समय से 50 मिनट पहले गन्तव्य स्थान पर पहुँच गया । बताओ दोनों स्थानों के बीच की दूरी क्या है और बालक पहले किस चाल से जा रहा था ?

86. एक मनुष्य ने 10 रु० का $\frac{x}{y}$ अंश और 10 रु० का $\frac{y}{x}$ अंश पाने के बाद 20 रु० दान कर दिया । सिद्ध करो कि साधारणतः उसे किसी प्रकार की हानि नहीं हुई ।

[संकेत :—यहाँ यह प्रमाणित करना होगा कि $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).10$ रु० $\nless 20$ रु०, अर्थात् $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\nless 2$, इत्यादि ।]

87. निम्नलिखित दोनों समीकरणों से t का लुप्तीकरण करो :—

$$\left.\begin{array}{l} v=u+ft \\ s=ut+\frac{1}{2}ft^2 \end{array}\right\}.$$

88. निम्नलिखित तादात्म्य को सिद्ध करो :—

$$\frac{n(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

89. (i) यदि $x=\frac{1+a^2}{2(1-a^2)}$ और $y=\frac{2a}{1-a^2}$ हो, तो सिद्ध करो कि $4x^2-y^2=1$;

(ii) यदि $a=y+z-2x$, $b=z+x-2y$, $c=x+y-2z$ हो, तो सिद्ध करो कि $(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=9(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

90. निम्नलिखित दोनों समीकरणों को करणीगत राशि रहित करके रखो :—

(i) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$; (ii) $\sqrt{x}=\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

91. सरल करो :—

(i) $\left\{\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}\times\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\right\}^{12}\times x^{22}$;

(ii) $\dfrac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$.

92. एक मनुष्य पहले, घंटे में 8 मील की चाल से और बाद को, घंटे में 10 मील की चाल से साइकिल चलाकर 11 घं० में 100 मील गया; लेखाचित्र की सहायता से निर्णय करो कि उसने 8 मील प्रति घंटा और 10 मील प्रति घंटे के हिसाब से कितने कितने मील साइकिल चलाई थी ?

93. सरल करो :—

$$\frac{\sqrt{(ax)}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}-\sqrt{(a+x)}}-\frac{\sqrt{(ax)}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}+\sqrt{(a+x)}}.$$

94. यदि $a+b+c=1$, $bc+ca+ab=\frac{1}{3}$ और $abc=\frac{1}{27}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{1}{a+bc}+\dfrac{1}{b+ca}+\dfrac{1}{c+ab}=\dfrac{27}{4}$.

95. x और y की एक ऐसी द्वितीय घात का समघाती (homogeneous) और सममित (symmetrical) व्यंजक बताओ जिसका मान, $x=y=1$ होने पर, 3 होगा और $x=2$, $y=1$ होने पर, 11 होगा।

96. भाग करो :—

(i) $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$ को $1+xy+yz+zx$ से;

(ii) $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)-(a+bc)(b+ca)(c+ab)$ को $1-a^2-b^2-c^2-2abc$ से

(iii) $x^{12}-x^{-12}+6(x^8-x^{-8})+9(x^4-x^{-4})$ को $x^6-x^{-6}+3(x^2-x^{-2})$ से।

97. $\left(\frac{x^2-x+1}{12}\right)^3-27\left\{\frac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{432}\right\}^2$ को सरल करो और प्राप्त हुए फल का वर्गमूल निकालो ।

98. सरल करो :—

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)-\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

99. हल करो :—

(i) $(1+p)(x-py)=2p^2\left(\frac{x}{1+p}+\frac{y}{1-p}\right)=\frac{2p^2}{1-p}$;

(ii) $\frac{(a-b)x+(a+b)y}{a^2-b^2}=\frac{ab}{a-b}=\frac{ab(x-y)-(a^2y-b^2x)}{2ab^2}$.

100. किसी वृत्त के 3 और 6 इञ्च चौड़ाई वाले दो समानान्तर चाप करणों (parallel chords) के बीच की दूरी 2 इञ्च होने पर वृत्त का अर्द्ध-व्यास कितना होगा ?

101. यदि x और y दोनों राशियों का परम मान एक दूसरे से भिन्न हो

और यदि $\quad x+y=a+b+c,$

और $\quad x(x-a)(x-b)(x-c)=y(y-a)(y-b)(y-c)$ हो,

तो सिद्ध करो कि $\quad x^3+y^3=a^3+b^3+c^3.$

102. यदि $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$ हो,

तो सिद्ध करो कि $\quad xyz=1,$

अथवा, $\quad (1+x)(1+y)(1+z)=-1.$

103. किसी काम को A, 12 दिन में B, 25 दिन में और C, 20 दिन में करता है। यदि A, B और C तीनों मिलकर काम करें तो कितने दिनों में कर लेंगे, इसे लेखाचित्र की सहायता से निकालो ।

104. यदि $y=\frac{1+x}{1-x}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)=\frac{4(xy+1)}{x-y}.$$

105. यदि $x+\frac{1}{y}=1$ और $y+\frac{1}{z}=1$ हो, तो सिद्ध करो कि $z+\frac{1}{x}=1$.

106. सिद्ध करो कि, $x-y-2z$ राशि

$$2(x^3+y^3+z^3)+(y^2z+z^2x+x^2y)-5(z^2y+x^2z+y^2x)-2xyz$$

का एक गुणनखण्ड है।

107. यदि $x:a=y:b=z:c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

108. यदि $(a+b+c)x=(b+c-a)y=(c+a-b)z=(a+b-c)w$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$.

109. एक कमरे में जिसमें एक परीक्षा होने वाली थी, बराबर लम्बाई की बेंचों पर विद्यार्थियों के बैठने की व्यवस्था की गई। यदि 10 बेंचें अधिक होतीं, तो प्रत्येक बेंच पर एक विद्यार्थी कम बैठाना पड़ता और यदि 15 बेंचें कम होतीं, तो प्रत्येक बेंच पर दो विद्यार्थी और बैठाने पड़ते। बताओ कुल कितने विद्यार्थी थे ?

110. सिद्ध करो कि

$$a(a-x)(a-2x)=(a-b)(a-b-x)(a+2b-2x)$$
$$+b(b-x)(3a-2b-2x).$$

111. सिद्ध करो कि $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$.

112. x का इस प्रकार के एक द्वितीय घात का पूर्णाङ्क बीजीयफल निकालो जिससे कि, मान $x=0$, 1 और 2 होने पर क्रमशः $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{c+1}$ और $\frac{1}{c+2}$ हो; सिद्ध करो कि $x=c+2$ होने पर फल का मान $\frac{1}{c+1}$ होता है।

113. यदि $a=x^2+2yz$, $b=y^2+2zx$; $c=z^2+2xy$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^3+b^3+c^3-3abc=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$.

114. सरल करोः—

$$\left\{\frac{1}{\dfrac{4}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{3}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}}\right\}^2-\left(\frac{3t-t^3}{1-3t^2}\right)^2+(1+t^2)^2-2t^2-2.$$

115. $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ और $y=x^2$ का लेखाचित्र खींचो और उनकी सहायता से $x^2=\dfrac{x+2}{x-2}$ समीकरण को हल करो।

116. x^2+3x और $1+x+2x^2$ का लेखाचित्र खींच कर दिखाओ कि दोनों एक दूसरे को स्पर्श करते हैं और उसके छेदनविन्दु का भुज-कोटि निर्णय करो और x के जिन मानों से खींचे गये लेखाचित्रों में वर्तमान दोनों अनुरूप कोटियों (Corresponding ordinates) का अन्तर $\frac{1}{9}$ है, उन्हें निकालो।

117. a, b का गुणोत्तर मध्यमान और समान्तर मध्यमान का अनुपात $m : n$ हो; तो सिद्ध करो कि,

$$a : b = n+\sqrt{n^2-m^2} : n-\sqrt{n^2-m^2}.$$

118. हल करोः—

$$xyz=(xy+xz-yz)=4(yz+xy-xz)$$
$$=6(xz+yz-xy).$$

119. $y=x^2$ और $x-y+6=0$ का लेखाचित्र खींचो और दोनों लेखाचित्रों की सहायता से $x^2-x-6=0$ समीकरण का मूल निकालो।

120. यदि $x=1+\dfrac{a}{y}$, $y=1+\dfrac{b}{z}$, $z=1+\dfrac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x=\frac{(1+a)(c+d)+bd}{(1+b)d+c};$$

और यदि $d=1+x$ और $a=b=c=2$ हो, तो $x^2=\frac{11}{3}$ होगा।

121. सिद्ध करो कि $bc+ca+ab=0$ होने पर,

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

122. सिद्ध करो कि $\frac{a-b}{x}+\frac{a+b}{x-a^2}-\frac{a+b}{x-b^2}=0$ समीकरण के मूल परस्पर समान हैं।

123. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$(bc+ca+ab)^3+(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=0.$$

124. यदि $(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)=0$ हो, तो $a=b=c$.

125. यदि $x=\frac{b^5+c^5-a^5}{2bc}$, $y=\frac{c^5+a^5-b^5}{2ca}$, $z=\frac{a^5+b^5-c^5}{2ab}$ हो, तो $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=a^4+b^4+c^4$.

126. यदि x के मान एक समान्तर श्रेणी में रहें तो $y=mx+c$ समीकरण से प्राप्त y के अनुरूप (corresponding) मान भी एक समान्तर श्रेणी में होंगे।

127. सरल करोः—

$$\frac{1}{(4x^3-3x)^2}-\left\{\frac{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}}{1-3\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)}\right\}^2.$$

128. यदि $x^y=y^x$ हो, तो सिद्ध करो कि $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$, और यदि $x=2y$ हो, तो $y=2$ होगा।

129. दो अङ्कों से बनी हुई एक संख्या के अङ्कों का योग 8 है और उस संख्या को उलटकर लिखने से बनी हुई संख्या से गुणा करने पर 1855 होता है। बताओ वह संख्या कौनसी है?

130. यदि $ab+bc+ca=1$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$\left(1-\frac{a^2}{1+a^2}-\frac{b^2}{1+b^2}-\frac{c^2}{1+c^2}\right)^2=\frac{4a^2b^2c^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

131. यदि किसी समान्तर श्रेणी का p-वाँ पद q और q-वाँ पद p हो तो सिद्ध करो उस श्रेणी का m-वाँ पद $p+q-m$ होगा।

132. $5, 12, 19, 26, \ldots\ldots$ श्रेणी का कोई पद 129 हो सकता है या नहीं, यह निश्चय करो ।

133. $x^2+y^2=25$ और $x^2+y^2-18x+65=0$, इन दोनों समीकरणों के दो लेखाचित्र अङ्कित करो और दिखाओ कि वे एक दूसरे को काटते हैं । उनके छेदन-विन्दु का भुज-कोटि निकालो ।

134. यदि $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$ हो, तो सिद्ध करो कि $ac=bd$.

135. यदि दो राशियाँ x और y का म० स० h और ल० स० अ० l हो, और यदि $h+l=x+y$ हो, तो सिद्ध करो कि $h^3+l^3=x^3+y^3$.

136. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a, सार्व निष्पत्ति $=r$ और प्रथम n-संख्यक पद का योगफल $=S_n$ हो, तो सिद्ध करो कि,

$$S_1+S_2+S_3+\ldots\ldots+S_n=\frac{a}{r-1}\left\{\frac{r(r^n-1)}{r-1}-n\right\}.$$

137. किसी परीक्षा में प्रति सैकड़ा 45 परीक्षार्थी उत्तीर्ण हुए। यदि परीक्षार्थियों की संख्या 30 अधिक होती और 30 परीक्षार्थियों में से 19 परीक्षा में उत्तीर्ण होते, तो परीक्षा में उत्तीर्ण हुए विद्यार्थियों की संख्या प्रति सैकड़ा 44·8 होती; तो कुल परीक्षार्थियों की संख्या बताओ ।

138. सिद्ध करो कि $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ यह शर्त सिद्ध होने पर $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ व्यंजक को दो एक घात गुणनखण्ड में विश्लेषण किया जा सकता है ।

139. a, b, c, d का मान कितना होने पर, x^3-4x^2+6x-4 को $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ के रूप में प्रकट किया जा सकेगा ?

140. यदि $x=\dfrac{a}{b+c}$, $y=\dfrac{b}{c+a}$, $z=\dfrac{c}{a+b}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a^2}{x-xyz}=\frac{b^2}{y-xyz}=\frac{c^2}{z-xyz}.$$

141. यदि $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{(x+y)+(a+b)}.$$

142. यदि a, b, c वास्तविक, धनात्मक किन्तु परस्पर असमान हों, तो सिद्ध करो कि $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ का मान abc से लघुतर होगा।

143 यदि $b+c, c+a, a+b$ एक समान्तर श्रेणी बनाती हों, तो $(b+c)^2(2a+b+c), (c+a)^2(a+2b+c)$ और $(a+b)^2(a+b+2c)$ भी एक समान्तर श्रेणी बनावेंगे।

144. यदि $xy=ab(a+b)$ और $x^2-xy+y^2=a^3+b^3$ हो, तो सिद्ध करो कि, $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)=0.$

145. यदि $a^2+b^2+c^2=1$ और $l^2+m^2+n^2=1$ हो, तो सिद्ध करो कि $al+bm+cn<1.$

[संकेत— $(a-l)^2+(b-m)^2+(c-n)^2$ एक धनात्मक राशि है।]

146. सिद्ध करो कि $a^3+b^3+c^3+d^3-3(abc+abd+acd+bcd)$ व्यंजक $a+b+c+d$ से विभाज्य है।

147. यदि $x=a^2+ab+b^2$ और $y=a^2-ab+b^2$ हो, तो $4(a^4+b^4)=6xy-x^2-y^2$ होगा।

148. निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल निकालो :—

(i) $(x+y)^2+(x^2+y^2)+(x-y)^2+.........n$ पद पर्यन्त।

(ii) $\frac{x-1}{x}+1+\frac{x+1}{x}+.....................x$-पद पर्यन्त।

149. कलकत्ता से यशोहर जाते समय एक ट्रेन 1 घं० चलने के बाद एक दुर्घटना में पड़ गई जिसके कारण उसे 1 घं० की देरी करनी पड़ी। उस 1 घं० के बाद वह जिस वेग से पहले चल रही थी उसके $\frac{3}{5}$ वेग से चलने लगी और निर्दिष्ट समय से 3 घं० विलम्ब करके वह यशोहर पहुँची। यदि यशोहर की ओर और 50 मी० बढ़ जाने

पर यह दुर्घटना होती तो ट्रेन जिस समय यशोहर पहुँची है उसके 1 घं० 20 मि० पहले पहुँच सकती थी। कलकत्ता से यशोहर की दूरी बताओ।

150. -4 से $+4$ तक x के भिन्न भिन्न मानों से $4y=x^2$ और $2y=x+4$ समीकरणों का लेखाचित्र अङ्कित करो और उनकी सहायता से $2y=x+4$ के अन्तःखण्ड (Intercept) की लम्बाई निकालो।

151. किसी समान्तर श्रेणी के पद-समूह को 5 करके रखने से प्रत्येक समूह का योगफल भी एक समान्तर श्रेणी बनावेगा और शेषोक्त श्रेणी का सार्व अन्तर पूर्वोक्त के सार्व अन्तर का 25 गुना होगा।

152. हल करो :— $\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c)$.

153. हल करो :— $\left(\frac{x+a+b}{x+b+c}\right)^3=\frac{x+2a+b-c}{x+2c+b-a}$.

154. यदि a, b, c तीनों धनात्मक वास्तविक राशियाँ हों, तो सिद्ध करो कि $(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2>ab+bc+ca$.

155. यदि $X=ax+cy+bz$, $Y=cx+by+az$, $Z=bx+ay+cz$ हो, तो सिद्ध करो कि $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$

$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

156. यदि $x+a$ राशि x^2+px+q और $x^2+p'x+q'$ दोनों ही राशियों का गुणनखण्ड हो, तो वह $px^2-(q-p')x-q'$ का भी एक गुणनखण्ड होगा।

157. यदि $\frac{a+2b}{x+3y}=\frac{b+2c}{y+3z}=\frac{c+2a}{z+3x}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{7a+4b+7c}{10x+5y+9z}=\frac{5a+8b+5c}{6x+11y+7z}.$$

158. आकाश में फेंकी गई एक गेंद का विन्दु-पथ (Locus) यदि $y=x-\frac{x^2}{120}$ समीकरण द्वारा सूचित हो, तो x का मान 0, 10, 20, 30....... लेकर y के अनुरूप मान निर्णय करके विन्दु-पथ अङ्कित करो और उस लेखाचित्र से यह भी दिखाओ कि गेंद कितनी ऊँचाई तक उछली और कहाँ पर उसने भूमि स्पर्श की।

159. किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम x-संख्यक पद का योगफल x^2 और उस श्रेणी का सार्व अन्तर 2 होने पर श्रेणी का प्रथम पद बताओ ।

160. यदि $x+y+z=1$, $ax+by+cz=d$, और $a^2x+b^2y+c^2z=d^2$ हो, तो सिद्ध करो कि, $a^3x+b^3y+c^3z=d^3-(d-a)(d-b)(d-c)$.

161. यदि $\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=a$, $\frac{z}{x}-\frac{x}{z}=b$ और $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=c$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+a^2b^2c^2$.

162. सिद्ध करो कि $(z-x-y)(y+z-x)+(x-y-z)(z+x-y)+(y-z-x)(x+y-z)+4xy$ एक पूर्ण वर्ग है ।

163. एक समान्तर श्रेणी बनाने वाली 5 संख्याओं का योगफल 30 और उनके वर्ग का योगफल 220 है । बताओ वे संख्याएँ कौनसी हैं ।

164. दो आदमी कुल 7 मन सामान लेकर ट्रेन में यात्रा कर रहे थे । सामान अधिक होने के कारण उनमें से एक आदमी को टिकट के मूल्य से 3 रु० अधिक और दूसरे को 5 रु० अधिक देना पड़ा । यदि वह सारा सामान एक ही आदमी का होता, तो उसे 11 रु० देने पड़ते । बताओ वे दोनों कितना कितना सामान बिना महसूल दिये ले जा सकते थे ।

165. समान्तर श्रेणी बनाने वाली तीन संख्याओं का योग 30 है । दोनों प्रान्तीय संख्याओं में से प्रत्येक को 2 से गुणा करने पर और मध्यम में 6 जोड़ने पर प्राप्त हुई संख्यायें एक गुणोत्तर श्रेणी बनाती हैं । बताओ वे संख्याएँ कौनसी हैं ।

166. यदि $x^2=a^2\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{x}{x-a}\right)^2+\left(\frac{x}{x+a}\right)^2=n^2+n.$$

167. यदि $a=\frac{2}{2-b}$, $b=\frac{2}{2-c}$, $c=\frac{2}{2-d}$, और $d=\frac{2}{2-x}$ हो, तो $a=x$ होगा ।

168. यदि $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$ एक पूर्ण वर्ग हो, तो $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ एक समान्तर श्रेणी बनावेंगी ।

169. सिद्ध करो कि,
$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=c^3,$$
$$xyz=d^3.$$
इन समीकरणों से x, y, z का लुप्तीकरण करने पर
$$a^3+2c^3-6d^3-3ab^2=0 \text{ होगा ।}$$

170. सिद्ध करो कि $(2n+1)$ संख्यक पदों की एक समान्तर श्रेणी के विषम पदों का योग और सम-पदों के योग का अनुपात $n+1:n$ होता है ।

171. ज्यामितिक चित्र की सहायता से सिद्ध करो कि $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योगफल 2 है ।

172. निम्नलिखित दोनों समीकरणों में से x का लुप्तीकरण करो :—
$$\left.\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)&=m \\ x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)&=n. \end{aligned}\right\}$$

173. यदि x, y, z परस्पर असमान हों और $y^2+z^2+myz=z^2+x^2+mzx=x^2+y^2+mxy$ हो, तो तीनों व्यंजकों में से प्रत्येक $=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

174. यदि $r<1$ और $br<1$ हो, तो सिद्ध करो कि $ar+(a+ab)r^2+(a+ab+ab^2)r^3+\ldots\ldots\ldots$ अनन्त पद पर्यन्त $=\frac{ar}{(1-r)(1-br)}$.

175. हल करो :—
$$(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}.$$

176. हल करो :—
$$-\sqrt{4x^2+20x+17+\sqrt{16x^2+11x+10}}=2(x+2).$$

177. यदि $5(x^2+y^2+z^2+u^2+v^2)=(x+y+z+u+v)^2$ हो, तो $x=y=z=u=v$.

178. सिद्ध करो कि $a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4 \times(a^2+b^2-c^2)^3$ व्यंजक $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ से विभाज्य है।

179. 1, 2, 3, ... p प्रथम पद से युक्त और $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{p+1}$ सार्व निष्पत्ति वाले अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के योग क्रमशः $S_1, S_2, S_3 \ldots S_p$ होने पर सिद्ध करो कि

$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_p=\tfrac{1}{2}p(p+3).$$

180. यदि

$$\left.\begin{array}{l} l_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \\ l_2^2+m_2^2+n_2^2=1 \\ l_3^2+m_3^2+n_3^2=1 \end{array}\right\} \text{ और } \left.\begin{array}{l} l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \\ l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0 \\ l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3=0 \end{array}\right\}$$

हो, तो सिद्ध करो कि

$$\left.\begin{array}{l} l_1^2+l_2^2+l_3^2=1 \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2=1 \\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \end{array}\right\} \text{ और } \left.\begin{array}{l} l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0 \\ m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0 \\ n_1l_2+n_2l_2+n_3l_3=0 \end{array}\right\}.$$

——:o:——

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.

1. $5; 1; 6, \frac{2}{3}$. 2. $8; 7; 12, 0$. 3. $1\frac{1}{3}; 2\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2$.

4. 7. 5. $4; \frac{1}{4}; \frac{8}{15}$ 6. $p-q; 12$.

7. 15. 8. $10c+y; 30$. 9. $\frac{60}{x}$.

10. $20-y$

प्रश्नावली 2.

1. 4; 27, 432; 52. 2. 32; 576; 14; 21; 22.

3. 32, 108; 26; 0; 0. 4. 72; 32; 384; 864, 108.

5. 64; 162; 10; -2; 36. 6. 2; 3; 5, 1; 4.

7. 6, 12; 16; 5. 8. 6; 7; 1; 5.

9. 9; 12. 10. 43; 243, 15.

11. 3; 1, 3 2. 12. 5; 10; 11.

13 8, 25, 9; 8. 14. 2; $1\frac{1}{2}$; 2. 16. 9.

17. 4, 6, 4, 6; प्रथम और तृतीय एक मान की और द्वितीय व चतुर्थ एक मान की।

प्रश्नावली 3.

1. 17. 2. 25. 3. 6. 4. $4\frac{1}{2}$.

5. 6. 6. $1\frac{1}{5}$. 7. 25. 8. 9.

9. 26. 10. $34\frac{1}{6}$. 11. 30. 12. 85.

13. $3\frac{1}{3}$. 14. $\frac{7}{18}$. 15. $2\frac{1}{8}$. 16. 0.

17. 247. 18. $6\frac{1}{2}$. 19. 102. 23. 4.

24. 60. 25. पाँचवें परिमाण की।

26. सातवें परिमाण की।

प्रश्नावली 4.

1. $+20$. 2. -4 द्वारा। 3. -27 द्वारा। 4. -75 पौं०।
5. पहले मनुष्य के पास दूसरे मनुष्य से 60 रु० अधिक हैं।
6. 95; 58. 7. 230 रु० कम होगया।
8. समुद्र-तल के नीचे 300 फ़ुट।
9. 6° बढ़ा; यदि $b > a$ हो, तो $(b-a)^\circ$ ताप बढ़ा और यदि $b < a$ हो, तो $(a-b)^\circ$ ताप घटा; 2° बढ़ा।
10. 71°. 11. $77^\circ\ 41'\ 2''$. 12. -100 फ़ीट।
13. 669 फ़ीट।

प्रश्नावली 5.

1. -3; -1; 6; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{[illegible]}$. 2. 1; $-\frac{1}{[illegible]}$; $\frac{1}{8}$.
3. 8; 16; -8; 8; -2. 4. 11; 7; 7; 15.
5. 9; -11; 0. 6. 1; 3; 9. 24; 22.
7. $\frac{7}{25}$; $-\frac{4}{21}$; 1; -6. 8. 4; 4.
9. पहले की अपेक्षा दूसरा 12° अधिक है।
10. -5°; 0°. 11. 20°.
12. 2 मि० सुस्त। 13. 54 मील प्रति घं०।

प्रश्नावली 6.

1.	$7x$.	2.	$2x-3y$.	3.	$5a$.
4.	$5ab$.	5.	$24a^2$.	6.	$14a$.
7.	$-8x$.	8	a^2+3x^2.	9.	$8xy$.
10.	$50p$.	11.	$-3ax$.	12.	$29x^3$.
13.	$2abc$.	14.	$21xyz$.	15.	$2x$.
16.	$13y$.	17.	$-3x^2$.	18.	$9ax^2y$.
19.	$16abxy$.	20.	$8x$.	21.	$3a$.
22.	$\frac{7}{4}x^2$.	23.	$12b$.	24.	$-30a^2$.
25.	$4x^2-4x$.	26.	$12x^2-5y^2$.	27.	x^2+y^2+3x.
28.	$-2a^2b+2ab^2-ab$.			29.	$7ax+4x+2by$.
30.	-44.	31.	-21.	32.	-23.

33. 20. 34. 49. 35. 0.

36. $8x^2$. 37. $2a^2+b^2$. 38. $5p^2$.

39. $2by$. 40. $x^2+5xy-4y^2$. 41. $-5b$.

42. $2abc-4bc-8a$. 43. $\frac{13}{30}a$.

44. $\frac{7}{36}xy$. 45. $\frac{7}{48}b$. 46. $\frac{1}{12}x^2+\frac{11}{24}y^2$.

47. $\frac{1}{24}a^2-\frac{7}{12}b^2$. 48. 4. 49. 4.

50. $3x$. 51. $3a$.

प्रश्नावली 7.

1. 39. 2. 49. 3. 6.

4. 28. 5. 132. 6. $2a$.

7. $2a$. 8. $a+b+c$. 9. $2x+2y+2z$.

10. $7x+5y$. 11. $-3xy+3zx$. 12. $4a^2+2ax+5x^2$.

13. $3x^2-xy+4y^2$. 14. $5a^3-5b^3-2c^3$.

15. a^4. 16. $ax+by+cz$; $6ax-4by+6cz$.

17. $3x+ax+6y-36$. 18. $7t^2+8t+5$; 785.

19. 7; -63. 20. 174.

प्रश्नावली 8.

1. $3ab$. 2. $-2x^2y$. 3. $5x^3y^2$. 4. a^4b.

5. $-3a^2b$. 6. $xz+yz$. 7. a^2x-a^2y.

8. $-x^3y-2xy^3$. 9. a^2b+ab^2. 10. $-6a^3b^3c^3$.

11. x^3. 12. x^4y^2. 13. a^7.

14. $10a^2bx^5$. 15. x^{2+a}. 16. x^{a+b}.

17. $-20x^4y^5z^3$. 18. $x^3y^3z^3$. 19. $a^2b^7c^4d^4$.

20. $-21x^6y^8z^6$. 21. $-a^3x^6$, x^9y^6 और a^6b^{18}.

22. प्रथम राशि $=a^{20}$; दूसरी राशि $=a^9$.

23. 282429536481, -9765625, 262144.

24. $b(a+1)$, $x(1+2y)$, $x(x+y)$.

प्रश्नावली 9.

1. 5; $3y$; $4y$. 2. $4ab^2$; $-2a$; $-8qr$.

3. $-x$; a^3; $2m$. 4. $3ax^2z$; $-2abc^2$.

5. $\frac{2x^3}{a}$; x^{n-3}; $3x^{a-6}$; $3y^7$.

6. $a+1$; x^2+y^2; $xy+mn$. 7. $pq-xy$; $a-d$; $1-ax$.

8. $y-xz^2$; pr^2+qr^2.

9. $a-x+y$; $-1+x-y$; $-2x+b+3c$.

10. x^2-3x+4; $-a^3+2a+3$.

11. a^2b; b; xy; x^3y. 12. $2x^2$; $15x^{10}$; $\frac{3}{2}x^3y^6$.

13. $-\frac{b}{c^2}$; a^2xy^3.

14. $-4a^3b^2$; $-5x^3y^3z^4$; $5p^6q^6r^6$.

15. $-2xy^2z^2$. 16. ab. 17. $4axby$.

प्रश्नावली 10.

1. $x-6$. 2. $\frac{15}{p}$. 3. $12x$ पैस। 4. $640y$ रु०।

5. $\frac{100}{x}$ मी०; $\frac{x}{10}$ मी०। 6. $\frac{40y}{x}$. 7. $x-1, x+1$.

8. $x+2, x+4$. 9. $x-2, x-4$.

10. $x-30$; $30-x$; $x+30$.

11. $x-18$ वर्ष; $x+8$ वर्ष। 12. $\frac{24}{x}$ गज़।

13. $4x$ इंच। 14. $\frac{3x}{a}$ बार।

15. $65x$ आना। 16. mx; x^m.

17. $\frac{x}{3}$ घंटा; xy मी०। 18. $\frac{xy}{9}$ वर्ग गज़।

19. $\frac{x}{12}$ रु०। 20. $20-x$

प्रश्नावली 11.

1. $x, x+1, x+2, x+3$. 2. $a-2, a, a+2$.

3. $(y-x)$ वर्ष । 4. $\frac{25}{C}$.

5. $5x$ मी० । 6. $(x+y-z)$ वर्ष ।

7. $(y+11)$ वर्ष । 8. $35-2x+y$.

9. $2b-a$ 10. $(\frac{1}{2}x-50)$ रु० ।

11. a दिन । 12. $\frac{x}{y}$ दिन ।

13. $\frac{x}{a}$ घंटा । 14. $(240x+12y-z)$ पैंस ।

15. $\frac{y}{x}$ रु० ।

प्रश्नावली 12.

1. 10 वर्ग फ़ुट । 2. 685.

4. कर्ण की लम्बाई l होने पर $l=\sqrt{a^2+b^2}$. 5. 15.

6. (i) फ़र्श का क्षेत्रफल $A=lb$ वर्ग फ़ुट;
   (ii) परिसीमा $p=2(l+b)$ मी०;
   (iii) चारों दीवारों का क्षेत्रफल $A'=2(l+b)h$ वर्ग फ़ुट ।

विविध प्रश्नावली I.

I.

1. 96. 2. (i) 3, 5, (ii) 5, 6.

3. (i) $6x^5$, (ii) $\frac{3x}{4y}$. 4. 27. 5. $\frac{88}{7}$

6. $2x+3y$, $6x^3y^3$. 8. $10x+y$.

II.

1. 36 B.C. 2. 15, 54 3. $(192a+12b+c)$ पा०, 645 पा० ।

4. 78. 5. (i) $\frac{5x}{6}$; (ii) $\frac{x}{6}$; (iii) $\frac{x^2}{6}$, (iv) $\frac{3}{2}$.

6. y^4 और y क्रमशः सर्वोच्चघात और सबसे निम्नघात; $3x^3$ और y^4 दो घनपद और x^2 का गुणक $-5y$.

7. $x-(2y-3z)$, $a^2+(2ax-b^2)$, $a-(5b+3c)$.

8. $(x+1)$ रु० ।

III.

1. $a+b+(x+y)$. 2. 4, 16.

3. $x^3, -2x^3; -x^2, +5x^2; -2ax, +4ax; +a^2, +3a^2$.

4. $6x$ औंस; $640y$ छटाँक; $192z$ पा० ।

5. 216; 18; 2. 6. $(x-yz)$ मी० ।

IV.

1. $2x^2+3x$. 2. 8, 7.

3. $a-(b+c), a-b-c$. 4. $ax-2x^2$.

5. $2x-1, 2x, 2x+1$: $2x$ सम और अन्य दो विषम हैं ।

6. $x-25$ वर्ष । 7. $(x+z)$. 8. $180^{\circ}-(x+y)^{\circ}$.

V.

1. $2x-2y$. 2. 1. 3. 2°. 4. -24. 5. $60-2x$.

6. (i) $\frac{x}{2}$; (ii) $5x+y-16z$. 7. 1. 8. $100x+z$.

VI.

1. $2a-6b+6c+6d$. 2. $3a+4b$. 3. $8a^2+3ab-8b^2$.

4. (i) $12(x-y)$ पें०; (ii) $\frac{1}{20}(x-y)$ पौं० ।

5. $(n+1)$ वीं रेखा । 6. $x(y-z); y(z-x); z(x-y)$.

7. छोटी; $p-q$. 8. $(3600p+60q)$ सेकण्ड ।

VII.

1. 0, 6, 6. 2. 7. 4. 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9. 5. 0.

6. 5; 7. 7. 50; 138, 220, 142. 8. 0, 4, 14.

VIII.

1. 2. 2. $(5x-10z)-(3y-9a); (5x+10z)-(3y+9a)$.

3. $\frac{xz}{y}$ टन । 4. $100x+10y, 100x+y, 100y+10x, 100y+x$.

5. $3x^2+11x+16$. 6. $9a^2-5x^2$.

7. $48b>25a$ होने पर $\frac{48b-25a}{48}$ पौं० लाभ; $48b<25a$ होने पर $\frac{25a-48b}{48}$ पौं० हानि । 8. $28\frac{3}{7}$ वर्ग इञ्च ।

IX.

2. $1-x+x^2$. 3. $3x-8y$.

4. $ax^3-bx^3+bx^2+cx^2-2cx-ax+x^3-2x^2-x$;
$(a-b+1)x^3+(b+c-2)x^2-(a+2c+1)x$.

5. $\left(\frac{3}{2}x+1\right)$ पं० । 6. $4\frac{97}{120}$.

7. $\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)$ घं० । 8. $\frac{3x+2y}{x+y}$ रु० ।

X

1. 11. 2. $2-6x^3+4x^2-3x^4$. 3. $24x^3y^3z^3$.

4. x^2-7x+6. 5. $\frac{x+12y}{3}$ गज़ । 6. 4.

7. $\frac{A}{l}$ इंच; $s=2\left(l+\frac{A}{l}\right)$. 8. $\left(\frac{z}{y}-\frac{z}{x}\right)$ सेकण्ड ।

प्रश्नावली 13.

1. x^2+4x+4. 2. $16x^2-8x+1$.
3. $25x^2+90xy+81y^2$. 4. $4x^2-4xy+y^2$.
5. $p^2x^2+2pqxy+q^2y^2$. 6. $4a^2+20ab+25b^2$.
7. $a^2x^2-6abx+9b^2$. 8. $4a^2b^2+4abc^2+c^4$.
9. $x^4-2x^2y^2+y^4$. 10. $4a^2-4ax^2+x^4$.
11. $4x^2+4x^3+x^4$, $x^4+2x^3y+x^2y^2$.
12. $p^4-4p^3q+4p^2q^2$, $p^4-6p^3+9p^2$.
13. $81x^4-126x^2y^2+49y^4$. 14. $-4x^2+12xy-9y^2$.
15. (*i*) 121. (*ii*) 11025. (*iii*) 1050625. (*iv*) 7921. (*v*) 996004. 16. 1. 17. 36. 18. 121.
19. 4. 20. 100.
21. $4y^2$. 22. $(3a-5b+x-2y)^2$.
23. $2p^2x^2+2q^2y^2$. 24. $a^2x^2+b^2y^2$.
28. x^2-2. 29. 5. 30. 3.

प्रश्नावली 14.

1. 559. 2. 18[illegible]. 3. 25480.
4. 75849. 5. x^2-y^2. 6. x^2-1.
7. $25x^2-49$. 8. $36x^2-a^4$. 9. $4b^2-a^2$.
10. x^4-y^4. 11. $1-a^{2m}b^{2m}$. 12. $a^2+2ab+b^2-c^2$.
13. $(x+2y)(x-2y)$. 14. $(4a+1)(4a-1)$.
15. $(3x+7)(3x-7)$. 16. $(ax+by)(ax-by)$.
17. $(1+xyz)(1-xyz)$. 18. $(x^m+y^m)(x^m-y^m)$.
19. $(a-b+c)(a-b-c)$. 20. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.
21. $16-x^2$. 22. $4x^2+4xy+y^2-9z^2$.

प्रश्नावली 15.

1. x^2+6x+8. 2. $9x^2+21xy+10y^2$.
3. $a^2+5a-14$. 4. a^2-a-20.
5. $x^2-4ax-12a^2$. 6. $4m^2+8mn+3n^2$.
7. $a^2+a(b+c)x+bcx^2$. 8. $15x^2+4x-4$.
9. $20-9x+x^2$. 10 $x^{2m}+6x^m-160$.
11. $(x+2)(x+1)$. 12. $(x-2)(x-1)$.
13. $(5-x)(3-x)$. 14. $(a+2)(a-1)$.
15. $(x-3)(x+2)$.

प्रश्नावली 16.

1. $1+3x+3x^2+x^3$. 2. $27-27a+9a^2-a^3$.
3. $8x^3+12x^2+6x+1$. 4. $x^6-3x^4+3x^2-1$.
5. $a^3x^3-3a^2x^2by+3axb^2y^2-b^3y^3$.
6. $x^6+6x^4y+12x^2y^2+8x^3$.
7. $8n^6-36mn^4+54m^2n^2-27m^3$.
8. $27a^3x^3+54a^2x^2by+36axb^2y^2+8b^3y^3$.
9. $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$. 10. $2x^3+6xy^2$.
11. $6p^2q+2q^3$. 12. $8x^3$.
13. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. 14. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.
15. $8x^3$. 16. 35.
17. 316. 19. 52.

प्रश्नावली 17.

1. $1+x^3$. 2. x^9-1. 3. $8a^3+1$.
4. x^3-27y^3. 5. $a^6-b^3c^3$. 6. $a^3x^3+125b^3$.
7. $a^{3m}-b^{3n}$. 8. x^6-a^6. 9. a^6-b^6.
10. -19. 12. $(x+3)(x^2-3x+9)$.
13. $(2a-5)(4a^2+10a+25)$.
14. $(m+4n)(m^2-4mn+16n^2)$.
15. $(7ab^2-1)(49a^2b^4+7ab^2+1)$.
16. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy+2yz-zx)$.
17. $2y(3x^2+y^2)$. 20. 36.
21. $(2x+y)(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$.
22. $6ab^2$.

प्रश्नावली 18.

1. $x=9$. 2. $x=4$. 3. $x=-3$.
4. $x=6$. 5. $x=-2\frac{1}{4}$. 6. $x=16$.
7. $x=1\frac{1}{4}$. 8. $x=1\frac{1}{2}$. 9. $x=4$.
10. $x=-3$. 11. $x=2$. 12. $x=3$.
13. $x=12$. 14. $x=1$. 15. $x=5$.
16. 6. 17. 36. 18. 5.
19. 4. 20. 24.

प्रश्नावली 19.

1. 7. 2. 2. 3. 2.
4. 7. 5. 20. 6. 18.
7. -4. 8. 1. 9. 2.
10. $x=\frac{9}{11}$. 11. $x=2$. 12. $x=3$.
13. $x=1$. 14. 5. 15. 84.
16. 13. 17. 17. 18. 7.

प्रश्नावली 20.

1. $x=7.$ 2. $x=1$[illegible]. 3. $x=3.$
4. $x=15.$ 5. $x=2.$ 6 $x=1.$
7. $x=7.$ 8. $x=5.$ 9. $x=6.$
10. $x=9$ 11. $x=7.$ 12. $x=12.$
13 $x=$ [illegible]. 14 $x=-$[illegible]. 15. $x=5.$
16. 2. 17. 8. 18. 5.

प्रश्नावली 21.

1. $x=2.$ 2. $x=5.$ 3. $x=2.$
4. $x=9.$ 5. $x=11.$ 6. $x=3.$
7. $x=-3.$ 8. $x=2\frac{1}{3}.$ 9. $x=6.$
10. $x=4.$ 11. $x=$ [illegible]. 14. $x=41.$
15. 3. 1[illegible]. [illegible]. 17. 7.
18. हाँ, $-1.$

प्रश्नावली 22.

1. (i) चौथे; (ii) तीसरे; (iii) दूसरे;
(iv) दूसरे; (v) चौथे; (vi) तीसरे।
5. (5, 7). 8. (6, −2·4) मोटे तौर से ।
9. (i) 5 इकाई ; (ii) 11·7 इकाई (मोटे तौर से);
(iii) 11·2 इकाई (मोटे तौर से) । 11. 3.
12. (i) समानान्तर चतुर्भुज ; (ii) आयत क्षेत्र ।
13. (i) 48 वर्ग इकाई; (ii) 24·5 वर्ग इकाई ।
14. 9; −12. 15. (i) 25·5 वर्ग इकाई,
(ii) 6·5 वर्ग इकाई, (iii) 35·5 वर्ग इकाई ।
16. 219 वर्ग इकाई । 17. $\sqrt{3}$ वर्ग इकाई ।
18. −4; −12. 19. 18 वर्ग इकाई ।
20. 144 वर्ग इकाई । 21. (0, 0).
22. 8·64 फ़ी० (मोटे तौर से) । 23. प्रायः 6·6 मील ।
24. 103·9 फ़ीट (मोटे तौर से) ।

विविध प्रश्नावली II.

I.

1. $8xy-4x^2$. 2. 0. 3. $3p+2q$.
4. (i) $x=3\frac{3}{7}$; (ii) $x=5$. 5. $64\frac{(a-b)}{c}$ पैसे ।
6. 60, 54, 66.

II.

1 x^2-34y^2; $2y^2$. 2. (i) $x=10$; (ii) $x=1$.
3. 117; 27. 4. $3x^2-3x-20$.
5. यदि संख्या x हो, तो अन्तर $=3x^2$. 6. 12.

III.

1. 34, 4, 16. 2. $13x-2y$.
3. A, 9 रु०; B, 12 रु०; C, 14 रु० ।
4. (i) $x=6$; (ii) $x=4\frac{8}{11}$. 5. 41, 43, 45.
6. 2401.

IV.

1. $\frac{1}{5}$. 2. 11; 0; $pr-qr-t$; $p-qr+qt$.
3. $a=\frac{y^3}{2}$, $y=\sqrt[3]{2a}$. 4. (i) $x=2\cdot8$; (ii) $x=3$.
5. $9y^2-x^2$. 6. 40, 5.

V.

1. (i) $-5a$; (ii) $\frac{7}{8}y-\frac{1}{8}x$. 2. $2x^2+x$.
3. (i) $x=7$; (ii) $x=-7\frac{1}{2}$.
4. मध्य विन्दु का भुज-कोटि $x=2$, $y=-1\cdot5$; $(6,-4\cdot5)$, $(-2, 1\cdot5)$.
5. $3y^3-2x^3$; $4y^3-x^3$. 6. $\frac{ay^3}{x^2}=\frac{8}{9}$.

VI.

1. -1. 2. 169, 65. 3. (i) $x=31$, (ii) $x=\frac{3}{2}$.
4. ($x=\cdot6$, $y=\cdot2$) मोटे तौर से । 5. 98.
6. A$(-2,-3)$, D$(6,-9)$.

VII.

1. $x^{3n}-1$. 2. $2x$. 3. 30 वर्ग इकाई।

4. (i) $x=3$; (ii) $x=$ [illegible]. 5. 100^2-25^2.

प्रश्नावली 23.

1. $\frac{5}{4}x$. 2. $\frac{1}{2}a-\frac{7}{3}b$. 3. $\frac{1}{6}p+\frac{1}{6}q+\frac{5}{6}r$.

4. $-\frac{5}{6}xy-\frac{1}{2}y^2$. 5. $-\frac{47}{70}ab+\frac{5}{9}ab^2$. 6. $x+3$.

7. 0. 8. $x^3+y^3+z^3$.

9. $-\frac{19}{56}x^4-\frac{79}{280}x^3+x^2+\frac{23}{70}x$. 10. $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}b+\frac{1}{12}c+\frac{1}{4}d$.

11. $\frac{1}{2}a+\frac{13}{60}b+\frac{1}{5}c+\frac{9}{20}d$; 4. 12. $\frac{2}{3}x+\frac{17}{12}y$.

प्रश्नावली 24.

1. $3a+9x$. 2. $9x+13y$. 3. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

4. $\frac{703}{480}x+\frac{107}{90}y$. 5. $\frac{18}{5}p+\frac{5}{6}q$. 6. $(3p-3q)x$.

7. $(2p+2q+2r)x^2$. 8. 0.

9. $(a-d)x+(b-e)y+(d+e-a-b)z$.

10. $(a+b+c)x^3+(b+c+d)x^2+(c+d+a)x+(d+a+b)$.

11. $8(a+b)x-(a-b)y$. 12. $11(x^2+y^2)+2ab(x^2-y^2)-10$.

13. $3a+25(x-y)a^2+4a^3$. 14. $\frac{1}{3}x^2y^2+\frac{62}{63}xy+\frac{9}{8}x$.

15. $(10a^3-8b^3)x^3+(a^2-2b^2)x^2+(a+b)x+9$.

16. $\frac{8}{15}x-\frac{4}{15}$. 17. $\frac{10}{21}x-\frac{13}{7}$. 18. $\frac{5}{12}x+\frac{17}{24}$.

19. $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}y$. 20. $\frac{17}{36}a-\frac{1}{6}$.

21. $\frac{1}{12}a-\frac{1}{3}b$. 22. $\frac{9}{40}x-\frac{21}{40}$.

प्रश्नावली 25.

1. $2b$, $-2b^2$, $2x^5+2y^3$, $2x-2y$.

2. $4a-6b$; $8a-12b$. 3. $2b-2c$; $-x-7y+3z$.

4. $-4xy-2yz+6zx$; $-2ax+3$.

5. a^4-1. 6. $3by-4cz$.

7. $1-2x+4x^2-3x^3-3x^4+7x^5$.

8. $x^3+y^3+z^3-3xyz$. 9. $\frac{1}{2}a+\frac{4}{5}b-\frac{3}{4}c$.

10. $-2x^2-\frac{4}{5}xy-y^2+z^2$. 11. $3x-2y$.

12. $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{6}xy-\frac{5}{6}y^2$. 13. b. 14. $-x$
15. $q^2-6pq+3q^3$. 16. $x^3+x^2y+8x^2y^2-2$.
17. $4a-9b+3c$.
18. $-3x^2+4x+6$; $2x^2-3x-4$; $-x^2+x+2$.
19. $-2x^3+2x^2-x-7$. 20. (i) $3a^2$; (ii) $a^2+6ab-2b^2$
(iii) $9ab-3b^2$. 21. 0. 22. $10-x$. 23. $-x$.

प्रश्नावली 26.

1. $2x(a-b)$. 2. $-4(a+b)x+(b+c)y+6(c-2a)z$.
3. $\frac{5}{19}a+\frac{47}{24}b$. 4. $2(x^2+y^2)+8(x+y)+4$.
5. $6a^2b^2(a-b)-16x^2y^2(a^2+b^2)+9ab(a^3-b^3)$.
6. $(2q-2r)xy+(2r-2p)yz+(2p-2q)zx$.
7. $a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2$. 8. $\frac{5}{12}x+3$. 9. $(p-r)x+a(q-p)$.

प्रश्नावली 27.

1. 15 वर्ष । 2. 7. 3. लम्बाई 40 गज़; चौड़ाई 10 गज़ ।
4. 6. 5. 18, 17. 6. 20, 18.
7. 80, 20. 8. 10. 9. 32, 27, 19.
10. 60, 90. 11. 65.
12. A, 53 रु०; B, 38 रु०; C, 14 रु० ।
13. 28, 30. 14. 20 रु० ।
15. गाड़ी का मूल्य 235 रु०; घोड़े का मूल्य 705 रु० ।

प्रश्नावली 28.

1. x. 2. $-x$. 3. x.
4. x. 5. x. 6. $-x$.
7. $-x$. 8. $a-b-c$. 9. $a-b+c$.
10. $a+b-c$. 11. $a-b+c-d$. 12. $2b^2$.
13. x^2+xy+y^2. 14. $-3a+2b-5c$. 15. $2x-5y$.
16. $3x-10y+10$. 17. a^4-a^2+2a-2. 18. $4x-4$.
19. 6. 20. 17. 21. $13x+y$; 15.
23. 0. 24. (i) $\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$. (ii) $5x-3$.

प्रश्नावली 29.

1. $3(x+4y)$. 2. $5a(x-5b)$.
3. $b(a-b)$. 4. $ax(a+x)$.
5. $2ab(a-2+b)$. 6. $4x^2(1-2y+3y^2)$.
7. $3a(a^2-2ab+b^2)$. 8. $x(x-a-b)$.
9. $7ab(a^2+2b^2-3ab)$. 10. $xy(x-5+3y)$.
11. $x^2+(a+b)x$. 12. $y^2+(a-b)y$.
13. $x^2-(2a+5b)x^3$. 14. $(a-b-c)x-(a+b-c)y$.
15. $(a^2-c^2)x^2+(2a-c)x-(a^2-b^2)y^2$.
16. $x^2-y(2x-y)$; $x^2+y(y-2x)$.
17. $ax+bx+cx-(p+q+r)x^2$.
18. $3(x-1)$. 19. $3(x^2-5xy+y^2)$.
20. (i) $a-b+(c-d+e)$, (ii) $a-b-(d-e-c)$.
21. (i) $x^3+y(-6x+5xy-2y^2)$. (ii) $x^3-y(6x-5xy+2y^2)$.
22 (i) $(3-m)x^3+(n-6)x^2$; $-(m-3)x^3-(6-n)x^2$.
(ii) $(2x^4-qx^4)+(px^3+rx^3-3x^3)$;
$-(qx^4-2x^4)-(3x^3-px^3-rx^3)$.
(iii) $(ax^3-x^3)+(5x^2-cx^2)+(qx-6x)$;
$-(x^3-ax^3)-(cx^2-5x^2)-(6x-qx)$.

प्रश्नावली 30.

1. $-x^6$. 2. x^7. 3. $24x^9$.
4. $105x^{6n}$. 5. a^{x^2+3x+2}. 6. a^6b^{12}.
7. p^8q^9. 8. $(a+b)^8$. 9. $(x+y)^{18}$.
10. $-(a+b)^6$. 11. $(x-y)^{mn}$. 12. a^9.
13. $x^{3a}y^{3b}$. 14. $-a^3b^3$. 15. $a^8b^4c^{12}$.
16. $729x^{12}y^{18}z^{24}$. 17. 72. 18. 480.
19. -17. 20. -55. 21. 18.

प्रश्नावली 31.

1. $2a^2x+2a^2y$. 2. $x^3-2x^2y+xy^2$.

3. $4x^4-16x^3+28x^2$. 4. $a^7b^6c^5+a^5b^8c^4$.

5. $3x^{n+2}-6x^3+3x^2$. 6. $x^{2n}y+x^ny^2-x^ny$.

7. $a^3b^2c^2d^2+a^2b^3c^2d^2+a^2b^2c^3d^2+a^2b^2c^2d^3$.

8. $-x^2+6x-8$ 9. $10x^2+13x-3$.

10. $ax-5x+8a-40$. 11. $63x^4y^2-84x^2y+21$.

12. $a^{2m}-b^{2n}$. 13. $a^2+b^2+2ab+bc+ca$.

14. $a^2-b^2-ac+bc$. 15. $x^2y^2-y^2z^2+x^2yz-xyz^2$.

16. $x^3-y^3-x^2y+xy^2+xz^2-yz^2$.

17. x^3-6x^2+10x. 18. 0.

19. $ab+ad+bc+cd$.

20. $x^2(2a^2-b^2-c^2)+y^2(2b^2-c^2-a^2)+z^2(2c^2-a^2-b^2)$.

प्रश्नावली 32.

1. a^6+x^6. 2. $8a^3-27b^3$. 3. $\frac{3}{4}x^3-\frac{2}{9}y^3$.

4. $\frac{1}{8}a^3-\frac{13}{16}a^2+\frac{9}{16}a-\frac{3}{32}$. 5. $x^4-y^4-z^4+2y^2z^2$.

6. $a^4+a^2b^2+b^4$. 7. x^8+x^4+1.

8. $2x^2-10y^2+3z^2-xy-13yz+7zx$.

9. $\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{5}a^2x^2+\frac{2}{5}ax^3+\frac{3}{5}x^4$.

10. $1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{17}{72}x^4+\frac{1}{12}x^5$.

11. $a^4-a^2x^2+2ax^3+10ax-10x^2-x^4-25$.

12. $1+x^2-x^4-x^6$.

13. $x^4y-x^3yz-x^3z^2-x^2y^3+x^2z^3+xy^3z+xy^2z^2-y^2z^3$.

14. $a^6-a^5x-a^4x^2+a^2x^4+ax^5-x^6$. 15. a^8-x^8.

16. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$. 17. $a^8+a^4b^4+b^8$.

18. a^6-x^6. 19. $x^{12}-y^{12}$.

20. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$.

21. $4a^2b+2b^3$. 22. $a^{4m}-b^{4m}$.

23. $a^{4m}+b^{4m}-2a^{2m}b^{2m}$.

प्रश्नावली 33.

1. $2x^3+3x^2+5x+2$.
2. $12x^3-31x^2+40x-25$.
3. $2x^4-10x^3+17x^2-13x+3$.
4. $12a^3+14a^2b+9b^3$.
5. $x=9$.
6. $x=3$.
7. $x=5$.
8. $x=10$.
9. $x=7$.
10. 2.
11. 4.
12. 4.
13. x^3+3x^2+2x.
14. A, 22 रु०; B, 11 रु०।
15. $6x^3+25x^2+16x+7$.

प्रश्नावली 34.

1. $\frac{16}{82}pqr^3$.
2. $78x^2y^2z^3$.
3. $3a^5b^8c^7-4a^2b^2c^2x^2$.
4. $\frac{12}{5}a^2b^3c^2$.
5. $-\frac{1}{2}yz^2$.
6. $(x+y)^2$; $(a-b)^2$, $(ax+by)^4$.
7. $5a^2-3ax+x^2$.
8. $2x^2-\frac{3}{2}y^2+\frac{6}{5}z^2$.
9. $2a^3-3ay^2z-4yz^3$.
10. $(a^2+b)^4$, $(x^2+y^2)^4$, $(ax+by+cz)^n$.
11. $-x+\frac{3}{8}y+\frac{1}{2}z$.
12. $-4x^2y+2xy^2+y^3$.

प्रश्नावली 35.

1. x^2+x+1.
2. $2x^2+5x-3$.
3. a^4-a^2+a.
4. $x^2+y^2+a^2$.
5. x^2-3x-1.
6. $y-1$.
7. $2x^2-3x-12$.
8. x^2-8x+1.
9. $3x^3-4x^2+6x-12$.
10. $x^2+2xy+2y^2$.
11. $-2a+3$.
12. $-32x^5-16x^4-8x^3+2x+1$.
13. $x^3+2x^2+7x+20$.
14. x^3+x^2+5x+2.
15. $3x+2y-z$.
16. x^2-5x+1.
17. $1-a-b+ab$.
18. $1-2a$.
19. $2x^2+x-1$.
20. $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+1$.
21. $x^2+4y^2+9z^2-2xy+6yz+3zx$.
22. $x^2+y^2+1-xy+x+y$.
23. $2x^2-3x-8$.
24. x^3-3x^2-2x+1.
25. $2x^2-x+3$.
26. $3-x^2+2x^3$.
27. $1+x$.
28. $x-3$.
29. 3.

प्रश्नावली 36.

1. $5ax+1.$ 2. $x-\frac{3}{4}y.$ 3. $\frac{3}{4}a+1.$

4. $x+\frac{4}{3}.$ 5. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2.$ 6. $\frac{1}{24}a^2-\frac{1}{36}a+\frac{1}{54}.$

7. $x^3+\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{9}xy^2+\frac{1}{27}y^3.$

8. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{16}z^2-\frac{1}{6}xy-\frac{1}{12}yz-\frac{1}{8}zx.$

9. $a^4-a^3b+\frac{1}{3}a^2b^2-\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{9}b^4.$

10. $\frac{1}{2}x^3-5x^2+\frac{1}{4}x+9.$ 11. $ax^2+bx+c.$

12. $x+a.$ 13. $ab+ac+bc.$ 14. $x^2+(a+b)x+b^2.$

15. $x+y.$ 16. $x^2+ax+c.$ 17. $x^2-x+(a^2-a).$

18. $3x^3+2x^2-4x-10.$ 19. $x+3y+2z.$

प्रश्नावली 37.

1. भागफल $=2x^2-3$, भागशेष $=-3$.
2. भागफल $=3x^2+4x$; भागशेष $=6x-5$.
3. भागफल $=x^2-x-1$; भागशेष $=3x+10$.
4. $2x^2+x+7-\dfrac{14x+3}{x^2+3x+1}.$
5. $x^3-7x^2+50x-351+\dfrac{2460}{x+7}.$
6. आंशिक भागफल $=1+5x+15x^2+45x^3$, और भागशेष $=135x^4$.
7. आंशिक भागफल $=1+x+x^2+x^3$, और भागशेष $=x^4$.
8. आंशिक भागफल $=1+x^2-x^3+x^4$, और भागशेष $=-x^5$.
9. आंशिक भागफल $=-1-3a-6a^2-6a^3$, और भागशेष $=6a^4$.
10. $x^3-4x^2+5x-2.$ 11. $x^2-5x+3.$
12. भागफल $=x^2-x+(c+3)$, भागशेष $=9-3c$; 3.

प्रश्नावली 38.

1. 15. 2. $a+b.$ 3. 4.

4. $a^2+ab.$ 5. $(a+b);\ -(a+b).$

6. प्रत्येक 5 पं० की दर से ।

विविध प्रश्नावली III.

I.

1. $8x-5$. 2. $x-7y$. 3. $(ax-by-cz)+(bx-cy+az)$; $(a+b)x-(b+c)y-(c-a)z$.

4. $2x-y$. 5. छात्र-संख्या $4x-19$, 54.

II.

1. $5a-6x-18$. 2. $-\frac{9}{5}$. 3. $15x^2+11x-14$ बुशल ।

4. $4x^4-25x^2+36$. 5. $\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{12}xy+\frac{1}{6}yz-\frac{1}{8}zx$.

III

1. $6\frac{1}{2}$. 2. $\frac{7}{8}x+\frac{5}{8}y$. 3. -315. 4 6; 40. 5. 2.

IV.

1. 1. 2. $\cdot06-\cdot3x+\cdot2x^2-x^3$, $-3\cdot315$.

3. $(1+x)$ मन । 4. $x^4-x^3-2x^2+4x$.

5. (0, 0); (2, 3), (4, 6); इत्यादि ।

V.

1. $\frac{11}{6}y-\frac{1}{6}z$. 2. $21\cdot7$ इकाई मोटे तौर से । 3. 5.

4. (i) $x=5\frac{1}{10}$; (ii) $x=-129\frac{3}{13}$. 5. 3 मील उत्तर की ओर ।

VI.

1. भागफल 2.

2. $3x^2-xz-5xy+5yz-3xz^2+z^2y-xy^2z+y^2z^2$, -11.

3. $2x^2-2(a+b)x+ab$. 4. 9 घंटे ।

VII.

1. $x-y$. 2. x^2-y^2.

3. $a^3-4a^{\frac{8}{3}}+7a^{\frac{7}{3}}-7a^2+4a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}$. 4. $x^{-4}+y^{-4}+x^{-2}y^{-2}$.

5. $x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}}+x^{-\frac{4}{5}}y^{-\frac{1}{5}}+xy^{-1}+x^{-1}y^{-1}+x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{6}{5}}+x^{-\frac{1}{5}}y^{-\frac{4}{5}}$
$+y^{-2}+2$. 6. $1-4x^{\frac{2}{3}}+8x-8x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{5}{3}}-x^2$.

7. $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$. 8. $x^{\frac{1}{3}}-2$. 9. $a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}+2$.

10. $m^{\frac{7}{11}}+n^{\frac{2}{11}}$. 11. $x^{-2}+y^{-3}-2$.

प्रश्नावली 39.

1. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc.$
2. $9x^2+4y^2+z^2-12xy+6xz-4yz.$
3. $p^2+4q^2+r^2+4pq-2pr-4qr.$
4. $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2.$
5. $x^2+y^2+2xy+6x+6y+9.$
6. $a^2+b^2-2ab+4a-4b+4.$
7. $4pq-2pr+4qr.$
8. $x^2+y^2+z^2.$
9. $a^2+4b^2+9.$
10. $x^2+4y^2+z^2.$
11. $6x^2y-6x^2z+2yz.$
12. $4x^2y^2+4y^2z^2.$
13. $12ab-30ac-20bc.$
14. $x^4+x^2+1.$
15. $2x^3y^3-2x^3z^3-2y^3z^3.$

प्रश्नावली 40.

1. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd.$
2. $4x^2+y^2+z^2+u^2-4xy+4xz+4xu-2yz-2yu+2zu.$
3. $9x^2+4y^2+z^2-12xy+6xz-4yz-6x+4y-2z+1.$
4. $\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{25}b^2-\frac{1}{4}xy+\frac{1}{6}ax-\frac{1}{10}bx$
$-\frac{1}{3}ay+\frac{1}{5}by-\frac{2}{15}ab.$

प्रश्नावली 41.

1. $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2.$
2. $(a+1)^2-(1)^2.$
3. $(x+5)^2-(1)^2.$
4. $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2.$
5. $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2.$
6. $\frac{1}{4}(3x-1)^2-\frac{9}{4}(x-1)^2.$
7. $\frac{1}{4}(x^3+y^3)^2-\frac{1}{4}(x^3-y^3)^2.$
8. $(x+\frac{1}{8})^2-(\frac{3}{8})^2.$
9. $(a+1)^2-(a-1)^2.$
10. $\left(\frac{a^2+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b}{2}\right)^2.$
11. $x^2-(2y)^2.$
12. $(a-\frac{1}{2})^2-(\frac{7}{2})^2.$
13. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b+2}{2}\right)^2.$
14. $(x-\frac{24}{7})^2-(\frac{25}{7})^2.$
15. $(x+6)^2-(2)^2.$

प्रश्नावली 42.

1. $2x^2+3x+1$.
2. $6x^2+7x-20$.
3. $2x^2-5x-7$.
4. $6p^2-19p+15$.
5. $-p^2+8p-12$.
6. $-2x^2+15x-27$.
7. $2x^4+x^2-1$.
8. $2a^4-a^2-1$.
9. $4x^2+5x-6$.
10. $14x^2-\frac{13}{2}x-\frac{3}{2}$.
11. $\frac{1}{6}a^2-6$.
12. $2a^4-5a^2-25$.
13. $6a^4+a^2-2$.
14. $2a^6+a^3-1$.
15. $12x^6-19x^3+5$.

प्रश्नावली 43.

1. $x^3+9x^2+26x+24$.
2. $x^3-4x^2-7x+10$.
3. $a^3-10a^2+27a-18$.
4. m^3-8m^2+m+42.
5. $x^3-5x^2-17x+21$.
6. $x^3-9x^2+2x+48$.
7. $a^3-11a^2+38a-40$.
8. $a^3-6a^2+11a-6$.
9. $a^6+6a^4+11a^2+6$.
10. $p^3+4p^2-11p-30$.

प्रश्नावली 44.

1. $p^3+q^3+r^3-3pqr$.
2. $8a^3-27b^3+27c^3+54abc$.
3. $a^3+x^3+6ax-8$.
4. $x^2+4y^2+9z^2-2xy+3xz+6yz$.
5. $2m-3n+4p$.

प्रश्नावली 47.

1. $m(a-b)$.
2. $xy(x+y)$.
3. $pq(r-qs)$.
4. $axy(a+x-y)$.
5. $2m^2n^2(m+3n-2)$.
6. $(x+y)(a^2+b^2+c^2)$.
7. $(2a+3c)(p^2+3a+2b)$.
8. $(a^2-bc)(x^2+y^2-z^2)$.
9. $(x-y)(a^3+b^3+2xy)$.
10. $(p-q)(a^2+ab+b^2)$.
11. $x(a+b+c)$.
12. 0.
13. $2(a^2+b^2+c^2)x^2$.

प्रश्नावली 48.

1. $(a+1)^2$.
2. $(x-50)^2$.
3. $(m-2)^2$.
4. $(4p-3q)^2$.
5. $(5a+7b)^2$
6. $(4m-5)^2$.
7. $(7x-150)^2$.

प्रश्नावली 49.

1. $(2a+3b)(2a-3b)$. 2. $(p+1)(p-1)$.
3. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$. 4. $(ab+xy)(ab-xy)$.
5. $(5+x)(5-x)$. 6. $9(3+z)(3-z)$.
7. $(25x+y)(25x-y)$ 8. $4a(3a+4x)(3a-4x)$.
9. $6x(3x+5y)(3x-5y)$. 10. $2p^2q(3p^2+q^2)(3p^2-q^2)$.
11. $(2a+3)$. 12. $(5a-3)(a-1)$. 13. $(7x-2)(x-12)$.
14. $4bc$. 15. $8y(x+3z)$.

प्रश्नावली 50.

1. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$. 2. $(a^2+3a+1)(a^2-3a+1)$.
3. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$.
4. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.
5. $(7x^2+4xy^2-2y^4)(7x^2-4xy^2-2y^4)$.
6. $(8a^2+4a+1)(8a^2-4a+1)$.
7. $(3a^2+3a+1)(3a^2-3a+1)$.
8. $(x^2+7x+4)(x^2-7x+4)$.
9. $(2m^2+5mn+n^2)(2m^2-5mn+n^2)$.
10. $(3p^2+8p+2)(3p^2-8p+2)$.
11. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
12. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.
13. $(4a^2+5ab-3b^2)(4a^2-5ab-3b^2)$.
14 $(16x^2+40xy+50y^2)(16x^2-40xy+50y^2)$.
15. $(3m^2+9m+5)(3m^2-9m+5)$.
16. $(4x^2+6x-3)(4x^2-6x-3)$.
17. $(2a^2+6ax-3x^2)(2a^2-6ax-3x^2)$.
18. $(6x^2+10ax-a^2)(6x^2-10ax-a^2)$.
19. $(a+b+c)(a-b-c)$. 20. $(a+b+2c)(b+2c-a)$.
21. $(3a+4b+c)(3a-4b+c)$. 22. $(2x+y+3z)(2x+y-3z)$.
23. $(p-3q+9r)(p-3q-9r)$. 24. $(x-2y+1)(x-2y-1)$.
25. $(1+m-3n)(1-m+3n)$. 26. $(2y+3z)(2y-3z-2x)$.

27. $(b-c)(2a+b+c)$. 28. $(a+b+x-y)(a+b-x+y)$.
29. $(2m-3n+3a-2b)(2m-3n-3a+2b)$.
30. $(2x+5y+3a+2)(2x+5y-3a-2)$.
31. $(x+y+z-a)(x+y-z+a)$.
32. $(10a+3x+6b-5y)(10a+3x-6b+5y)$.

प्रश्नावली 51.

1. $(x+1)(x+2)$ 2. $(x+2)(x+3)$.
3. $(a+3)(a+4)$ 4. $(a+4)(a+5)$.
5. $(x+2)(x-1)$. 6. $(x-2)(x-3)$.
7. $(x-3)(x-4)$ 8. $(a+5)(a-4)$.
9. $(a-3)(a-5)$. 10. $(a+7)(a-3)$.
11. $(x-7)(x+4)$. 12. $(a-10)(a+1)$.
13. $(p-2)(p-8)$. 14. $(m-5)(m+2)$.
15. $(m+8)(m+3)$. 16. $(m-6)(m-2)$.
17. $(x+6)(x-4)$. 18 $(x-10)(x-7)$.
19. $(y-3)(y+2)$. 20. $(y-9)(y+7)$.
21. $(a-7)(a-8)$. 22. $(a+3)(a+11)$.
23. $(a+9)(a+1)$. 24. $(a+4)(a-6)$.
25. $(p+3)(p+10)$. 26. $(p+7)(p-2)$.
27. $(n-20)(n+10)$. 28. $(n+1)(n+11)$.
29. $(z-12)(z+9)$. 30. $(z+2)(z-30)$.
31. $(x+2)(2x+1)$. 32. $(2x+3)(2x+1)$.
33. $(2x+3)(3x+2)$. 34. $(3x-2)(2x-1)$.
35. $(3x+2)(4x-1)$. 36. $(3x-4)(x+1)$.
37. $(2x-3)(6x+1)$. 38. $(4x-3)(7x-5)$.
39. $(2x+9)(3x+7)$. 40. $(2x+7)(4x-9)$.
41. $(x+10)(10x+1)$. 42. $(a+5)(5a+1)$.
43. $(3a+5)(5a+3)$. 44. $(2a-7)(7a-2)$.
45. $(6a+7)(5a-2)$. 46. $(3m+8)(4m-7)$.
47. $(3m+7)(5m+2)$. 48. $(3m-10)(5m-12)$.
49. $(4p-9)(2p+3)$. 50. $(3p+5)(7p-1)$.

51. $(a+b)(2a+b)$.
52. $(2a-3b)(3a+2b)$.
53. $(4x+5y)(3x+2y)$.
54. $(5x+12y)(6x+y)$.
55. $(3x+7y)(2x-y)$.
56. $(3m-4n)(4m-3n)$.
57. $(m-10n)(2m-7n)$.
58. $(2a-3x)(4a+7x)$.
59. $(6a+5x)(2a-3x)$.
60. $(2a+9x)(3a-5x)$.
61. $(4a-21b)(a+b)$.
62. $(2m+7a)(3m-5a)$.
63 $(4a-3n)(5a-7n)$.
64. $(2p+q)(3p-10q)$.
65. $(7p-q)(p+7q)$.
66. $(b+5c)(3b-7c)$.
67. $(2m-x)(3m-4x)$.
68. $(3x+2a)(5x+6a)$.
69. $(a^2+3)(a^2+4)$.
70. $(4x^2-5)(3x^2+2)$.
71. $(a^3+2)(2a^3-5)$.
72. $(a^4+3x)(a^4-2x)$.
73. $(a^3-2x^2)(2a^3+3x^2)$.
74. $(x^5+7)(2x^5-3)$.
75. $(a^3+2x^3)(2a^3-5x^3)$.
76. $(2a-b+10)(2a-b+4)$.
77. $(3a-2x-7)(3a-2x+6)$.
78. $2(x-5)(2x+5)$.
79. $(2x+4y-7)(3x+6y+5)$.
80. $(12x-16a-1)(9x-12a+7)$.
81. $5(6a-b)(2a-b)$.
82. $-(23x+10y)(19x+4y)$.
83. $(12x-31y)(13x-29y)$.

प्रश्नावली 52.

1. $(x+7)(x+5)$.
2. $(x+3)(x-9)$.
3. $(x-3)(x-7)$.
4. $(a+2)(a-9)$.
5. $(a+7)(a-6)$.
6. $(a+2)(a-5)$.
7. $(a+1)(a-10)$.
8. $(a+5)(a-8)$.
9. $(a+6)(a-11)$.
10. $(m+5)(m-7)$.
11. $(m-1)(m-20)$.
12. $(m-4)(m-8)$.
13. $(p-3)(p-9)$.
14. $(p+3)(p-7)$.
15. $(p+8)(p-5)$.
16. $(x^2-2)(x^2-3)$.
17. $(a^2+2)(a^2-7)$.
18. $(a-1)(a^2+a+1)(a^3+4)$.
19. $(x+2y)(x-5y)$.
20. $(x+7y)(x-3y)$.
21. $(x+4y)(x-5y)$.
22. $(a+4b)(a+2b)$.
23. $(a-b)(a-8b)$.
24. $(a+5b)(a-6b)$.
25. $(m+5n)(m-3n)$.
26. $(m+2n)(m-10n)$.
27. $(m-4n)(m-6n)$.

28. $(3x+2)(2x-1)$. 29. $(3x+4)(4x-1)$.
30. $(2x+3)(4x-7)$. 31. $(5x-3)(3x-5)$.
32. $(4x-3)(2x-7)$. 33. $(2x-5)(3x-10)$.
34. $(3a+7x)(2a-5x)$. 35. $(6a-5x)(a-3x)$
36. $(2a-9x)(a-5x)$. 37. $(5m-8n)(m-4n)$.
38. $(4m+5n)(m-6n)$.
39. $(2x^2+3a^2)(4x^2-5a^2)$. 40. $(2a^3+3b^3)(6a^3-b^3)$.

प्रश्नावली 53.

1. $(p-4q)(p^2+4pq+16q^2)$. 2. $(2a-1)(13a^2+5a+1)$.
3. $(5x^2-1)(25x^4+5x^2+1)$.
4. $(3a^3+x^4)(9a^6-3a^3x^4+x^8)$.
5. $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.
6. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ $(a^4-a^2b^2+b^4)$.
7. $xy(y-x)(y^2+yx+x^2)$. 8. $(7x+2)(49x^2-14x+4)$.
9. $(a-b)(a+3b)(a^4-2a^3b-2a^2b^2+6ab^3+9b^4)$.
10. $(a-b)(a-2b)(a^4+3a^3b+13a^2b^2+6ab^3+4b^4)$.

प्रश्नावली 55.

34. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$.

38. (i) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$; (ii) $\frac{x}{4}(x^2+3y^2)$; (iii) xy; (iv) $\frac{x^2-y^2}{4}$.

प्रश्नावली 56.

1. a. 2. ax. 3. mn.
4. $4a^2x^3$. 5. $36y^2y^2z^3$. 6. $12a^2b^3c^3d$
7. $8a^2m^2$. 8. $9x^2y^3$. 9. $14n^2x^2$.
10. x. 11. $x-y$. 12. $2(x+y)$.
13. p^2+q^2. 14. $mn(m+n)$. 15. a^2+1.
16. $a(x^2+2)$. 17. $2(a^2-a+1)$. 18. $ab(a-b)$.

19. x^2-xy+y^2.
20. $x+3y$.
21. $4x^2y^2(x+4y)$.
22. $3a^2b^2(a-3b)$.
23. $m^2n^2(a^2+ab+b^2)$.
24. $x+y+z$.
25. $(x-9)(x-3)$.
26. $(x+3)(x+4)$.
27. $a+b+c$.
28. $x(a+x)$.
29. $y(x-2y)$.
30. $x+4$.
31. $2(x-3)$.
32. $4a^2b^2(a+5b)$.

प्रश्नावली 57.

1. $x-5$.
2. $x+5$.
3. $3x-2$.
4. $3x-1$.
5. $3x-2$.
6. $1+x^3-x^4$.
7. $x-2$.
8. $2x-3$.
9. $x-2$.
10. $x-2a$.
11. x^2-2x-1.
12. x^2+3x+2.
13. $2x-3$.
14. $x+5$.
15. x^2+x+1.
16. $3x^2+2ax+a^2$.
17. x^2-3x+2.
18. x^2+5x+2.
19. $2x^2+7x+3$.
20. x^2-2x+3.
21. x^2+x+2.
22. $2x-3$.
23. $3x+1$.
24. $x+2a$.
25. a^2-b^2.

प्रश्नावली 58.

1. abc.
2. x^3y^3.
3. $12m^2n^2$.
4. $42x^3y^3$.
5. $60a^3b^2c^2$.
6. $60m^3n^3p^3q^2x^3y$.
7. $180a^6b^3c^6x^3y^3z^6$.
8. $90a^3b^3c^3d^3x^3y^3$.
9. $24a^2b^2m^3n^2x^3y^3$.
10. $60a^6b^8m^9n^{10}p^{16}q^{12}$.
11. $12(a^3-x^2)$.
12. $24(a-2x)(a^2-4x^2)$.
13. $(m^3-n^3)(m^2-mn+n^2)$.
14. $(a^2-b^2)(b^2-c^2)$.
15. $(a^3+x^3)(a^3-x^3)$.
16. $60a^2b^2c^2(b^2-c^2)^2$.
17. $21xy(x-y)^2(x^3-y^3)$.
18. $20m^2n^2(m-n)(m^3+n^3)$.
19. $6a^2x^2(x^4-1)(x^2+x+1)$.
20. $x^2y^2(a^6-1)$.
21. $(x+1)(x+2)(x+3)$.
22. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
23. $(x+2)(x+3)(x+5)$.
24. $(a^2-1)(a-6)$.
25. $(m^2-1)(m-3)(m-5)$.
26. $(x+2)(x+6)(x-2)^2$.

27. $a^2x(a+2x)(a^2-x^2)$.　　28. $a^2x^2(a-2x)(a^2-x^2)$.
29. $(x^2-1)(x^2-4)$.　　30. $(2x+1)(x^2-1)$.
31. $(a^4-b^4)(a^2+ab+b^2)$.　　32. $(x-1)(x-2)(x+3)$.
33. $(x+y)(y+z)(z+x)$.
34. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$.
35. $(x+2)(x-3)(x+4)$.
36. $(8a^3-27b^3)(3a^2-ab-2b^2)$.
37. $x(3x+1)^2(29x-7)(9x^2-3x+1)$.
38. $(x^4-16a^4)(x^4+4a^2x^2+16a^4)$.

प्रश्नावली 59.

1. $x^5+4x^4+6x^3+x^2-6x-6$.
2. $6x^4-23x^3+35x^2-29x+12$.
3. $12x^5-3x^4-8x^3+2x^2-4x+1$.
4. $3x^4-22ax^3+56a^2x^2-58a^3x+21a^4$.
5. $x^4+x^3-2x^2-x+1$.　　6. $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$.
7. $12a^5+43a^4-3a^3+9a^2-19a-6$.
8. $6a^4-33a^3x-23a^2x^2+31ax^3-6x^4$.
9. x^4-5x^2+4.
10. $ax^6+a^2x^5-7a^3x^4+a^4x^3-8a^5x^2+20a^6x$.
11. $2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$.
12. $4a^6-6a^5+10a^4-a^3-12a^2+15a-18$.
13. $3x^6-25x^5+6x^4+177x^3+119x^2+6x-6$.
14. $x^2-12x+35$.　　15. x^3+2x^2-5x-6.
16. ल० स० अ० $=6x^5-11x^4-28x^3+112x^2-174x+63$;
म० स० $=3x-7$.

प्रश्नावली 60.

1. $x^4+18x^3+119x^2+342x+360$
2. $x^5-17x^3+12x^2+52x-48$.
3. $x^4-58x^2-192x-135$.　　4. x^3-7x+6.

5. $2a^6-11a^5x-38a^4x^2+241a^3x^3+46a^2x^4-1040ax^5$
$+800x^6$.

6. $x^6+5x^5-33x^4-149x^3+212x^2+684x-720$.

7. $3x^6+16x^5-51x^4-166x^3+404x^2-40x-96$.

8. $x^6+6x^4+9x^2-16$.

9. $x(3x+1)^2(29x-7)(9x^2-3x+1)$.

10 $(8x^3+27)(4x^2+6x+9)(6x^2-5x-6)$.

11. $6x^4-31x^3+29x^2+54x-72$. 12. $2x^2-7x-15$.

13. $x^6-17x^5+32x^4+723x^3-3959x^2+5360x-700$.

प्रश्नावली 61.

1. a. 2. $\frac{c}{ab}$. 3. $\frac{a}{x}$.

4. $\frac{4a^2}{3xz}$. 5. $\frac{3a^2x^2y^2}{2b^2}$. 6. $\frac{9a}{5m^2n}$.

7. $\frac{4c^3d^5}{15pq}$. 8. $\frac{b^3c^3d^3}{6a^2}$. 9. $\frac{2kl}{3mn}$.

10. $\frac{9x^2zl^2}{42ymn}$. 11. $a-x$. 12. $a-x$.

13. $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$. 14. $\frac{3a(a-b)}{4c(a+b)}$. 15. $\frac{x(x-y)}{3y(x^2-xy+y^2)}$.

16. $\frac{xy}{4(x-y)}$. 17. $\frac{2a}{x^2+2y^2}$. 18. $\frac{-2abc}{3b-2c}$.

19. $\frac{4m-3n}{3n}$. 20. $\frac{x+1}{x-2}$. 21. $\frac{a+3}{a-5}$

22. $\frac{x+2}{x+4}$. 23. $\frac{x-2}{x-1}$. 24. $\frac{y(x-6y)}{x(x+4y)}$.

25. $\frac{2a+3b}{a+3b}$. 26. $\frac{m+3}{m+1}$. 27. $\frac{2n(m+7)}{3m(m+6)}$.

28. $\frac{x^2+3x+9}{x-4}$ 29. $\frac{a^2+2ax+4x^2}{a+2x}$. 30. $\frac{x+1}{x+2}$.

31. $\frac{a+1}{a+5}$ 32. $\frac{a-1}{a^3-a+1}$. 33. a^2+ab+b^2

प्रश्नावली 62.

1. $\frac{a^2}{ab}, \frac{b^2}{ab}$. 2. $\frac{2ad}{3bd}, \frac{4ac}{3bd}$. 3. $\frac{9aby}{12bxy}, \frac{10ax^2}{12bxy}$.

4. $\frac{x^2z}{xyz}, \frac{y^2x}{xyz}, \frac{z^2y}{xyz}$. 5. $\frac{5a^2b^3}{5b^2c^2d}, \frac{4a^2c^3}{5b^2c^2d}$.

6. $\frac{20a^4b^3c^2}{30abcxy^2z}, \frac{12x^2y^3z^3}{30abcxy^2z}$. 7. $\frac{(x+a)^2}{x^2-a^2}, \frac{2x}{x^2-a^2}$.

8. $\frac{4xy(x^2+xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}, \frac{(x-y)(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}$.

9. $\frac{2a(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)(a^3-b^3)}, \frac{12b(a+b)}{3(a+b)(a^3-b^3)}$.

10. $\frac{b(3a^2-b^2)}{ab}, \frac{a(4a^2-3b^2)}{ab}$.

11. $\frac{x(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{y(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{xy}{a^2-b^2}$.

12. $\frac{bc(b+c)(b^2+bc+c^2)}{(b+c)(b^3-c^3)}, \frac{ca(b^2+bc+c^2)}{(b+c)(b^3-c^3)}, \frac{ab(b+c)}{(b+c)(b^3-c^3)}$.

प्रश्नावली 63.

1. $\frac{3a+2ab}{6}$. 2. $\frac{x^2-y^2}{xy}$.

3. $\frac{a^2+b^2}{b(a-b)}$. 4. $\frac{b^2+ac-1}{bc}$.

5. $\frac{a^2+b^2}{ab}$. 6. $\frac{x^2+y^2-z^2}{xyz}$

7. $\frac{(3y-x)(y+2x)}{6xy}$. 8. $\frac{2x-1}{3x}$.

9. $\frac{4x^2-4x-1}{4x}$. 10. 0.

11. $\frac{b^2-ac}{(a-b)(b-c)}$. 12. $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

13. $\frac{a^2b^2+(a-b)^2}{ab(a-b)}$. 14. $-\frac{2}{x^2-1}$.

15. $-\frac{x}{(x-4)(x-5)}$. 16. 0

17. $\frac{3}{(x+1)(x+2)}$. 18. $\frac{-3x}{(x+1)(x+2)}$.

19. $\frac{4}{x+1}$. 20. $\frac{3}{(x+1)(x+3)(x+4)}$.

21. $\frac{2x}{x^3-8}$. 22. $\frac{5}{(x-2)(x-3)(x+4)}$.

23. $\frac{-5(3x+13)}{(x^2-4)(x^3-27)}$. 24. $\frac{b^2}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}$.

25. 0.

प्रश्नावली 64.

1. $\frac{2c}{b}$. 2. $\frac{8bx}{3ay}$. 3. $\frac{3bc}{10xy}$. 4. $\frac{4bx}{3ay}$.

5. $\frac{p^2}{abx}$. 6. $\frac{2pq^3}{9a^2b^5}$. 7. $\frac{b^2x}{ay^2}$. 8. $\frac{m^2n}{cd^8}$.

9. $\frac{3b}{2cx}$. 10. $\frac{pz}{ry}$. 11. $\frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}$. 12. $\frac{3a(a+x)}{2x}$.

13. $\frac{4c}{a(b+c)}$. 14. 1. 15. $\frac{p-3q}{4p}$. 16. $\frac{4m}{m+2n}$.

17. $\frac{a}{b-c}$. 18. $\frac{a}{c}$. 19. $\frac{2x^3}{a}$. 20. $\frac{a+b}{a-4b}$.

21. $\frac{a^3}{x^3}-\frac{b^3}{y^3}$. 22. $\frac{2}{3x^2}$. 23. $-\frac{1}{y}$.

24. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{y^4}{b^4}$. 25. $\left(\frac{a-b}{x+y}\right)^2$. 26. $\frac{a-3x}{a-x}$.

27. $\frac{a+1}{a+7}$. 28. $\frac{a-1}{a-7}$.

29. 1. 30. $\frac{1}{x^3y^3}$. 31. $\frac{1}{x+y}$.

32. 1. 33. a^2+b^2. 34. a^2-ab+b^2.

35. $\frac{a}{b}$. 36. $x+1$. 37. $\frac{x+y}{y^2(x^2+xy+y^2)}$.

38. 4. 39. $\frac{4(a+1)}{a^2-a+1}$. 40. $\frac{x^2-y^2}{xy}$.

प्रश्नावली 65.

1. $x=0$. 2. $x \quad -\frac{11}{7}$. 3. $x=\frac{13}{15}$.

4. $x=2\frac{275}{388}$. 5. $x=20$. 6. $x=7$.

7. $x=0$. 8. $x=11$. 9. $x=4\frac{1}{2}$.

10. $x=3$. 11. $x=6$. 12. $x=10$.

13. $x=\frac{1}{2}$. 14. $x=-\frac{a}{4}$.

15. $x=\frac{a^2+b^2+c^2-3bc}{2a-b-c}$. 16. $x=0$.

17. $x=\frac{a+b+c}{3}$. 18. $x=a+b+c$.

19. $x=a+b$. 20. $x=1$. 21. $x=-\frac{1}{7}$.

22. $x=8$. 23. $x=100$. 24. $x=0$.

25. $x=0$.

प्रश्नावली 66.

1. $x=4$. 2. $x=6\frac{3}{5}$. 3. $x=0$.

4. $x=\frac{b^2-ac}{b-c}$. 5. $x=a+b+c$. 6. $x=-\frac{5}{9}$.

7. $x=3$. 8. $x=\frac{1}{63}$. 9. $x=2\frac{1}{9}$.

10. $x=5\frac{17}{19}$. 11. $x=-2\frac{70}{111}$. 12. $x=-\frac{12}{301}$.

13. $x=7$. 14. $x=20$. 15 $x=5$.

16. $x=6$. 17. $x=-\frac{3}{4}$. 18. $x=-2$.

19. $x=6$: 20. $x=\frac{185}{284}$. 21. $x=-\frac{27}{29}$.

22. $x=6$. 23. $x=11$. 24. $x=10$.

25. $x=1\frac{11}{24}$. 26. $x=a+b$. 27. $x=19$.

28. $x=6$. 29. $x=1$. 30. $x=-3$.

31. $x=\frac{5}{9}$. 32. $x=7$. 33. $x=a+b$.

34. $x=4$. 35. $x=2$. 36. $x=-\frac{5}{8}$.

37. $x=3\frac{2}{3}$. 38. $x=4\frac{1}{4}$. 39. $x=4$.

40. $x=7$.

प्रश्नावली 67.

1. $x=7\frac{1}{2}$. 2. $x=9\frac{1}{2}$. 3. $x=4$.
4. $x=-\frac{7}{2}$. 5. $x=-\frac{5}{8}$. 6. $x=-\frac{1}{2}$.
7. $x=\frac{3}{2}$. 8. $x=8$. 9. $x=7$.
10. $x=\frac{8}{71}$. 11. $x=-\dfrac{2(a-b)}{2a-b}$. 12. $x=\frac{1}{2}(a+b)$.
13. $x=\frac{1}{2}(a^2+d^2)$. 14. $x=5\frac{1}{2}$. 15. $x=\frac{1}{2}(a+b)$.
16. $x=9$. 17. $x=3$. 18. $x=5$.
19. $x=4\frac{2}{7}$. 20. $x=8\frac{2}{3}$.

प्रश्नावली 68.

1. 315. 2. 864. 3. 12, 35, 5, 75.
4. $\frac{3}{4}$. 5. 6 दिन। 6. 25 दिन।
7. 4 दिन। 8. 5 घं०। 9. 30 घ०।
10. 6 घं०। 11. प्र० घं० 4 मी०। 12. प्रति घं० 10 मी०।
13. प्रति घं० $8\frac{1}{4}$ मील। 14. दिन को 12 बजे।
15. दिन को 12 बजे और A से 125 मील की दूरी पर।
16. P से $2\frac{2}{3}$ मील की दूरी पर। 17. 15 मि० बाद।
18. यात्रा करने के 1 घं० 40 मिनट बाद। 19. 10 मि० बाद।
20. प्रत्येक 3 पैसे की दर से। 21. 80 पौं०।
22. $2\frac{1}{2}$ पैसे में 1 के हिसाब से; 132.
23. प्रति काठा 440 रु०। 24. 35 सेर।
25. 420 औंस ताँबा; 255 औंस टिन।
26. 6 औंस और 4 औंस। 27. 1 बजकर $5\frac{5}{11}$ मिनट पर।
28. 3 बजकर $49\frac{1}{11}$ मिनट पर। 29. 3 बजकर $21\frac{57}{143}$ मिनट पर।
30. 150. 31. 144. 32. 11.
33. 72. 34. 16 फ़ुट। 35. 260 फ़ुट।
36. $\frac{1}{5}(a+4b)$.

विविध प्रश्नावली IV.

I.

1. $x-y-2y^{\frac{1}{2}}-1$. 2. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.
4. $3x^4+3y^4+10x^2y^2$.
5. $(2x-3y+1)(4x^2+9y^2+6xy-2x+3y+1)$.
6. x^2+xy+y^2. 7. x^6-a^6. 8. 1.
9. $x=\frac{2}{15}$. 10. 15 दिन ।

II.

1. $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+1$. 2. $x^2-xy-xz+yz$.
3. $(9x-2y^2)(81x^2+18xy^2+4y^4)$.
5. $x-2$. 6. $(x-1)(x-2)(x+3)$. 7. 0.
8. $x=2\frac{1}{2}$. 9. $x=5$. 10. यात्रा करने के 2 घंटा बाद ।

III.

1. $16x^4+36x^2y^2+81y^4$. 2. $3(b+c)(a-c)$.
3. $(2x+5y)(3x-4y)$. 4. 999700.
5. 40. 6. $(x+2)(x+3)(x-4)$.
7. $\frac{a+3}{a-2}$. 8. $x=\frac{bc^2+ca^2+ab^2-a-b-c}{bc+ca+ab-1}$.
9. घंटे में 12 मील । 10. 4 बजकर $21\frac{9}{11}$ मिनट पर ।

IV.

1. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.
2. $3(a+2b+c)(a+b+2c)$. 3. 104. 4. $(a+b+c)^3$
5. x^2+x+1. 6. $\frac{xyz}{x+y-z}$. 7. $x=7$.
8. $x=1$. 9. प्रति सैकड़ा $7\frac{1}{2}$ के लाभ पर । 10. 14.

V.

1. 7. 2. 1. 4. $(a+b)(a+c)$.
5. $(9x^2+42xy+98y^2)(9x^2-42xy+98y^2)$.
6. 1. 7. 0. 8. $x=\frac{4}{5}$. 9. $x=\frac{ab}{a-2b}$.
10. 9 बजकर $16\frac{4}{11}$ मिनट पर ।

VI.

1. $x^3+\frac{3}{5}x-\frac{2}{7}$. 2. (i) $a(a-1)(a+1)^2(a^2-a+2)$; (ii) $xy(xy-5)(xy-4)$. 3. $\frac{2a}{1-a^2}$. 4. $-\frac{ab}{c}$.

5. $x=1$. 6. $(2x+3y+z)(2x-3y-z)(2x+3y-z)$.

7. $\frac{a(1-b^2)}{b(1-a^2)}$. 8. $x=4$. 9. 528. 10. 225.

VII.

1. a^2-ab+b^2. 2. $\frac{3x-y}{2}$. 3. a.

4. (a) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6+2)$.

(b) $(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

6. $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$. 7. $x=6$. 8. $x=\frac{a^2-b^2}{b}$.

9. 6 गलन । 10. घंटे में $3\frac{1}{2}$ मील ।

VIII.

1. $4x^6-4x^5+x^4-4x^3+6x^2+9$.

2. $x(x^2-1)$. 3. $x=-\frac{1}{2}$. 4. $\frac{1}{x-8}$. 7. $x=5\frac{1}{2}$.

8. $m^{\frac{7}{2}}+m^3n^{-\frac{1}{2}}-m^{-\frac{3}{2}}-m^{-1}n^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}n^{-3}+m^{-\frac{1}{2}}n+n^{\frac{3}{2}}$
$+n^{-\frac{7}{2}}$.

9. 76 पौं० सोना; 30 पौं० चाँदी । 10. 140.

प्रश्नावली 69.

1. $(x+y)^2+(x+2y)^2$. 2. $(3a+4b)^2+(2a-b)^2$.

3. $(x+2y)^2+(y+z)^2$. 4. $(x^2+3x+3)^2-(x^2+2x-1)^2$.

5. $(4x+5)^2-(x-5)^2$. 6. $(x^2+10x+20)^2-4^2$.

7. $(3x-2y)^2-(r+7b)^2$. 9. 29.

13. $-(b-c)(c-a)(a-b)$. 14. 0.

प्रश्नावली 70.

1. $x^3+y^3-3xy+1.$ 2. $x^3-y^3-6xy-8.$
3. $a^3-b^3+3ab+1.$ 4. $8x^3-27y^3+64z^3+72xyz.$
5. $0.$ 6. $0.$ 7. $1.$
11. $(m-n+1)(m^2+n^2+mn-m+n+1).$
12. $(x+y-6)(x^2+y^2-xy+6x+6y+36).$
13. $0.$ 15. $0.$

प्रश्नावली 71.

2. $0.$ 7. $(x-y)(y-z)(z-x).$ 8. $0.$

प्रश्नावली 72.

2. $0.$ 3. $abc.$
4. $x^2y+2x^2z+2y^2z+xy^2+4xz^2+4yz^2+4xyz.$
5. $3x^2y-4x^2z-36y^2z-9xy^2-16xz^2+48yz^2+24xyz.$
6. $2a^3+2b^3+2c^3+7a^2b+7a^2c+7b^2c+7b^2a+7c^2a+7c^2b$
$+16abc.$
7. $3x^2y+2x^2z+9xy^2+18y^2z+4xz^2+12yz^2+18xyz.$

प्रश्नावली 73.

1. $2b^2c^2y^2z^2+2c^2a^2z^2x^2+2a^2b^2x^2y^2-a^4x^4-b^4y^4-c^4z^4.$
2. $a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+3a^2x^2by+3a^2x^2cz+3b^2y^2cz$
$+3ab^2xy^2+ac^2xz^2+3bc^2yz^2+6abcxyz.$
3. $x^3-y^3+z^3-3x^2y+3x^2z+3y^2z+3xy^2+3xz^2-3yz^2$
$-6xyz.$
4. $8x^3+y^3-z^3+12x^2y-12x^2z-3y^2z+6xy^2+6xz^2+3yz^2$
$-12xyz.$
5. $3(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b).$

प्रश्नावली 74.

1. $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1.$
2. $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32.$

3. $a^6x^6+6a^5x^5b+15a^4x^4b^2+20a^3x^3b+15a^2x^2b^4+6axb^5+b^6$.

4. 128. 6. $16x(4x^2+1)$.

7. $2ax(a^4x^4+10a^2x^2b^2+5b^4)$.

8. 1293. 9. 0.

प्रश्नावली 75.

1. $(2a\,x^2+5y^2)(5a^2x^2-3y^2)$.
2. $(x^2+y^2-2)(3x^2+3y^2-1)$.
3. $(x+1)(x+4)(x^2+5x+2)$.
4. $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.
5. $(x+1)^2(x^2+x+1)$. 6. $(x+1)^2(x^2-6x+1)$.
7. $(x+1)^2(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$.
8. $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$.
9. $(x-y-z)(3x+y+z)$.
10. $(2x-2y+3z)(3x+4y-2z)$.
11. $(2x-3y+1)(2x-3y-3)$. 12. $(x-2y-3)(x+y+1)$.
13. $(3x+z-1)(x+2y+3z)$.
14. $(x-y+2z-2)(2x+y-z+1)$.

प्रश्नावली 76.

1. $(x+1)(x^2+1)$. 2. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
3. $(x+1)(x+2)(x-3)$. 4. $(x-1)(x+1)(x^2+1)^2$.
5. $(x-1)^2(x+2)$. 6. $(a+1)(a-2)(3a^2-2a+4)$.
7. नहीं, हाँ, नहीं । 8. नहीं, नहीं, हाँ ।
9. हाँ, नहीं, नहीं । 10. नहीं, नहीं, नहीं ।
11. नहीं । 12. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$.

प्रश्नावली 77.

1. $(x-1)(x^2+5x+5)$. 2. $(x+y)(x-y)^3$.
3. $(a-3)(a^2+2a+5)$. 4. $(3x-11)(x^2-2x-1)$.

5. $(x+2)^2(x-4)$. 6. $(2x+5)(x^2-x+3)$.

7. $(x^2+5x+5)^2$. 8. $(2x^2-3x+6)(2x^2-3x-8)$.

9. $(3x+2)(3x^2+2x+1)$. 10. $(x+3)(x+4)(x^2+7x+4)$.

11. $(x+1)(x+8)(x^2+9x+30)$.

12. $(x^2+3x-5)(x^2+3x+7)$.

13. $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)(a^2+1)(b^2+1)$.

14. $\{y(x-1)+z(x+1)\}\{y(x+1)-z(x-1)\}$.

15. $(x^2+3x-5)(x^2-3x+5)$.

16. $(x^2+2x+3)(2x^2+3x+4)$.

17. $b(a^2+5ab-3b^2)(a^2-5ab-3b^2)$.

18. $(x^2+6x-1)(x^2+6x-17)$.

19. $(x^2+4x-3)(x^2+4x-1)$.

20. $(x^2+3x-1)(x^2+3x-3)$.

प्रश्नावली 78.

1. $(a+b-c)(ab-bc-ca)$. 2. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

3. $(b+c-a)(bc-ca-ab)$. 4. $-(x+y)(y-z)(z-x)$.

5. $-(x+y)(y-z)(z-x)$. 6. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.

7. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

8. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

9. $-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$.

10. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

11. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.

12. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+3)$.

13. $(b-c)(c-a)(c-b)$.

14. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

15. $-x^2(b-c)(c-a)(a-b)$. 16. $-(b-c)(c-a)(a-b)$

17. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.

18. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2)$.

19. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

20. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

21. $-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.

22. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$.

23. $(y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy)$.

24. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.

25. $x(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

26. $-(b-c)(c-a)(a-b)\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)\}$.

27. $-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.

28. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+1)$.

29. $-(y-z)(z-x)(x-y)$.

30. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a+2b)(2a-b)$.

प्रश्नावली 79.

1. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$.
2. $(2x+y)(x-y)^2$.
3. $(3x-2y-1)(9x^2+4y^2+6xy+3x-2y+1)$.
4. $(1-x-y)(1+x+y-xy+x^2+y^2)$.
5. $-2(b-c)\{(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2\}$.
6. 648. 7. $3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.
8. $3(x-2y)(2y-3z)(3z-x)$.
9. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.
10. $3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$.
11. 0. 12. 2.
13. $3(a+b)(b-c)(a+2b-c)$. 17. 65.

प्रश्नावली 80.

1. $(2x+y+z)(y+z-2x)(z+2x-y)(2x+y-z)$.
2. $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.
3. $261\cdot6471$.
5. $(x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$;
   $(x-y)(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6)$.
7. 1575.
8. $-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+(a+b)(b+c)(c+a)-abc\}$

प्रश्नावली 82.

25. 21.

प्रश्नावली 83.

1. 7, -13, 115. 2. (*i*) $2n+3$.
3. (*i*) 1; (*ii*) 97; (*iii*) 52.
7. -60. 8. 2. 10. $b+c+1=0$.
12. $(p+q)^2(p+q+1)=a$. 13. 6.

प्रश्नावली 84.

1. नहीं। 2. नहीं। 3. नहीं।
4. हाँ, $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.
14. $m=2kn$, k कोई भी धनात्मक पूर्ण संख्या।
18. ap^3+bp^2+cp+d.

प्रश्नावली 85.

1. $3x^3-5x^2+7$. 2. a^2+a+1. 3. x^2-3x+5.
4. $2x^2+15x-8$. 5. $2x^2+7x+3$. 6. $2x^2+3x+2$.
7. 1. 8. x^2+x+1. 9. x^2-2x+1.
10. $3x^2+2x+1$. 11. x^2-5x+6. 12. x^2-x+2.
13. $x-2$. 14. x^2-3x+7. 15. x^2+x-3.

प्रश्नावली 86.

1. $9x^5-63x^4-820x^3+5884x^2+8000x-57600$.
2. $x^7+x^6-x^5+2x^4-x^3-x^2+x-2$.
3. $x(3x+1)^3(9x^2-3x+1)(29x-7)$. 4. x^3+x^2+x-4.
5. $(5x+1)(x+1)(x-1)$ और $(5x+1)(x+1)(x^2-2x-2)$;
अथवा $(5x+1)(x+1)$ और $(5x+1)(x+1)(x-1)(x^2-2x-2)$.

प्रश्नावली 87.

1. $\frac{1}{1-4x^2}$. 2. 0. 3. $\frac{a+b}{(b+c-a)(c+a-b)}$. 4. -1.
5. $\frac{4x^7}{x^8-a^8}$. 6. $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$. 7. $(b+c)(c+a)(a+b)$.

8. $\dfrac{(a+b+c)^2}{(a+b)^2-c(a+b)+c^2}$. 9. $\dfrac{2a(x^2+5ax+7a^2)}{(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)}$.

10. $\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}$. 11. $\dfrac{1}{x-1}$. 12. $\dfrac{6x}{(x-2)(x+3)(x-5)}$.

13. $\dfrac{x}{x^2-1}$. 14. $\dfrac{8x+5}{(x+2)(2x+1)(6x+1)}$.

15. $\dfrac{11x+15a}{(x+a)(3x+5a)(5x+7a)}$. 16. $\dfrac{a+b+c}{2}$.

17. $\dfrac{3x^4-12x^3+40x^2-539x+58}{(x-4)(x+5)(x-6)(x-7)}$.

18. $\dfrac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 19. $\dfrac{4x^3}{1+x^4+x^2}$.

20. $\dfrac{3}{(x^2+x+7)(x^2+4x+4)}$.

21. $\dfrac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$. 22. $\dfrac{2a}{a+b}$.

23. 1. 24. $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$.

25. $\dfrac{4(abc+a^2b+b^2c+c^2a)(abc+ab^2+bc^2+ca^2)}{(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)}$.

26. $\dfrac{7x-2y}{5x^2-3xy+2y^2}$.

प्रश्नावली 88.

1. 0. 2. 0. 3. 0. 4. 0 5. x.
6. 0. 8. -1. 9. x^2. 10. 0. 11. 0.
12. $x+y+z$. 13. 1. 14. 1. 15. p.
16. 0. 17. 0. 18. d.
19. $5(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.
20. $\dfrac{a+b+c}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$. 21. 4. 22. -2.
23. $\dfrac{a+b+c+x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$. 24. $\dfrac{a+b+c}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.
25. 1. 26. 0. 27. 0. 28. 1.

प्रश्नावली 89.

1. $\frac{1}{x}$. 2. 1. 3. $\frac{xy(x-y)}{x+y}$.

4. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$. 5. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. 6. $\frac{1}{2}$.

7. $\frac{b}{a}$. 8. x. 9. y.

10. $-x^2y^2z^2$. 11. $\frac{2x+1}{3x+2}$. 12. $\frac{(x+1)^2}{x+2}$.

13. $\frac{3}{2(x+1)}$. 14. $\frac{a^2}{a^2+a-1}$. 15. $\frac{x}{x-y}$.

16. $\frac{x(1+x+x^2)}{1+x^2}$. 17. $\frac{y^2-zx}{z-x}$. 18. $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

19. 2. 20. $-\frac{2t^2+4t+1}{t^2+3t+2}$. 21. x.

22. (i) $\frac{a(a+2b)}{b(4a-b)}$; (ii) $\frac{b(b+1)}{b^2-a}$. 23. $\frac{2(a-2b)}{b}$.

24. $\frac{b(a-1)}{2a+b+ab}$. 25 $\frac{2a}{1-a^2}$; $\frac{2b}{1-b^2}$.

26. $\frac{-8t^2}{(3t^2+1)(t+1)}$. 27. x. 28. $\frac{1}{a}$.

29. $\frac{2a}{1-a^2}$. 30. (i) $x=3\frac{1}{13}$; (ii) $x=1$;
(iii) $x=9$, (iv) $x=1$, (v) $x=1$; (vi) $x=1\frac{1}{4}$.

प्रश्नावली 91.

1. $x=8, y=2$. 2. $x=7, y=-3$.

3. $x=4, y=3$. 4. $x=18, y=6$

5. $x=5, y=3$. 6. $x=19, y=3$.

7. $x=1, y=1$. 8. $x=\frac{7}{11}, y=-\frac{2}{11}$.

9. $x=6, y=2$. 10. $x=10\frac{5}{49}, y=19\frac{2}{7}$.

11. $x=\frac{92}{123}, y=\frac{50}{246}$. 12. $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{3}$,

13. $x=7, y=\frac{1}{3}$. 14. $x=\frac{3}{2}, y=-\frac{1}{2}$.

15. $x=5\frac{11}{41}, y=4\frac{1}{13}$.

प्रश्नावली 92.

1. $x=8, y=7$. 2. $x=5, y=2$. 3. $x=3\frac{22}{29}, y=\frac{29}{56}$

4. $x=3, y=3$. 5. $x=2, y=4$. 6. $x=8, y=2$.

7. $x=\frac{46}{203}, y=1\frac{739}{2030}$. 8. $x=2, y=3$.

9. $x=2, y=3$. 10. $x=3, y=2$. 11. $x=2, y=3$.

12. $-6; 13$. 13. $a=\frac{3}{2}, b=2$.

प्रश्नावली 93.

1. $x=\cdot02, y=2\cdot9$. 2. $x=2, y=5$. 3. $x=3, y=2$.

4. $x=3, y=2$. 5. $x=3, y=8$. 6. $x=-1, y=1$

7. $x=1\frac{1180}{8493}, y=1\frac{4173}{5662}$. 8. $x=5, y=3$.

9. $x=2, y=1$. 10. $x=-\frac{8}{3}, y=-\frac{13}{3}$.

11. $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{5}$. 12. $x=\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{4}$.

प्रश्नावली 94.

1. $x=\dfrac{c(c-b)}{a(a-b)}, \quad y=\dfrac{c(a-c)}{b(a-b)}$. 2. $x=1, y=1$.

3. $x=a, y=b$. 4. $x=a^2, y=b^2$.

5. $x=y=a^2-b^2$. 6. $x=\dfrac{12abm}{a+b}, y=\dfrac{(a-b)(7b-5a)m}{a+b}$.

7. $x=\dfrac{abc(bc-ca-ab)}{b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}, \quad y=\dfrac{abc(bc-ca+ab)}{b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}$.

8. $x=\dfrac{a^2-b^2}{am-bn}, \quad y=\dfrac{a^2-b^2}{an-bm}$. 9. $x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$,

$y=\dfrac{b^2-a^2+2ab}{2ab}$.

10. $x=-\dfrac{2b}{b+1}, \quad y=-\dfrac{2a}{a+1}$. 11. $x=a+b, y=b-a$.

12. $x=b+a, y=b-a$. 13. $x=a(a-b), y=b(a-b)$.

प्रश्नावली 95.

1. $x=1, y=1.$ 2. $x=2, y=2.$ 3. $x=1, y=2.$

4. $x=\dfrac{lm-n^2}{m^2-nl}, \quad y=\dfrac{mn-l^2}{m^2-nl}.$ 5. $x=\frac{3}{8}, y=\frac{5}{8}.$

6. $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{8}.$ 7. $x=3, y=1.$ 8. $x=10, y=15.$

9. $x=3, y=4.$ 10. $x=\frac{11}{42}, y=-\frac{11}{21}.$

प्रश्नावली 96.

1. $x=2, y=3, z=5.$ 2. $x=6, y=0, z=-3.$

3. $x=-3, y=3, z=1.$ 4. $x=10, y=20, z=5.$

5. $x=1, y=2, z=3.$ 6. $x=y=z=12.$

7. $x=\frac{1}{12}, y=-\frac{1}{60}, z=\frac{1}{60}.$ 8. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{5}.$

9. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{5}.$

10. $x=\dfrac{a(b-a)(c-a)}{k(b-k)(c-k)}, y=\dfrac{b(c-b)(a-b)}{k(a-k)(c-k)}, z=\dfrac{c(a-c)(b-c)}{k(a-k)(b-k)}.$

प्रश्नावली 97.

1. $x=1, y=4, z=3.$ 2. $x=2, y=3, z=4.$

3. $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{12}, z=\frac{1}{8}.$ 4. $x=7, y=8, z=9.$

5. $x=\frac{1}{2}, y=1, z=3.$

6. $x=abc, y=-(ab+bc+ca), z=a+b+c.$

7. $x=\frac{10}{9}, y=\frac{10}{7}, z=\frac{10}{11}.$ 8. $x=1, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{3}.$

9. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{4}.$

प्रश्नावली 98.

1. $x=3, y=-8, z=-26.$ 2. $x=6, y=4, z=2.$

3. $x=\frac{1}{3}(b-c), y=\frac{1}{3}(c-a), z=\frac{1}{3}(a-b).$

4. $x=6, y=8, z=10.$

5. $x=\dfrac{bcd}{(a-b)(a-c)}, y=\dfrac{acd}{(b-c)(b-a)}, z=\dfrac{abd}{(c-a)(c-b)}.$

6. $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b.$ 7. $x=3,\ y=4,\ z=5.$

8. $x=\frac{285}{98},\ y=-\frac{213}{98},\ z=\frac{124}{98}.$

9. $x=\dfrac{(c-d)(b-d)}{(b-a)(c-a)},\ y=\dfrac{(c-d)(a-d)}{(c-b)(a-b)},\ z=\dfrac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$

10. $x=a,\ y=b,\ z=c.$

11. $x=a(b-c),\ y=b(c-a),\ z=c(a-b)$

12. $x=a,\ y=b,\ z=c.$

13. $x=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)},\ y=\dfrac{1}{(b-c)(b-a)},\ z=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}.$

14. $x=a(m-n),\ y=b(n-l),\ z=c(l-m).$

15. $x=\dfrac{1}{bc(c-b)},\ y=\dfrac{1}{ca(a-c)},\ z=\dfrac{1}{ab(b-a)}.$

16. $x=\dfrac{abc}{(a-b)(a-c)(a+b+c)},\ y=\dfrac{abc}{(b-a)(b-c)(a+b+c)},$

$z=\dfrac{abc}{(c-a)(c-b)(a+b+c)}.$

17. $x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2.$

18. $x=b+c-a,\ y=c+a-b,\ z=a+b-c.$

19. $x=a-b,\ y=b-c,\ z=c-a.$

20. $x=b^2-c^2,\ y=c^2-a^2,\ z=a^2-b^2.$

21. $x=ab,\ y=bc,\ z=ca.$

22. $x=\frac{1}{3}(b-c),\ y=\frac{1}{3}(c-a),\ z=\frac{1}{3}(a-b).$

23. $x=\frac{1}{2}(b+c),\ y=\frac{1}{2}(c+a),\ z=\frac{1}{2}(a+b).$

24. $x=a,\ y=b,\ z=c.$

25. $x=a,\ y=b,\ z=c.$

26. $x=-(ab+bc+ca),\ y=a+b+c,\ z=1.$

27. $x=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)},\ y=\dfrac{1}{(b-c)(b-a)},\ z=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}.$

28. $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$

प्रश्नावली 99.

1. $x=y=z=\dfrac{1}{a+b+c}$.

2. $x=y=z=1$. 3. $x=2a,\ y=2b,\ z=2c$.

4. $x=\dfrac{2(ab-ac+c^2)}{b(a^2+c^2)},\ y=\dfrac{2(ab+bc-b^2)}{b(a^2+c^2)},\ z=\dfrac{2(bc-ac+a^2)}{b(a^2+c^2)}$.

5. $x=y=z=3$.

6. $x=\dfrac{2}{b+c-a},\ y=\dfrac{2}{c+a-b},\ z=\dfrac{2}{a+b-c}$.

7. $x=-\dfrac{2bc}{b+c},\ y=-\dfrac{2ca}{c+a},\ z=-\dfrac{2ab}{a+b}$.

8. $x=\dfrac{120}{43},\ y=\dfrac{120}{37},\ z=\dfrac{120}{53}$.

9. $x=y=z=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$.

10. $x=1,\ y=1,\ z=0$. 11. $x=a,\ y=b,\ z=c$.

12. $x=1,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{3}$. 13. $x=2bc,\ y=2ca,\ z=2ab$.

14. $x=\frac{1}{4}(a+b+2c),\ y=\frac{1}{4}(a+2b+c),\ z=\frac{1}{4}(2a+b+c)$.

15. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{4}$. 16. $x=\frac{1}{3}a,\ y=\frac{1}{3}b,\ z=\frac{1}{3}c$.

17. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{4}$. 18. $x=\dfrac{1}{a},\ y=\dfrac{1}{b},\ z=\dfrac{1}{c}$.

प्रश्नावली 100.

1. 72, 45. 2. $\frac{9}{19}$. 3. $\frac{17}{21}$. 4. $\frac{5}{9}$.

5. $\frac{13}{25}$. 6. 18 दिन। 7. A को 50 दिन और B को 75 दिन।

8. $\dfrac{2pqr}{pq+qr+rp}$ दिन।

9. सिकयड में $11\frac{1}{2}$ गज़ और सिकयड में $5\frac{1}{2}$ गज़। 10. $32\frac{1}{2}$ मि०।

11. पहले का विक्रय मूल्य 22 रु० और दूसरे का विक्रय मूल्य 24 रु०।

12. A को 4 मि० और B को 5 मि०। 13. घंटे में 2 मील।

14. वायु की गति घंटे में 10 मी०। स्थिर वायु में हवाई जहाज़ की गति घंटे में 65 मी०।

15. प्रवाह का वेग घंटे में 3 मी०; स्थिर जल में नौका का वेग घंटे में 8 मी०।

16. 27. 17. 82 अथवा 28. 18. 305.

19. 21 वर्ग फ़ु०। 20. 144 वर्ग फ़ुट।

21. लम्बाई 17 इंच, चौड़ाई 9 इंच। 22. 200 रु०।

23. A, 46 रु०; B, 30 रु०; C, 16 रु०।

24. सामने के चक्के की परिधि 4 गज़; पिछले चक्के की परिधि 5 गज़।

25. प्रति सैंकड़ा 4 रु० की दर से 650 रु० और प्रति सैं० 5 रु० की दर से 550 रु०।

26. एक सेर चीनी का दाम 5 आ० 6 पाई और एक सेर चावल का दाम 3 आ० 3 पाई।

27. विद्यार्थियों से 144 टिकट और सर्वसाधारण से 156 टिकट।

28. 43. 29. पति की आयु 50 वर्ष, पत्नी की आयु 40 वर्ष और पुत्र की आयु 15 वर्ष।

30. हरेन की अवस्था 12 वर्ष; गोविन्द की 10 वर्ष।

31. चाय के बग़ीचे के प्रत्येक हिस्से का मूल्य 15 रु० बढ़ गया।

32. 6 वर्ष। 33. A 11 रु०, B 38 रु०, C 33 रु०, D 32 रु०, E 36 रु०।

प्रश्नावली 101.

7. 1. 8. 13. 10. $x=-1, y=2$.

11. -11 से 1 तक। 13. 5; $-3 \cdot 5$. 15. (*i*) 24, -72; (*ii*) $-\frac{7}{6}, -\frac{1}{2}$; (*iii*) $\frac{4}{3}, -3$; (*iv*) $\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$.

16. 65 वर्ग इकाई। 17. $\frac{1}{12}$ वर्ग इकाई।

18. (*i*) $3x+5y=15$; (*ii*) $x+2y=5$; (*iii*) $17x+11y+14=0$.

19. $x+y=2$. 20. $x=0, 1, 2, 3, 4$ होने पर प्रथम फल का मान क्रमशः 4, 2, 0, -2, -4 और दूसरे का मान क्रम से 13, 5, -3, -11, -19 होगा; $x=1 \cdot 5$.

प्रश्नावली 102.

2. (*i*) 69, (*ii*) $7\frac{1}{3}$; (*iii*) $-\frac{3}{4}$.
3. $3\cdot76$; $4\cdot5$. 4. $\frac{63}{13}$. 5. $(-1, -1)$.
6. $15\cdot5$; $2\cdot57$. 8. $x=2, y=1$. 9. (*i*) $x=\frac{13}{7}$; (*ii*) $x=3$; (*iii*) $x=-\frac{5}{6}$; (*iv*) $x=-4\frac{1}{5}$.
10. $(4, -1), (7, 2), (-13\cdot3, 16\cdot3)$. 11. 8; 1.
13. 448 रु० । 14. $11\frac{1}{4}$ रु० । 15. (*i*) 80; (*ii*) 48.
16. $14\cdot5$ लिटर (मोटे तौर से); $4\cdot1$ गैलन (मोटे तौर से) ।
17. 34 रु० 9 आ० $7\frac{1}{5}$ पा० ।
18. 4 रु० 13 आ० (मोटे तौर से); 17 रु० 2 आ० (मोटे तौर से); 108 रु० 3 आ० 6 पा० (मोटे तौर से); 73 दिन ।
19. 10 रु० 6 आ० 8 पा०; 6 रु० 8 आ० ।
20. रात के 1 बजकर 17 मि० पर (मोटे तौर से); राम के यात्रा-स्थान से प्राय: 17 मी० की दूरी पर और हरि के यात्रा स्थान से प्राय: 13 मी० की दूरी पर ।
21. $8\frac{2}{3}$ सि० । 23. 74 (प्राय:); 93 (प्राय:).
24. 2 बजकर $10\frac{10}{11}$ मि० पर । 26. $11\frac{1}{2}$ वर्ष ।
27. (*i*) अप्रैल से जून तक में ।
(*ii*) सितम्बर और अक्टूबर के बीच में ।
28. (*i*) 75 रु० । (*ii*) $233\frac{2}{3}$ रु० ।
29. पहले वक्त 12 बजकर 40 मि० से दूसरे वक्त 3 बजकर 30 मि० तक ।
31. 1 रु० 14 आ०; 2 रु० 12 आ० ।

प्रश्नावली 103.

1. $x=4, y=3$. 2. $x=-2, y=4$.
3. $x=2\cdot5, y=3\cdot5$. 4. $x=5\cdot6, y=2\cdot8$.
5. $x=-6\cdot3, y=-5\cdot7$, (मोटे तौर से) ।
6. $x=2, y=3$. 7. $x=8, y=5$.
8. $x=5, y=0$. 9. $x=3, y=1$.
10. $x=2$. 11. $x=-1\cdot6, y=1\cdot8$.
12. $x=2, y=2$. 13. $x=3, y=4$.

प्रश्नावली 104.

1. (*i*) 3 : 4; (*ii*) 7 : 8; (*iii*) 22 : 35;
(*iv*) 9 : 14. 2. (*i*) $a : c$; (*ii*) 192 : 1375;
(*iii*) $a : b$; (*iv*) $b : a$; (*v*) 1 : 1.
3. $-\frac{ab}{a+b}$. 4. $(x+3) \cdot (x+5)$.
5. $(a^2-a-2) : (a^2+a-2)$.
7. $x^3+y^3 : x^2+y^2$ अनुपात बड़ा है ।
9. 4 : 5. 10. 36 : 54. 11. 9,
12. 2. 13. 18.

प्रश्नावली 105.

1. (*i*) 27; (*ii*) 84; (*iii*) $\frac{x^3}{y(x^2+y^2)}$.
2. (*i*) 6; (*ii*) 12; (*iii*) 18; (*iv*) 30.
3. (*i*) 60; (*ii*) 60; (*iii*) $\frac{1}{4}$.

प्रश्नावली 107.

10. 1.

प्रश्नावली 108.

1. 3. 2. 36, 63. 3. 3.
4. दूसरा दल । 5. 32 : 63. 6. 9 वर्ष और 4 वर्ष ।
7. 3 आदमी । 8. पहला स्कूल । 9. 84.
10. 6, 9, 15. 11. 18, 24. 12. 136. 13. 395.

प्रश्नावली 109.

25. 9 वर्ष ।

विविध प्रश्नावली V.

I.

1. $x=-1$. 2. (*i*) $(2x+3)(5x+7)$;
(*ii*) $(2x+yz)(3x-yz)$. 4. $-27x^9y^6$, a^{3p}, 618.
5. 2 रु० 4 आ०; 20 रु० ।

II.

1. $x=a+b+c$. 2. 1500 रु० ।

3. $\dfrac{100(y-x)}{nx}$. 4. $\dfrac{4a}{a^2-x^2}$.

III.

1. $a=2$, $b=5$. 3. 12, 18, 30. 5. 253.

IV.

1. $x=\dfrac{c(a+b)}{a}$, $y=\dfrac{c(a+b)}{b}$. 2. $6(x-1)$.

3. 25 रु०, 24 अधेलियाँ, 20 चवन्नियाँ । 5. 4, 10, 12, 14.

V.

2. $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$.

3. x. 5. घंटे में 4 मील; 12 मील ।

VI.

1. $2n+1$, n एक पूर्ण संख्या । 2. A, 1500 रु०; B, 3000 रु० ।

4. $x=\dfrac{(a+b+c)(b+c+2a)}{2}$, $y=\dfrac{(a+b+c)(c+a+2b)}{2}$,

$z=\dfrac{(a+b+c)(a+b+2c)}{2}$.

प्रश्नावली 110.

1. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 4. 5. 32. 6. 16.

7. $\frac{1}{243}$. 8. 8. 9. $\frac{1}{81}$. 10. 72. 11. $\frac{1}{27000}$.

12. $\frac{1}{2}$. 13. $\frac{1}{4}$. 14. 9. 15. 1. 16. a^2.

17. $\dfrac{1}{x^2}$. 18. $\dfrac{1}{x^8}$. 19. x^{24}. 20. $\dfrac{1}{x^2}$.

21. $\sqrt[30]{x}$. 22. a. 23. a. 24. $\sqrt[4]{x^{17}}$.

25. x^{2abc}. 26. $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$. 27. $\dfrac{a}{x}$. 28. $\sqrt[60]{x^{183}}$.

29. 1. 30. 1. 31. $\sqrt[9]{x^2}$. $\sqrt[18]{y}$.

32. $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$. 33. 1. 34. $\frac{1}{a^3b^5c^7}$.

35. $\sqrt[12]{\left(\frac{a}{x}\right)^{23}}$. 36. 1. 37. 1.

38. $\sqrt{a^2-b^2}$. 39. 1. 40. xyz. 41. 1

42. $\frac{1}{50}$. 43. $\sqrt[3]{xy}$. 44. 1. 45. 1.

46. 1. 47. 1. 48. $\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$.

49. 1. 50. 1. 51. $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$.

प्रश्नावली 111.

1. $a+b$. 2. $x^{\frac{9}{8}}-3x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{3}{8}}-1$.

3. $x^{-\frac{7}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{7}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}$
$+x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{2}{3}}+1$.

4. $a^{-6}+b^{-6}$. 5. $ax^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}x-a^{\frac{1}{2}}x^{-1}-a^{-\frac{1}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}$.

6. $x^{-1}+y^{-1}$. 7. $x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}}$. 8. $x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$.

9. $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}$. 10. $2a^n+5a^{-2n}$.

11. $3x^{\frac{1}{3}}-2$. 12. $4x^{\frac{1}{2}}-5$. 13. $x^{-1}+5$.

14. $x^{-\frac{1}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}$.

15. $(x^{-1}-a^{-3})^2(x^{-1}-3a^{-3})(3x^{-1}-7a^{-3})$.

16. $(x^{\frac{1}{4}}+2)(2x^{\frac{1}{4}}-1)(3x^{\frac{1}{4}}-1)(4x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}+1)$.

17. $(x^{-\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{8}})(x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}})$.

18. $(a^{\frac{1}{4}}+1)^2$. 19. $(a^{\frac{1}{3}}+7)(a^{\frac{1}{3}}+8)$.

20. $(x^{-\frac{3}{8}}-8)(x^{-\frac{3}{8}}-9)$. 21. $(a^{-\frac{5}{6}}-3x^{\frac{2}{3}})(a^{-\frac{5}{6}}-4x^{\frac{2}{3}})$.

22. $-(a^{-\frac{1}{5}}-b)(b-c^{\frac{1}{4}})(c^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{5}})$.

23. $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}+1)^2$.

24. $(a^{-1}+b+x^{-2}+y^{-3})(a^{-1}+b-x^{-2}-y^{-3})$
$(x^{-2}-y^{-3}+a^{-1}-b)(x^{-2}-y^{-3}-a^{-1}+b)$.

25. $(2x^{\frac{1}{5}}+y^{-\frac{1}{5}})(2x^{\frac{1}{5}}-y^{-\frac{1}{5}})(3x^{\frac{2}{5}}+y^{-\frac{2}{5}})$.

26. $a^{-2}+2a^{-1}x^{-1}+x^{-2}$. 27. $a^{-1}+2+a$.

28. $a^2+2a+3+2a^{-1}+a^{-2}$.

29. $a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}$. 30. a^n-x^{-n}.

31. $x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}$. 32. 1.

33. $\dfrac{x^{-1}y^{\frac{1}{3}}}{x^{-2}+y^{\frac{2}{3}}}$. 34. $x^{-2n}+2$.

35. $\dfrac{4x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}$. 40. $x+y$; 6.

प्रश्नावली 112.

1. $x=2$. 2. $x=5$. 3. $x=3$. 4. $x=3$.
5. $x=1$. 6. $x=4$. 7. $x=2$. 8. $x=1$.
9. $x=2$. 10. $x=3$. 11. $x=a+1$. 12. $x=\frac{3}{2}$.
13. $x=2, y=3$. 14. $x=2, y=-3$. 15. $x=3, y=3$.
16. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$. 17. $x=2, y=3$. 18. $x=y=2$.
19. $x=-4, y=-2$. 20. $x=3, y=1$. 21. $x=y=1$.
22. $x=y=1$. 23. $x=1, y=2, z=3$.
24. $x=y=z=0$. 25. $x=3, y=2, z=1$.
26. $x=y=z=\dfrac{a}{3}$. 27. $x=1, y=3, z=0$.

प्रश्नावली 113.

1. $3a^3b$. 2. $4x^2y^3z^4$. 3. $8x^2yz^5$.

4. $\dfrac{3xy^2}{4a^2b^3}$. 5. $\dfrac{6a^4m^{\frac{7}{3}}}{5b^{\frac{5}{2}}n^3}$. 6. $\dfrac{\sqrt{7}b^{\frac{5}{2}}y^2}{2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}x}$.

7. $\dfrac{3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{3}}}$.	8. $\dfrac{2a^{\frac{3}{2}}b^{3}}{3xy^{2}}$.	9. $\dfrac{2ab^{2}}{3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$.
10. $2abc$.	11. $3xy^{2}z^{\frac{2}{3}}p^{\frac{2}{3}}q$.	12. $2p^{\frac{3}{4}}q^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.
13. $3a^{2}b^{3}c^{4}d^{5}$.	14. $x^{2}y^{3}z^{4}$.	15. $a^{2}b^{3}c^{-1}x^{-4}$.

প্রশ্নাবলী 114.

1. $2(a-10b)$.	2. $3x-25y$.	3. $3a^{2}b^{2}-5a^{3}b^{3}$.
4. $\frac{1}{2}a^{3}+\frac{1}{3}b^{3}$.	5. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.	6. $\frac{1}{3}a^{2}b^{4}+\frac{1}{4}a^{3}b^{3}$.
7. $x+y+z$.	8. $x+y-z$.	9. $2x-y-z$.
10. $3a^{2}+2b^{2}-5c^{2}$.	11. $x^{-2}+3y^{-2}$.	12 $x+\dfrac{1}{x}-1$.
13. $x^{\frac{1}{3}}-2y^{\frac{1}{3}}$.	14. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1$.	15. $\dfrac{x^{2}}{y^{2}}-\dfrac{y^{2}}{x^{2}}+1$.
16. $x-2-\dfrac{1}{x}$.	17. $a-7-\dfrac{1}{2a}$.	18. $x^{2}+2-\dfrac{1}{x^{2}}$.
19. $x-2+\dfrac{1}{x}$.	20. $x^{2}+5x+5$.	21. $4x^{2}-16x+11$.
22. $a^{2}b(a-b)+1$.	23. $x^{-5}+x^{-4}+1$.	24. $ax-by+cz$.
25. $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}$.	26 $\dfrac{x^{2}}{y^{2}}+\dfrac{y^{2}}{x^{2}}-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1$.	
27. $(x+1)(x+7)(2x-3)$.		

প্রশ্নাবলী 115.

1. $a+b-c$.	2. $a-b+c$.	3. $x-y-z$.
4. $x^{2}+x+1$.	5. $x^{2}-x+1$.	6. $ax-by+cz$.
7. $3a+4b-c$.	8. $a-b+2c$.	9. $2x^{2}-3x+1$.
10. $3x^{2}-5x-2$.	11. $3x^{2}-x-2$.	12. $x^{3}+x+4$.
13. $\dfrac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x+1$.	14. $x+1+\dfrac{1}{x}$.	15. $2x-1+\dfrac{2}{x}$.
16.	17. $x^{\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{2}}$.	18. $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}+1$.

19. a^m+a^{-n}.
20. $2x^{-2}+3y^{-3}+1$.
21. $ax^{-2}+by^{-3}+cz^{-4}$.
22. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.
23. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1$.
24. $\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.
25. $x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+1$.
26. $a-b+c-d$.
27. $2x-3y+4z+u$.
28. $a^2-b^2+c^2-d^2$.
29. $x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$.
30. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

प्रश्नावली 116.

1. $1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$.
2. $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$.
3. $1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{3x^3}{16}$.
4. $1-\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}$.
6. 1.
7. 3.
8. $\frac{1}{3}$.
10. 6.
12. $ax+by+cz$.
14. 7.

प्रश्नावली 117.

1. (*ii*), (*v*) और (*vi*) की राशियाँ वास्तविक करणी हैं।
2. अतिभुज $=\sqrt{2}$, एक अकरणीगत राशि है।
4. दूरी $=\sqrt{14}$ फ़ुट एक अमेय राशि है।
6. $\sqrt{24}$.
7. $\sqrt{90}$.
8. $\sqrt[3]{13824}$.
9. $\sqrt[5]{x^{10}y}$.
10. $\sqrt[3]{8a^3xy}$.
11. $\sqrt[4]{625a^{12}b^3}$.
12. $3\sqrt{3}$.
13. $5\sqrt{14}$.
14. $3\sqrt[3]{10}$.
15. $2\sqrt[3]{10}$.
16. $2\sqrt[4]{7}$.
17. $3\sqrt[5]{2}$.
18. $x^2\sqrt[3]{y}$.
19. $-xy^2\sqrt[5]{z^2}$.
20. x^2y.

प्रश्नावली 118.

1. $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{16}$.
2. $\sqrt[15]{3125}$, $\sqrt[15]{27}$.
3. $\sqrt[12]{125}$, $\sqrt[12]{4}$.
4. $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{7}$.
5. $\sqrt{3}$ बड़ी ।
6. $\sqrt[3]{4}$ बड़ी ।
7. $\sqrt{3}$ बड़ी ।
8. $\sqrt[3]{3}$ बड़ी ।

प्रश्नावली 119.

1. $-2\sqrt{5}$.
2. 0.
3. $11\sqrt{2}$.
4. $14\sqrt{3}$.
5. 0.
6. $12\sqrt{2}$.
7. $4\sqrt{3}$.
8. $10\sqrt{2}$.
9. $3\sqrt[3]{3}$.
10. $14\sqrt[3]{2}$.
11. $x\sqrt{x(6+5x+8x^2)}$.
12. $\sqrt{3x(2x-3y+4z)}$.
13. $\sqrt[3]{4x(a^2-4b^2+5c^2)}$.

प्रश्नावली 120.

1. $\sqrt{6}$.
2. $5\sqrt{6}$.
3. $3\sqrt{42}$.
4. $\sqrt[3]{6}$.
5. $\sqrt[4]{21}$.
6. $\sqrt[6]{108}$.
7. 40.
8. $15\sqrt{15}$.
9. $\sqrt[12]{87808}$.
10. $\sqrt[6]{648}$.
11. $\sqrt[3]{625}$.
12. $9\sqrt[3]{20}$.
13. $4\sqrt[4]{105}$.
14. $\sqrt[12]{3456}$.
15. $\sqrt[6]{18}$.
16. $\sqrt[12]{108}$.
17. $\sqrt[10]{36}$.
18. $\sqrt[6]{108}$.
19. $\sqrt{30}$.
20. $2\sqrt[12]{2}$.
21. 3.
22. $6\sqrt[6]{72}$.
23. $x^3\sqrt{abc}$.
24. $6ab\sqrt[3]{x^2}$.
25. $2abc$.
26. $2-\sqrt{2}$.
27. $3+\sqrt{6}$.
28. 2.
29. -7.
30. $3+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$.
31. 3.
32. $x-y$.
33. $2x+5\sqrt{x}+3$.
34. $2a+3x+5\sqrt{ax}$.
35. $2(1+\sqrt{3})$.
36. $2\sqrt{42}-8$.
37. $x-y-z+2\sqrt{yz}$.

38. $6\sqrt{xy}-8\sqrt{xz}+12\sqrt{yz}-9y$.

39. $1-\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{6}$. 40. $2+\sqrt{15}+\sqrt[6]{432}+\sqrt[6]{500}$.

41. $5-2\sqrt{6}$. 42. $30-12\sqrt{6}$.

43. $392+96\sqrt{10}$. 44. $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

45. $2x-1+2\sqrt{x^2-x}$. 46. $2a-2\sqrt{a^2-1}$.

47. $a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}$.

48. $13x^2+30-12\sqrt{x^4+5x^2+6}$.

49. $a\sqrt{a}+a\sqrt{a-x}+\sqrt{a^2+ax}+\sqrt{a^2-x^2}$.

50. $6+\sqrt{10}$. 51. $2a^2b^2x^2-(a^2+b^2)$.

प्रश्नावली 121.

1. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$. 2. $\frac{1}{5}\sqrt{15}$. 3. $\frac{2}{3}\sqrt{21}$.

4. $\frac{3}{14}\sqrt{35}$. 5. $\frac{1}{3}\sqrt[6]{432}$. 6. $\frac{1}{2}\sqrt[12]{131072}$.

7. $1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. 8. $\frac{1}{5}(\sqrt{15}+\sqrt{10})$. 9. $\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{42}$.

10. $2\sqrt{10}+\frac{5}{2}\sqrt{6}$. 11. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

12. $\frac{4}{21}\sqrt{21}$. 13. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{6}+\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

14. $\sqrt{15}-\frac{2}{3}\sqrt{21}$. 15. $-\frac{1}{7}(11+6\sqrt{2})$.

16. $\frac{1}{13}(19+8\sqrt{3})$. 17. $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$.

18. $\dfrac{x^2+z+2x\sqrt{z}+x\sqrt{y}+\sqrt{yz}}{x^2-z}$. 19. $\frac{1}{2}(13+3\sqrt{15})$.

20. $15+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5\sqrt{6}$. 21. $a+\sqrt{a^2-1}$.

22. $\dfrac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}$. 23. $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

24. $\dfrac{2\sqrt{(a^2+b^2)}}{b^2}$. 25. $\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$.

26. $5-2\sqrt{6}$. 27. $\frac{1}{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{3}-3)$.

28. $\dfrac{1}{1-x^2}$. 29. $\dfrac{2\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}$.

30. (*i*) 9·560; (*ii*) 2·053.

प्रश्नावली 122.

1. $\sqrt{2}-1.$ 2. $3-\sqrt{2}.$ 3. $\sqrt{3}-1.$
4. $\sqrt{5}-2.$ 5. $\sqrt{3}-\sqrt{2}.$ 6. $\sqrt{8}-\sqrt{5}.$
7. $6-\sqrt{3}.$ 8. $3-\sqrt{5}.$ 9. $2\sqrt{5}-\sqrt{3}.$
10. $\sqrt{7}-\sqrt{5}.$ 11. $\sqrt{6}-1.$ 12. $4-\sqrt{3}.$
13. $\sqrt{a}+\sqrt{1-a}.$ 14. $\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}.$
15. $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}.$ 16. $\sqrt{a}+\sqrt{a-b}.$
17. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}.$ 18. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}\right).$
19. $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}.$ 20. $\sqrt{x}-\sqrt{3y+2}.$
21. $2+\sqrt{3}.$ 22. 8.
23. $\sqrt{2}.$ 25. $\sqrt{x+y}+\sqrt{z}.$
26 $\frac{10}{7}.$ 27. $\pm\frac{a^2-b^2}{2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}}.$
28. 3.

प्रश्नावली 123.

1. $\sqrt{\frac{2a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}.$ 2. $1+2^{\frac{3}{4}}+2\cdot 2^{\frac{1}{2}}-3\cdot 2^{\frac{1}{4}}.$
3. 2702. 5. $n(n-1).$
6. $4-a.$ 7. $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx).$
10. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$ 11. $\frac{4}{2x-7}.$ 15. $\frac{x}{2}.$

प्रश्नावली 124.

1. $x=1.$ 2. $x=8.$ 3. $x=\frac{2}{5}.$
4. $x=25.$ 5. $x=3\frac{12}{27}.$ 6. $x=-3.$
7. $x=-\frac{25}{2}.$ 8. $x=-1.$ 9. $x=10.$
10. $x=\frac{1}{3}.$ 11. $x=-1.$ 12. $x=4.$

13. $x=\frac{1}{a}\left\{\left(\frac{d^2+c-b}{2d}\right)^2-c\right\}$. 14. $x=7$.

15. $x=\frac{17a}{8}$. 16. $x=25$.

17. $x=\frac{81}{a}$. 18. $x=\frac{9}{8}$.

19. $x=\frac{5}{9}$. 20. $x=\frac{a(a-1)}{a+1}$.

21. $x=1$. 22. $x=9$.

23. $x=5$. 24. $x=-\frac{11}{8}$.

25. $x=\frac{ab}{a+b}$. 26. $x=\frac{2a^2-2ab+b^2}{2(b-a)}$.

27. $x=30$. 28. $x=\frac{5}{8}$.

29. $x=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. 30. $x=(ab+bc+ca)^2$.

31. $x=\frac{1}{1+a}$. 32. $x=-(a+b)$.

33. $x=\frac{ac^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}-c^{\frac{4}{5}}}$. 34. $x=-a$.

प्रश्नावली 125.

1. $x=\pm 3$. 2. $x=\pm 5$. 3. $x=\pm 2\sqrt{2}$.
4. $x=\pm 4$. 5. $x=\pm\sqrt{\frac{41}{13}}$. 6. $x=\pm\sqrt{7}$.
7. $x=\pm\sqrt{7}$. 8. $x=\pm\sqrt{(\frac{77}{31})}$. 9. $x=\pm\sqrt{(\frac{7}{2})}$.
10. $x=\pm\sqrt{2}$. 11. $x=\pm 2$. 12. $x=\pm 3$.
13. $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0$. 14. $x=\pm\sqrt{(\frac{13}{5})}$. 15. $x=\pm 7$.
16. $x=\pm 5$.

प्रश्नावली 126.

1. $x=3$ या 2. 2. $x=4$ या 3. 3. $x=-2$ या 1.
4. $x=-5$ या -2. 5. $x=6$ या -7. 6. $x=\frac{1}{3}$ या $\frac{1}{4}$.
7. $x=-\frac{1}{2}$ या $-\frac{2}{5}$. 8. $x=\cdot 5$ या $\cdot 3$. 9. $x=a$ या b.

10. $x=a^2$ या b^2. 11. $x=3a+3$ या $3a+2$.

12. $x=2a-b$ या $-a+b$. 13. $x=3$ या $\frac{2}{3}$.

14. $x=3$ या -4. 15. $x=4$ या $-2\frac{1}{4}$. 16. $x=\pm 8$.

प्रश्नावली 127.

1. $x=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. 2. $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

3. $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 4. $x=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$.

5. $x=2, 3$. 6. $x=\frac{1}{3}, -1$. 7. $x=2, \frac{2}{3}$.

8. $x=\frac{2}{5}, -7$. 9. $x=-1\pm\sqrt{2}$. 10. $x=2, \frac{1}{2}$.

11. $x=\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{22})$. 12. $x=1, -\frac{5}{3}$. 13. $x=\frac{1}{7}(3\pm\sqrt{2})$.

14. $x=\frac{45}{47}, -\frac{1}{3}$. 15. $x=\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}$. 16. $x=-\frac{5}{3}, \frac{35}{4}$.

17. $x=\frac{1}{13}(7\pm 2\sqrt{61})$. 18. $x=31, 110$.

19. $x=-17\frac{1}{7}, 44\frac{2}{7}$. 20. $x=0, 1$. 21. $x=\frac{7}{3}, 2$.

22. $x=\frac{2}{17}, \frac{4}{3}$. 23. $x=\frac{13}{18}, \frac{16}{23}$. 24. $x=\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{65})$.

25. $x=1, \dfrac{b}{a}$. 26 $x=\frac{1}{6}(9\pm\sqrt{21})$.

27. $x=\dfrac{5}{a}, -\dfrac{1}{a}$. 28. $x=1, \frac{2}{5}$.

29. $x=\frac{1}{6}(-m\pm\sqrt{m^2+12n})$. 30. $x=\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$.

31. $x=\frac{5}{2}, -2$. 32. $x=2, 1$. 33. $x=-1, -\frac{1}{6}$.

34. $x=\frac{1}{3}(-5\pm\sqrt{58})$. 35. $x=\frac{1}{7}(-1\pm\sqrt{862})$.

प्रश्नावली 128.

1. $x=7, 5$. 2. $x=8, 4$. 3. $x=3, -\frac{11}{7}$.

4. $x=5, -4\frac{1}{9}$. 5. $x=7, 4\frac{4}{13}$. 6. $x=-2\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

7. $x=1, 2\frac{371}{923}$. 8. $x=b, \dfrac{a^2}{b}$.

9. $x=0, \dfrac{2ab-ac-bc}{a+b-2c}$.

10. $x=a+b, \dfrac{(a+b)(a^2+b^2)}{2ab}$.
11. $x=\frac{20}{14}, \frac{13}{14}$.
12. $x=\frac{211}{35}, \frac{174}{35}$.
13. $x=\frac{65}{33}, \frac{166}{33}$.
14. $x=c, -c$.
15. $x=0, \pm\sqrt{ab}$.
16. $x=0, a+b$.
17. $x=-a, -b$.
18. $x=2a, \frac{3}{5}a$.
19. $x=1$.
20. $x=2$.

प्रश्नावली 129.

15. $x^2-8x+15=0$.
16. $2x^2+39x-63=0$.
17. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.
18. $x^2-2x-1=0$.
19. $x^2+12x+117=0$.
20. $qx^2+px+1=0$.
21. $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$.
22. $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.
23. $\dfrac{3abc-b^3}{a^3}$.

प्रश्नावली 130.

1. $x=27, 64$.
2. $x=1, 4\sqrt{2}$.
3. $x=\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{3}$.
4. $x=125, -216$.
5. $x=\pm 4, \pm 1$.
6. $x=1, 3$.
7. $x=\pm 1, \pm 2$.
8. $x=1, 2, \pm 3$.
9. $x=2, 3, \pm 5$.
10. $x=0, 3, \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{73})$.
11. $x=1, -5, -2\pm 2\sqrt{2}$.
12. $x=\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}(3\pm i\sqrt{7})$.
13. $x=0$.
14. $x=\pm 1$.
15. $x=\dfrac{a}{2}\left\{-5\pm\sqrt{5\pm 4\sqrt{2}}\right\}$.

प्रश्नावली 131.

1. $x=1, y=1; x=\frac{7}{5}, y=-\frac{1}{5}$.
2. $x=1, y=3; x=14\frac{3}{5}, y=-\frac{2}{5}$.
3. $x=4, y=1; x=6, y=\frac{7}{3}$.
4. $x=2, y=1; x=14, y=-29$.

5. $x=3, y=5; x=5, y=3.$

6. $x=5, y=4; x=-4, y=-5.$

7. $x=3, y=7; x=7, y=3.$

8. $\left.\begin{array}{l} x=4, y=1; x=1, y=4; \\ x=-1, y=-4, x=-4, y=-1 \end{array}\right\}$

9. $x=8, y=5; x=-5, y=-8.$

10. $x=4, y=3; x=1, y=12.$

11. $x=3, y=4, z=5; x=-3, y=-4, z=-5.$

12. $x=1, y=3, z=5; x=-1, y=-3, z=-5.$

13. $x=1, y=2, z=4; x=-1, y=-2. z=-4.$

14. $x=3, y=2, z=1; x=-3, y=-2, z=-1.$

15. $x=2, y=5, z=1; x=-12, y=-15, z=-11.$

16. $x=1, y=2, z=3; x=-1, y=-2, z=-3.$

प्रश्नावली 132.

1. 7, 5. 2. 9, 8. 3. 15, 7. 4. 6 या −5.
5. 7, 4; अथवा −7, −4. 6. 6, 7, 8; अथवा −6, −7, −8.
7. लम्बाई 60 गज़, चौड़ाई 45 गज़ । 8. 20.
9. 40 रु० । 10. 289. 11. लम्बाई 50 गज़, चौड़ाई 40 गज़।
12. 20 पुरुष, 16 स्त्रियाँ; अथवा 16 पुरुष, 20 स्त्रियाँ ।
13. पुस्तक के आरम्भ का आधा पढ़ने की गति प्रति घंटा 25 पृष्ठ ।
14. 43. 15. A, 20 मिनट; B, 12 मिनट ।

प्रश्नावली 134.

26. 2·8 (मोटे तौर से) । 27. 3·3 (मोटे तौर से) ।
28. 3·6 (मोटे तौर से) । 29. 4·1 (मोटे तौर से) ।

प्रश्नावली 135.

1. $x=\cdot 6, -1\cdot 6$ (मोटे तौर से) ।
2. $x=4\cdot 2, -\cdot 2,$ (मोटे तौर से) ।
3. $x=5, -1.$ 4. $x=4\cdot 5, -1\cdot 5$ (मोटे तौर से) ।
5. $x=3, -1.$ 6. $x=6\cdot 37, \cdot 63$ (मोटे तौर से) ।

7. $x = \cdot 41, -2\cdot 41$ (मोटे तौर से)।

8. $x = 1, -\frac{1}{3}$. 9. $x = 1\cdot 15, -\cdot 65$ (मोटे तौर से)।

10. $x = \cdot 36, -\cdot 56$ (मोटे तौर से)।

11. $x = \cdot 3, -\cdot 6$ (मोटे तौर से)।

12. $x = \cdot 14, -7\cdot 14$ (मोटे तौर से)।

13. $\left.\begin{matrix} x=4, y=3; \\ x=3, y=4 \end{matrix}\right\}$.

14. $\left.\begin{matrix} x=3\cdot 5, y=4\cdot 8; \\ x=-3, y=-5 \end{matrix}\right\}$ (मोटे तौर से)।

15. $\left.\begin{matrix} x=12, y=5; \\ x=3\cdot 2, y=12\cdot 6 \end{matrix}\right\}$ (मोटे तौर से)।

16. $\left.\begin{matrix} x=3\cdot 3, y=2\cdot 3; \\ x=-2\cdot 3, y=-3\cdot 3 \end{matrix}\right\}$ (मोटे तौर से)।

17. $\left.\begin{matrix} x=2, y=1; \\ x=1\frac{1}{7}, y=\frac{11}{7} \end{matrix}\right\}$. 18. $\left.\begin{matrix} x=3, y=2; \\ x=-2, y=-3 \end{matrix}\right\}$.

19. $\left.\begin{matrix} x=1, y=1; \\ x=2\frac{3}{17}, y=-\frac{13}{17} \end{matrix}\right\}$.

20. $x=1;$ $x=-1,$ $x=2,$ $x=-2,$
$y=1;$ $y=-1;$ $y=\frac{1}{2};$ $y=-\frac{1}{2}$.

प्रश्नावली 136.

1. 21, 36. 2. 50, 85.
3. $-5\frac{1}{2}, -10\frac{1}{2}$. 4. $38x, 68x$.
5. $-31a, -56a$. 6. $a+6, a+11$.
7. $2a-11b, 2a-21b$. 8. $a-11x, a-21x$.
9. $6n$. 10. $12-4n$.
11. $(-7n+13)a$. 12. $na-(4n-5)b$.
13. प्रथम पद 4, साधारण अन्तर 3.
14. प्रथम पद a, साधारण अन्तर b.
15. प्रथम पद $2a$, साधारण अन्तर $a-b$.
16. प्रथम पद $\frac{3}{2}$, साधारण अन्तर $-\frac{1}{2}$.
17. प्रथम पद $(a+b)$, साधारण अन्तर $a-b$.
18. $7n-3$. 19. $-7n+37$. 20. 11. 21. 610.

प्रश्नावली 137.

1. $-25; 8\frac{1}{2}$. 2. $a; a^2+b^2$. 3. $a+x, a+2x$.

4. $-6, -19$. 5. $4\frac{1}{2}, 6, 7\frac{1}{2}, 9$. 6. 4. 7. 5.

8. $\frac{1}{5}(4x+y), \frac{1}{5}(3x+2y), \frac{1}{5}(2x+3y), \frac{1}{5}(x+4y)$.

9. साधारण अन्तर $\frac{2x}{x+1}=d$ मानकर मध्यम $x+d, x+2d, x+3d, \ldots 3x-d$.

प्रश्नावली 138.

1. 65. 2. 300. 3. -345.

4. $6\sqrt{3}-45$. 5. $11a-55b$. 6. $3(7a-8x)$.

7. 129. 8. $\frac{1}{2}n(3n-1)$. 9. $n\left(1-\frac{n}{a}\right)$.

10. 20. 11. 15. 12. 6.

13. 2828. 14. 4437. 15. 2542.

16. 5. 17. 10. 18. $-15; -60$.

19. 4. 20. -5. 21. 705.

22. $\frac{b^2-a^2}{2S-(l+a)}$. 23. 7. 24. 5.

25. $\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2, \frac{13}{5}, \ldots$; 285.

प्रश्नावली 139.

1. $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

2. $n(16n^3-16n^2-2n+3)$. 3. $\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)$.

4. $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$. 5. $\frac{1}{3}n(16n^2+12n-1)$.

6. $\frac{1}{6}n(50n^2-45n+1)$. 7. $8n^2(2n^2-1)$.

8. $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+9n+22)$. 9. $\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+n-1)$.

10. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+13)$. 11. $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$.

12. $\frac{1}{3}n(4n^2+18n-1)$. 13. $\frac{n}{n+1}$.

14. $\frac{n}{3(5n+3)}$. 15. $\frac{1}{2}n(n^2-n+2)$.

16. $\frac{1}{6}n(7n^2-9n+8)$. 17. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

18. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$. 19. $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

20. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. 21. $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$.

प्रश्नावली 140.

6. 8, 14, 20. 7. 5, 19, 33, 47. 8. 5, 7, 9.

10. प्रथम पद 1, साधारण अन्तर 6. 13. 4, 9, 14; या 14, 9, 4.

14. 3, 8, 13; या 13, 8, 3. 15. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

17. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. 18. $60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$.

19. 24300 रु० । 20. 16.

21. 5 पौं० 3 शि०; 135 पौं० 4 शि० ।

22. 10 महीने में ।

प्रश्नावली 141.

1. 64. 2. $\frac{1}{512}$. 3. ax^{14}.

4. −243. 5. 768. 6. 2916.

7. छठा पद । 8. सातवाँ पद । 9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}$.

10. $\frac{1}{6561}$.

प्रश्नावली 142.

1. ± 81. 2. ± 30. 3. $\pm(a^2-b^2)$.

4. $\frac{1}{2}, 1, 2; -\frac{1}{2}, 1, -2$.

5. $-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3, -9; \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9$.

6. 15, 45, 135, 405.

7. 25, 225, 2025, 18225, 164025...; 25, −225, 2025, −18225, 164025....

8. 15, 45. 11. 27, 3.

प्रश्नावली 143.

1. 255. 2. 364. 3. $1\frac{15}{16}$.

4. $\frac{182}{243}$. 5. 189. 6. $\frac{1}{2}(3^n-1)$.

7. $\dfrac{3^{\frac{n}{2}}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$. 8. $\dfrac{a(1-b^n)}{b^{n-1}(1-b)}$. 9. $\dfrac{7(4^n-3^n)}{3^{n-1}}$.

10. $4\frac{3280}{6561}$. 11. 1055.

12. 262143 रु० 15 आ० 3 पैसा ।

प्रश्नावली 144.

1. 2.　　2. $\frac{2}{3}$.　　3. 2.　　4. 112.

5. $2\frac{2}{9}$.　　6. $\frac{5}{1}$.　　7. $1\frac{1}{4}$.　　8. $\frac{1}{1-a}$.

9. $\frac{5}{4}\sqrt{5}$.　　10. $\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$.　　13. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$

14. 3.　　16. (1) $\frac{4}{9}$;　　(2) $\frac{16}{45}$;

(3) $\frac{253}{900}$;　　(4) $\frac{324}{99}$;　　(5) $\frac{563}{90}$;　　(6) $\frac{122}{99}$.

प्रश्नावली 145.

2. $ar^{\frac{n-2}{2}}$, $ar^{\frac{n}{2}}$ (a प्रथम पद और r सार्व अनुपात) ।

9. 7, 21, 63.　　10. 2, 6, 18.　　11. 1, 2, 4.

12. 12, 3.　　19. $2^{n+1}-n-2$.

20. $\frac{4}{9}(4^n-1)-\frac{1}{3}n$.　　21. $\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}(3^n-1)$.

22. $2^{n+1}+3n-2$.　　23. $\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{(1-x)}$.

24. $\frac{1}{(1+x)^2}$.　　25. $\frac{1+2x}{(1-x)^2}$.

26. $1\frac{7}{8}$.　　27. $\frac{7}{16}$.

28. $\frac{a}{1-x}+\frac{bx}{(1-x)^2}$.　　29. $\frac{1+10x}{(1-2x)^2}$.

30. $\frac{1-9x}{(1+3x)^2}$.　　31. $\frac{20}{81}(10^n-1)-\frac{2n}{9}$.

32. $\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$.　　33. $\frac{7n}{9}=\frac{7}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

36. 1677721 रु० 9 आ० 2 पैसा, 6 कौड़ियाँ ।

प्रश्नावली 146.

1. $m=2$, $n=3$; या $m=-3$, $n=-2$.

2. A=2, B=3, C=4.　　3. 3.

4. 1.　　5. 49.

प्रश्नावली 147.

8. $x=-2a,\ y=0.$

प्रश्नावली 148.

17. (*i*) $\frac{163}{8}$; (*ii*) $\frac{25}{3}$.

18. (*i*) 1; (*ii*) 1.

प्रश्नावली 149.

1. $a_1b_2-a_2b_1.$ 2. $a_1b_2^2-a_2b_1b_2+c_1a_2^2=0.$

3. $-a_1c_1^3+a_2b_1c_1^2-a_3b_1^2c_1+a_4b_1^3=0.$

4. $(r^2-s+p)(s^2-ps+qr)=(q+rs)^2.$

5. $pq=1.$

6. $(mp-nq)(np-mq)=(p^2-q^2)^2.$

7. $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$

8. $l^3-3lm+2n=0.$

9. $a^2+b-c=0.$

10. $(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)=(c_1a_2-c_2a_1)^2.$

11. $a^3-3ab-c=0.$

12. $(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2=c^2(lm'+l'm)^2.$

13. $a^2+b^2+c^2+2abc=1.$

14. $a^2-3ab+3d-c=0.$

15. $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$

16. $d^2(a+b+c)+abc=0.$

17. $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}+\dfrac{d}{d+1}=1.$

18. $a^3+b^3+c^3-5abc=0.$

19. $(1+a)^2(1+b)^2(1+c)=(1-a)^2(1-b)^2(1-c).$

विविध प्रश्नावली VI.

1. 3. 2. 0, 0, ∝, 0, अनिर्णीत ।

3. (*i*) $x^{14}+x^{13}y-x^{11}y^3-x^{10}y^4+x^4y^{10}+x^3y^{11}-xy^{13}-y^{14}$;

(*ii*) $\frac{1}{4}m^3+\frac{1}{24}m^2n-\frac{9}{40}m^2-\frac{1}{4}mn^2-\frac{27}{80}mn+\frac{11}{20}m-\frac{1}{9}n^3-\frac{5}{36}n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}$.

5. $x^4-2qx^3-2(p^2-q^2)x^2+(p^3+p^2q+pq^2-q^3)x-p^2q^2$; $x^2-(p+q)x+q^2$.

6. $(0, \pm 9\cdot 2)$ मोटे तौर से; $(-2, \pm 8)$, $4x\pm 3y-16=0$.

7. $a+b+c+abc$.

8. (*i*) $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$;

(*ii*) $(1+a)(1-a)(b+c+ab-ac)(b+c-ab+ac)$.

10. (*i*) $x=\frac{5}{6}$; (*ii*) $x=10$.

11. 25 वर्ष । 12. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

14. $-5x$. 15. 9 वर्ष । 16 $6xyz$.

17. (*i*) x^4-x^2-1; (*ii*) $1+x^{\frac{3}{8}}$.

18. (*i*) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$;

$(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$;

(*ii*) $5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

20. 4. 21. (*i*) $8a^3$, (*ii*) 9.

22. (*i*) $x=1\cdot 6, -\cdot 6$; (*ii*) (*a*) $x=8, 1$; (*b*) $x=6\cdot 4, \cdot 63$ मोटे तौर से ।

23. (*i*) $x=\frac{1}{2}(a+b)$; (*ii*) $x=ab+bc+ca$.

24. 1800. 25. $\dfrac{a+b+c}{bc+ca+ab}$.

29. (*i*) $5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$;

(*ii*) $-(y-z)(z-x)(x-y)$.

30. $\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$. 31. $x=-\frac{1}{6}, y=-\frac{1}{4}, z=\frac{1}{12}$.

32. 72. 33. (*i*) $x=-3\frac{3}{7}$; (*ii*) $x=-2\frac{1}{2}$.

34. 60. 35. $a+b+c$. 36. घंटे में $7\frac{1}{5}$ मील ।

37. $x=-3\frac{1}{3}$. 39. $\frac{1}{a-b}$. 40. 128.

41. $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ या $\frac{1}{2}\left\{1\pm\sqrt{\frac{a-7}{a+1}}\right\}$.

42. 2·2. 43. 8.

44. 16^2+30^2. 45. $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$.

46. $\frac{ma(2m+n)}{2(m^2-n^2)}$ मील ।

47. (*i*) $(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$;
(*ii*) $-(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.

49. (*i*) $x=-\frac{2bc}{a(b+c)}$; (*ii*) $x=5\frac{1}{2}$.

51. (*i*) $y^5-4y^3-y^2+4y+1$; (*ii*) $a^3+6a^2+12a+8$.

52. (*i*) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$, (*ii*) $(x+y)^4+z^4$.

53. 0. 54. (*i*) 1; (*ii*) $\frac{1}{3}$.

55. x. 56. 2·61, ·38.

57. (*i*) $x=-(a^2+b^2+c^2)$; (*ii*) $x=a^3+b^3+c^3$.

61. $x=2,\ -3,\ \frac{-1\pm\sqrt{-31}}{2}$.

62. (*i*) -1 और 2 के मध्य में; (*ii*) 1.

66. $x=a+b,\ y=a-b$. 67. $x=15,\ y=8$.

68. (*i*) $x=\frac{c^2-ab}{a+b-2c}$; (*ii*) $x=\frac{a}{3},\ 3a,\ \frac{3\pm4i}{5}a$.

(*iii*) $x=\frac{cd(c+d)-ab(a+b)}{(a^2+ab+b^2)-(c^2+cd+d^2)}$.

69. पिता, ज्येष्ठ पुत्र और कनिष्ठ पुत्र की अवस्था क्रमशः 30, $7\frac{1}{2}$ और 6 वर्ष ।

70. 27.

72. (*i*) a^2+b^2; (*ii*) $(b+c)(c+a)(a+b)$;

(*iii*) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

76. (*i*) $x=-\frac{b+c}{2a}$; (*ii*) $x=-(a+b+c)$.

80. $x=bc(b+c)$, $y=ca(c+a)$, $z=ab(a+b)$.

82. $\frac{3x^2+19x+14}{(x^2+5x-6)(x^2+3x-10)}$; $\frac{1}{x^2-3x+2}$.

84. (*i*) $x=2$; (*ii*) $x=-\frac{a}{3}, a, \frac{a}{2}$.

85. दूरी 360 मील और गति घंटे भर में 24 मील अथवा दूरी 150 मील और गति घंटे में 10 मील।

87. $v^2=u^2+2fs$.

90. (*i*) $(x-a-b)^3=27abx$; (*ii*) $\{x-(y-z)^2\}^2=16xyz$.

91. (*i*) y^2; (*ii*) $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$.

92. 8 मील की गति से 5 घंटा और 10 मील की गति से 6 घंटा।

93. $\sqrt{a+x}$. 95. $5x^2-7xy+5y^2$.

96. (*i*) $x+y+z+xyz$; (*ii*) $1+abc$;

(*iii*) $x^6+x^{-6}+3(x^2+x^{-2})$.

97. $\frac{x^2(x^2-2x+1)}{256}$; $\frac{x(x-1)}{16}$. 98. -1.

99. (*i*) $x=\frac{p}{1-p}, y=\frac{1}{1+p}$; (*ii*) $x=\frac{a^2b}{a-b}, y=\frac{ab^2}{a+b}$.

100. 3·077...इंच। 103. $5\frac{10}{13}$ दिन।

109. 900.

112. $\frac{1}{c(c+1)(c+2)}\{x^2-(c+3)x+(c+1)(c+2)\}$.

114. t^4. 115. $x=2\cdot65$ मोटे तौर से।

116. 1·7 और ·3 (मोटे तौर से)।

118. $x=4\frac{4}{5}$, $y=1\frac{5}{7}$, $z=1\frac{3}{8}$. 119. $x=3, -2$.

120. 43. 127. 1

129. 53 या 35. 132. नहीं।

133. (5, 0). 137. 1220.

139. $a=1, b=-1, c=1, d=-1$.

148. (*i*) $n(x^2+y^2)-n(n-3)xy$. (*ii*) $\frac{3}{2}(x-1)$.

149. 100 मील। 150. प्रायः 6·5.

152. $x=(a+b+c)^2$. 153. $x=-\frac{1}{2}(a+2b+c)$.

158. 30 इकाई; गेंद जिस स्थान से फेंकी गयी है, उस स्थान से 120 इकाई की दूरी।

159. 1. 163. 2, 4, 6, 8, 10.

164. $1\frac{1}{2}$ मन। 165. 4, 10, 16.

172. $m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}}=4$. 175. $x=\pm 1$.

176. $x=-3$.

——:o:——

शब्दावली

abscissa भुज
absolute परम
adfected quadratic मिश्र द्विघात
alternando एकान्तर निष्पत्ति
arithmetic series समान्तर श्रेणी
ascending order आरोह क्रम
associative law संकलन नियम
axiom स्वयं सिद्ध
axis अक्ष
base (of logarithm) आधार
binomial द्विपद
biquadratic चतुर्घातक
cancellation अपसारण
characteristic (of logarithm) पूर्णांश
circle वृत्त
co-efficient गुणक
column स्तम्भ
combination संचयन
commensurable निमित
commutative law क्रमविनिमय नियम
complex number मिश्र संख्या
componendo योग निष्पत्ति
conic कानिक; शांकव
conjugate surd करणी
constant (quantity) अचल
continued product संलग्न गुणनफल
continuous अविच्छिन्न
convergent संसृत
co-ordinates नियामक; भुज-कोटि
cross multiplication वज्रगुणन
cubic त्रिघात; घन
deduction सिद्धान्त
degree (of an expression) घात; मान
dependent (variable) आधीन; परतंत्र
descending order अवरोह क्रम
determinant सारिणिक
dimension परिमाण
direct variation समक्ष परिवर्त्तन
distributive law विकलन नियम
divergent अपसृत

dividendo भक्त निष्पत्ति
element (of a determinant) अंग
elimination लुप्तीकरण
ellipse दीर्घ वृत्त
equation समीकरण
expansion विस्तार
exponential series घातीय श्रेणी
exponential theorem घातीय सूत्र
expression राशिमाला; व्यंजक
factorial क्रम गुणित
factorization गुणनखण्डीकरण
formula (statement) सूत्र
function फल
generalization सरलीकरण; व्याप्ति नियम
geometric series गुणोत्तर श्रेणी
gradient प्रणवता
graph लेखाचित्र
graphical लैखिक
harmonic series हरात्मक श्रेणी
homogeneous समघाती
hyperbola अतिपरवलय
identity तादात्म्य
imaginary कल्पित
incommensurable अनियमित
independent (variable) स्वतंत्र; स्वाधीन
indeterminate अनिर्णीत
index घातांक
inequality असाम्यता
infinite, infinity अनन्त
integral पूर्णाङ्क
inverse variation उत्क्रमतः परिणमित
invertendo उत्क्रम निष्पत्ति
irrational करणीगत
joint variation साथ साथ परिणमन
letter अक्षर
like सजातीय
limit सीमा
limiting value चरम मान
linear एक घात
logarithm लघुगणक । log.
mantissa (of logarithm) दशमलवांश
maximum अधिकतम; महत्तम
minimum अल्पतम
minor लघु
monomial एकपदी

natural (logarithm) e-प्राकृत
natural number प्राकृत संख्या
negative ऋण; ऋणात्मक
order क्रम
ordinate कोटि
origin मूलविन्दु
parabola परवलय
plotting अङ्कन
polynominal बहुपद
positive धनात्मक
power series घात श्रेणी
progression श्रेणी
property (mathematical) गुण; धर्म
pure quadratic शुद्ध द्विघात (वर्ग)
quadrant पाद
quadratic द्विघात; वर्ग
rational अकरणीगत
rationalization अकरणीकरण
real वास्तविक
recurrence आवर्त्त
reductio असंगत
root मूल
row पंक्ति
series श्रेणी
sexagesimal षट् दशांशक
side (of equation) पक्ष
sign चिह्न
simplification सरलीकरण
simultaneous equation युगपत् समीकरण
solution समाधान
squared paper वर्गाङ्कित काग़ज़
stationary स्थिर
sum of series श्रेणी का योग
surd करणी
symbol संकेत; चिह्न
symmetry सममित
term पद; राशि
transposition पक्षान्तरानयन
unknown quantity अव्यक्त राशि
unlike विजातीय
value मान
variable चल
variation परिणमन

——:o:——

लाल बहादुर शास्त्री राष्ट्रीय प्रशासन अकादमी, पुस्तकालय
L.B.S. National Academy of Administration, Library
मसूरी
MUSSOORIE
यह पुस्तक निम्नांकित तारीख तक वापिस करनी है ।
This book is to be returned on the date last stamped

दिनाक Date	उधारकर्त्ता की सख्या Borrower's No.	दिनांक Date	उधारकर्त्ता की सख्या Borrower's No
13/8/90	119/5		

LBSNAA

H
512
चट्टोपा

अवाप्ति सं० ~~20043~~
ACC. No................

वर्ग सं.
Class No................

पुस्तक सं.
Book No..............

लेखक
Author चट्टोपाध्याय, सुरेन्द्रमोहन

512
चट्टोपा

LIBRARY
LAL BAHADUR SHASTRI
National Academy of Administration
MUSSOORIE

Accession No. 125722

1. Books are issued for 15 days only but may have to be recalled earlier if urgently required.
2. An over-due charge of 25 Paise per day per volume will be charged.
3. Books may be renewed on request, at the discretion of the Librarian.
4. Periodicals, Rare and Reference books may not be issued and may be consulted only in the Library.
5. Books lost, defaced or injured in any way shall have to be replaced or its double price shall be paid by the borrower.

Help to keep this book fresh, clean & moving